

**Dr Dariusz KACPRZAK**

Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka

e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

ORCID: 0000-0002-8999-1044

DOI: 10.15290/oes.2018.04.94.19

## PRZEDZIAŁOWA METODA TOPSIS DLA GRUPOWEGO PODEJMOWANIA DECYZJI<sup>1</sup>

### Streszczenie

**Cel** – Celem pracy jest przedstawienie nowego podejścia do rankingu wariantów decyzyjnych z danymi przedziałowymi dla grupowego podejmowania decyzji, wykorzystującego metodę TOPSIS.

**Metodologia badania** – W proponowanym podejściu, wszystkie pojedyncze oceny decydentów są brane pod uwagę w wyznaczaniu końcowych ocen wariantów decyzyjnych oraz ich rankingu. Kluczowym jego elementem jest przekształcenie macierzy decyzyjnych dostarczonych przez decydentów, w macierze wariantów decyzyjnych.

**Wynik** – Nowe podejście do grupowego podejmowania decyzji wykorzystujące metodę TOPSIS.

**Oryginalność/wartość** – Proponowane podejście jest nowatorskie oraz łatwe w użyciu.

**Słowa kluczowe:** liczby przedziałowe, TOPSIS, grupowe podejmowanie decyzji

## THE INTERVAL TOPSIS METHOD FOR GROUP DECISION MAKING

### Summary

**Goal** – The purpose of the paper is to present a new approach to the ranking of alternatives with interval data for group decision making using the TOPSIS method.

**Research methodology** – In the proposed approach, all individual assessments of decision makers are taken into account in determining the final assessments of alternatives and their ranking. The key stage of the proposed approach is the transformation of the decision matrices provided by the decision makers into a matrices of alternatives.

**Score** – A new approach for group decision making using the TOPSIS method.

**Originality/value** – The proposed approach is innovative and easy to use.

**Key words:** interval numbers, TOPSIS, group decision making

**JEL classification:** C44

---

<sup>1</sup> Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

## 1. Wstęp

Podejmowanie decyzji (dokonywanie wyborów) stanowi integralną część zarządzania, planowania i sterowania w przedsiębiorstwach oraz w życiu codziennym. Jednak konieczność wzięcia pod uwagę wielu różnorodnych czynników powoduje, że podjęcie właściwej decyzji może okazać się zadaniem trudnym. Przyczyniło się to do rozwoju tzw. dyskretnych metod wielokryterialnych podejmowania decyzji (*Multiple Criteria Decision Making* – MCDM), które dysponują gotowymi algorytmami umożliwiającymi podjęcie optymalnej decyzji. Metody te stały się bardzo popularne w ostatnich latach i znalazły szerokie zastosowanie w rozwiązaniu wielu problemów rzeczywistych [Behzadian i in., 2012; Abdullah, Adawiyah, 2014].

Jedną z najpopularniejszych i szeroko stosowanych metod MCDM jest metoda TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*) zaproponowana przez Hwang i Yoon [1981]. Główna idea tej metody jest dość prosta. Wykorzystuje ona dwa punkty referencyjne, tzw. rozwiązanie idealne (nazywane też pozytywnym idealnym rozwiązaniem – PIS) oraz rozwiązanie antyidealne (nazywane też negatywnym idealnym rozwiązaniem – NIS) jako punkty odniesienia dla rozważanych wariantów decyzyjnych. Rozwiązaniem (wariantem) optymalnym, które powinno być wybrane jest to, które jednocześnie ma najmniejszą odległość do PIS i największą odległość do NIS. PIS jest rozwiązaniem, które maksymalizuje kryteria typu zysk (im więcej tym lepiej) i minimalizuje kryteria typu strata (im mniej tym lepiej), a NIS odwrotnie, tzn. maksymalizuje kryteria typu strata i minimalizuje kryteria typu zysk.

Klasyczna wersja metody TOPSIS opiera się na ocenach dostarczonych przez decydenta, tzw. macierzy decyzyjnej, w postaci precyzyjnych wartości liczbowych. Jednak rosnąca złożoność wielu rzeczywistych problemów decyzyjnych powoduje, że decydenci mogą mieć trudności z dokładnym określeniem swoich ocen lub też wyrażać swoje preferencje za pomocą wyrażen lingwistycznych. W takich sytuacjach możemy wykorzystać inne formy prezentacji danych, m.in. liczby przedziałowe [Jahanshahloo i in., 2006; Roszkowska, 2009; Roszkowska, 2011; Kacprzak, 2018], liczby rozmyte [Chen, 2000], intuicjonistyczne zbiory rozmyte [Boran i in., 2009], niepewne (hesitant) zbiory rozmyte [Senvar i in., 2016], skierowane liczby rozmyte [Roszkowska, Kacprzak, 2016; Kacprzak, 2017; Rudnik, Kacprzak, 2017; Kacprzak, 2019] i inne.

W niniejszej pracy do oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów zostaną wykorzystane liczby przedziałowe. Rozszerzenie metody TOPSIS na liczby przedziałowe zapoczątkowali Jahanshahloo, Hosseinzadeh Lotfi i Izadikhah [2006]. Istotnym mankamentem ich propozycji było określenie rozwiązania idealnego i antyidealnego w postaci liczb rzeczywistych (przedziału zdegenerowanego do punktu) odpowiednio najmniejszej i największej wartości przedziałowych ocen wariantów decyzyjnych względem poszczególnych kryteriów. Zostało to zauważone i poprawione przez Dymową, Sevastjanova i Tikhonenko [2013]. Zastosowali oni metodę środka przedziału do porównywania przedziałów liczbowych, co pozwoliło na wyznaczenie elementów minimalnych i maksymalnych oraz określenie rozwiązań

idealnego i antyidealnego w postaci przedziału. W niniejszej pracy również zostanie zastosowana metoda środka przedziału oraz jego promienia do określenia porządku i wyznaczania elementów minimalnych i maksymalnych dla liczb przedziałowych.

Wspomniana już rosnąca złożoność problemów decyzyjnych powoduje, że rozważenie i ocena wszystkich istotnych elementów analizowanego zagadnienia przez pojedynczego decydenta może okazać się niemożliwa. Z tego względu coraz częściej rzeczywiste problemy decyzyjne są analizowane przez grupę decydentów, dając metody wielokryterialnego grupowego podejmowania decyzji (*Multiple Criteria Group Decision Making* – MCGDM). W tej sytuacji każdy z decydentów dostarcza swoją indywidualną ocenę (decyzję) wariantów decyzyjnych względem kryteriów w postaci macierzy decyzyjnej. Następnie te indywidualne decyzje są agregowane do decyzji grupowej (macierzy zbiorczej), która jest punktem wyjścia do zastosowania metody TOPSIS i rankingu wariantów decyzyjnych.

Jedną z najpopularniejszych metod agregacji i uzyskania decyzji grupowej jest średnia arytmetyczna decyzji indywidualnych [Chen, 2000; Wang, Chang, 2007; Roszkowska, Kacprzak, 2016]. Taki sposób postępowania wydaje się uzasadniony i znajduje zastosowanie w praktyce. Średnia arytmetyczna decyzji indywidualnych oznacza decyzję kompromisową i jest np. wykorzystywana w niektórych dyscyplinach sportowych m.in. snowboard slopestyle czy halfpipe. Zawodnicy są oceniani przez grupę sędziów, a wynik końcowy zawodnika stanowi średnia arytmetyczna ocen poszczególnych sędziów. Jednak z drugiej strony, taki sposób agregacji informacji indywidualnych może powodować, że istotna część ocen indywidualnych nie zostanie uwzględniona w należyty sposób. Jako przykład rozważmy grupę złożoną z dwóch decydentów, którzy dokonują ocen korzystając z następującej skali punktowej  $\{1,2,3,4,5\}$ . Zauważmy, że niezależnie czy ich oceny pewnego wariantu decyzyjnego względem pewnego kryterium mają postać 1 i 5, 2 i 4 czy 3 i 3, wynik agregacji będzie taki sam równy 3. Oznacza to, że taki uśredniony wynik nie odzwierciedla rozbieżności w ocenach indywidualnych, a więc ich preferencji. Może to sprawić, że stosując metodę TOPSIS opartą na takich uśrednionych informacjach, końcowa decyzja może być niewłaściwa.

Celem pracy jest przedstawienie nowego podejścia do rankingu wariantów decyzyjnych z danymi przedziałowymi dla grupowego podejmowania decyzji, wykorzystującego metodę TOPSIS. W proponowanym podejściu, wszystkie pojedyncze oceny decydentów są brane pod uwagę w wyznaczaniu końcowych ocen wariantów decyzyjnych, będących podstawą rankingu. Kluczowym jego elementem jest przekształcenie macierzy decyzyjnych dostarczonych przez decydentów, w macierze wariantów decyzyjnych, których elementami będą oceny poszczególnych wariantów względem kryteriów dokonane przez decydentów. Ponieważ macierze decyzyjne będą wcześniej normalizowane z uwzględnieniem typu kryterium, rozwiązaniem idealnym w tym podejściu będzie macierz złożona z ocen maksymalnych, a rozwiązaniem antyidealnym macierz złożona z ocen minimalnych (w przeciwnym wypadku elementy rozwiązania idealnego będą elementami maksymalnymi dla kryteriów typu zysk oraz minimalnymi dla kryteriów typu strata, a w rozwiązaniu antyidealnym odwrotnie). Odległości wariantów decyzyjnych od rozwiązania idealnego i antyideal-

nego, w odróżnieniu od klasycznej metody TOPSIS, będą odległościami między macierzami. Wykorzystując względny współczynnik bliskości każdego z wariantów decyzyjnych, do rozwiązania idealnego zostanie utworzony ranking wariantów decyzyjnych, który wskaże wariant optymalny.

Praca składa się z siedmiu części. W drugiej zaprezentowano podstawowe informacje o liczbach przedziałowych, a w trzeciej przedstawiono algorytm klasycznej metody TOPSIS. Proponowane nowe podejście, wykorzystujące metodę TOPSIS dla grupy decydentów z danymi przedziałowymi, stanowi treść części czwartej, a przykład liczbowy – piątej. Część szósta jest poświęcona porównaniu proponowanej metody z innymi podobnymi metodami. Praca kończy się podsumowaniem.

## 2. Liczby przedziałowe

Liczby przedziałowe są jednym ze sposobów opisu i prezentacji danych nieprecyzyjnych i niepewnych. Liczbę przedziałową  $A$  określamy następująco [Cloud i in., 2009 s. 7-9]:

$$A = [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}. \quad (1)$$

W szczególności  $A$  jest liczbą rzeczywistą (liczbą przedziałową zdegenerowaną do punktu) jeżeli  $\underline{a} = \bar{a}$ . Niech  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  i  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$  będą liczbami przedziałowymi. Liczby  $A$  i  $B$  są równe jeżeli  $\underline{a} = \underline{b}$  oraz  $\bar{a} = \bar{b}$ . Działania arytmetyczne na liczbach przedziałowych określamy następująco: niech  $\odot \in \{+, -, \cdot, / \}$  będzie dowolnym działaniem arytmetycznym. Ogólną formę działania  $\odot$  możemy zapisać w postaci [Cloud i in., 2009 s. 11]:

$$A \odot B = [a \odot b, a \in A \wedge b \in B] \quad (2)$$

gdzie dzielenie  $/$  jest określone, jeżeli  $0 \notin B$ . Wynika stąd, że dowolne działanie arytmetyczne na liczbach przedziałowych możemy zrealizować przez wykonanie odpowiednich operacji na ich końcach, tzn.

$$A \odot B = [\min\{\underline{a} \odot \underline{b}, \underline{a} \odot \bar{b}, \bar{a} \odot \underline{b}, \bar{a} \odot \bar{b}\}, \max\{\underline{a} \odot \underline{b}, \underline{a} \odot \bar{b}, \bar{a} \odot \underline{b}, \bar{a} \odot \bar{b}\}]. \quad (3)$$

Poszczególne działania arytmetyczne przyjmują wówczas postacie [Cloud i in., 2009 s. 11-13]:

$$A + B = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}], \quad (4)$$

$$A - B = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}], \quad (5)$$

$$A \cdot B = [\min\{\underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}\}, \max\{\underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}\}], \quad (6)$$

$$A/B = [\min\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}, \max\{\underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}\}]. \quad (7)$$

Jeżeli przedział  $B$  zawiera zero ( $0 \in B$ ) dzielenie jest bardziej złożone. Rolę zera i jedynki w arytmetyce przedziałowej pełnią liczby rzeczywiste 0 i 1, które mogą być przedstawione jako przedziały zdegenerowane, odpowiednio  $[0,0]$  i  $[1,1]$ .

W pracy liczby przedziałowe będą wykorzystane w metodzie TOPSIS do oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów, więc zasadne jest przyjęcie założenia, że rozważane liczby przedziałowe będą podzbiorami półosi dodatniej, tzn. liczba przedziałowa  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \subset \mathbb{R}_+$  gdy  $\underline{a} \in \mathbb{R}_+$  i  $\bar{a} \in \mathbb{R}_+$ . Jeżeli przedział  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \subset \mathbb{R}_+$ , mnożenie (6) i dzielenie (7) przyjmują postać:

$$A \cdot B = [\underline{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}], \quad (8)$$

$$A/B = [\underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}]. \quad (9)$$

Wykorzystanie liczb przedziałowych w metodzie TOPSIS wymaga dodatkowo określenia odległości pomiędzy dwoma liczbami przedziałowymi oraz ich uporządkowania w celu określenia przedziału maksymalnego i minimalnego. Odległość  $d(A, B)$  między nimi określamy następująco:

$$d(A, B) = \sqrt{(\underline{a} - \underline{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2}. \quad (10)$$

Do porównywania (porządkowania liniowego) liczb przedziałowych i wyznaczania elementu maksymalnego i minimalnego wykorzystamy metodę zaproponowaną przez Hu i Wang [2006]. Technika ta wykorzystuje alternatywny sposób reprezentowania liczb przedziałowych w stosunku do określenia (1), które zapisywane są w postaci:

$$A = \langle c(A); w(A) \rangle, \quad (11)$$

gdzie  $c(A)$  oznacza środek przedziału określony zależnością:

$$c(A) = \frac{\underline{a} + \bar{a}}{2}, \quad (12)$$

natomiast  $w(A)$  jest jego promieniem wyrażonym wzorem:

$$w(A) = \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2}. \quad (13)$$

Niech  $A = \langle c(A); w(A) \rangle$  i  $B = \langle c(B); w(B) \rangle$  będą liczbami przedziałowymi. Hu i Wang określili na nich relację  $<$  „gorszy od” za pomocą równań (14)-(15), która pozwala na ich liniowe uporządkowanie:

$$A < B \Leftrightarrow \begin{cases} c(A) < c(B) & \text{gdy } c(A) \neq c(B) \\ w(A) \geq w(B) & \text{gdy } c(A) = c(B) \end{cases} \quad (14)$$

oraz

$$A < B \Leftrightarrow A <= B \wedge A \neq B. \quad (15)$$

### 3. Klasyczna metoda TOPSIS

Zalóżmy, że decydent (ekspert) dokonuje wyboru jednego z  $m$  możliwych wariantów decyzyjnych ocenianych względem  $n$  kryteriów. Kryteria są podzielone na dwie grupy: kryteria typu zysk (im więcej tym lepiej) oznaczone przez  $B$  oraz kryteria typu strata (im mniej tym lepiej) oznaczone przez  $C$ . Ocenę wariantu  $A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) ze względu na kryterium  $C_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) oznaczmy przez  $x_{ij}$ . Dodatkowo określamy wektor wag kryteriów oznaczony przez  $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ .

Klasyczna metoda TOPSIS [Hwang, Yoon, 1981, s. 128-132] zakłada, że oceny wariantów decyzyjnych względem kryteriów  $x_{ij}$  oraz wagi kryteriów  $w_j$  są określone precyzyjnie przez liczby rzeczywiste. Składa się ona z następujących etapów.

**ETAP 1:** Określenie macierzy decyzyjnej  $X$

$$X = (x_{ij}) \quad (16)$$

gdzie  $x_{ij} \in \mathbb{R}$ .

**ETAP 2:** Wyznaczenie znormalizowanej macierzy decyzyjnej

$$R = (r_{ij}) \quad (17)$$

gdzie  $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m x_{kj}^2}}$ .

**ETAP 3:** Wyznaczenie ważonej znormalizowanej macierzy decyzyjnej

$$V = (v_{ij}) \quad (18)$$

gdzie  $v_{ij} = r_{ij} \cdot w_j$ .

**ETAP 4:** Określenie rozwiązania idealnego  $A^+$

$$A^+ = (v_1^+, v_2^+, \dots, v_n^+) = \{(\max_i v_{ij} \mid j \in B), (\min_i v_{ij} \mid j \in C)\} \quad (19)$$

oraz rozwiązania antyidealnego  $A^-$

$$A^- = (v_1^-, v_2^-, \dots, v_n^-) = \{(\min_i v_{ij} \mid j \in B), (\max_i v_{ij} \mid j \in C)\}. \quad (20)$$

**ETAP 5:** Wyznaczenie odległości każdego wariantu decyzyjnego  $A_i$  od rozwiązania idealnego  $A^+$

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad (21)$$

oraz antyidealnego  $A^-$

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2}. \quad (22)$$

**ETAP 6:** Wyznaczenie współczynnika względnej bliskości wariantów decyzyjnych  $A_i$  do rozwiązania idealnego  $A^+$

$$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}. \quad (23)$$

**ETAP 7:** Ranking wariantów decyzyjnych względem wartości współczynnika względnej bliskości wariantów decyzyjnych do rozwiązania idealnego –  $RC_i$ . Im wyższa wartość tego współczynnika tym lepszy wariant decyzyjny. Najlepszym wariantem jest ten z najwyższą wartością  $RC_i$ .

#### 4. Proponowane podejście

Rozważmy problem wielokryterialny analizowany przez grupę decydentów. Niech  $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  ( $m \geq 2$ ) będzie skończonym zbiorem możliwych do realizacji wariantów decyzyjnych,  $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  ( $n \geq 2$ ) skończonym zbiorem kryteriów,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  wektorem wag kryteriów, takich że  $0 \leq w_j \leq 1$  i  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ . Dodatkowo, niech  $\{DM_1, DM_2, \dots, DM_K\}$  ( $K \geq 2$ ) będzie grupą decydentów.

W procesie grupowego podejmowania decyzji, każdy z decydentów  $DM_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) jest proszony o ocenę możliwych wariantów decyzyjnych względem kryteriów. Ze względu na niekompletną wiedzę analizowanego zagadnienia oraz niedokładność dostępnych informacji, decydenci stosują liczby przedziałowe, które zestawiają w macierzach decyzyjnych (decyzje indywidualne) postaci:

$$X^k = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11}^k & x_{12}^k & \dots & x_{1n}^k \\ x_{21}^k & x_{22}^k & \dots & x_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}^k & x_{m2}^k & \dots & x_{mn}^k \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (24)$$

gdzie  $x_{ij}^k = [x_{ij}^k, \bar{x}_{ij}^k]$  jest oceną przedziałową wariantu decyzyjnego  $A_i$  ze względu na kryterium  $C_j$  dokonaną przez decydenta  $DM_k$ . Aby zapewnić porównywalność kryteriów przedziałowe macierze decyzyjne  $X^k$  są normalizowane. Znormalizowane macierze postaci:

$$Y^k = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} y_{11}^k & y_{12}^k & \dots & y_{1n}^k \\ y_{21}^k & y_{22}^k & \dots & y_{2n}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^k & y_{m2}^k & \dots & y_{mn}^k \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (25)$$

są wyznaczane za pomocą formuły dla  $j = 1, \dots, n$ .

$$y_{ij}^k = \begin{cases} \left[ \frac{\underline{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij}^k}, \frac{\bar{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m \underline{x}_{ij}^k} \right] & \text{gdy } j \in B \\ \left[ \frac{1/\bar{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m 1/\underline{x}_{ij}^k}, \frac{1/\underline{x}_{ij}^k}{\sum_{i=1}^m 1/\bar{x}_{ij}^k} \right] & \text{gdy } j \in C \end{cases} \quad (26)$$

**UWAGA 1.** Zauważmy, że stosowana metoda normalizacji (26) nie zapewnia własności, że znormalizowane liczby przedziałowe należą do przedziału  $[0,1]$ . Przykładowo, założmy, że dla kryterium  $C_j$  typu strata mamy dane trzy liczby przedziałowe  $x_{1j} = [0.1,0.8]$ ,  $x_{2j} = [0.3,0.6]$ ,  $x_{3j} = [0.2,0.7]$ . Wówczas znormalizowane zgodnie z (26) liczby przedziałowe są postaci  $y_{1j} = [0.068,2.301]$ ,  $y_{2j} = [0.091,0.767]$ ,  $y_{3j} = [0.078,1.151]$ , gdzie  $y_{1j}$  i  $y_{3j}$  nie należą do przedziału  $[0,1]$ . Jeżeli żądamy spełnienia tej własności możemy wykorzystać następującą formułę:

$$z_{ij}^k = \left[ \frac{\underline{y}_{ij}^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^m [(\underline{y}_{ij}^k)^2 + (\bar{y}_{ij}^k)^2]}}, \frac{\bar{y}_{ij}^k}{\sqrt{\sum_{i=1}^m [(\underline{y}_{ij}^k)^2 + (\bar{y}_{ij}^k)^2]}} \right] \quad (27)$$

W rozważanym przykładzie uzyskamy następujące przedziały liczbowe  $z_{1j} = [0.025,0.856]$ ,  $z_{2j} = [0.034,0.285]$ ,  $z_{3j} = [0.029,0.428]$ .

Wykorzystując wektor wag kryteriów  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  wyznaczamy ważne znormalizowane przedziałowe macierze decyzyjne dla każdego z decydentów  $DM_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ):

$$V^k = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ A_1 & \left[ v_{11}^k & v_{12}^k & \dots & v_{1n}^k \right] \\ A_2 & \left[ v_{21}^k & v_{22}^k & \dots & v_{2n}^k \right] \\ \vdots & \left[ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \right] \\ A_m & \left[ v_{m1}^k & v_{m2}^k & \dots & v_{mn}^k \right] \end{matrix} \quad (28)$$

gdzie  $v_{ij}^k = w_j z_{ij}^k = [w_j \underline{z}_{ij}^k, w_j \bar{z}_{ij}^k]$ . Macierze te są podstawą do konstrukcji ważonych znormalizowanych przedziałowych macierzy decyzyjnych dla każdego z wariantów decyzyjnych  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) postaci:

$$W^i = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ DM_1 & \left[ v_{i1}^1 & v_{i2}^1 & \dots & v_{in}^1 \right] \\ DM_2 & \left[ v_{i1}^2 & v_{i2}^2 & \dots & v_{in}^2 \right] \\ \vdots & \left[ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \right] \\ DM_K & \left[ v_{i1}^K & v_{i2}^K & \dots & v_{in}^K \right] \end{matrix} \quad (29)$$

Macierze  $W^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) są bazą do budowy rankingu wariantów decyzyjnych i wskazania wariantu optymalnego z wykorzystaniem metody TOPSIS. Rozwiązanie idealne  $A^+$  określamy następująco:



$$A^+ = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ DM_1 & [v_1^{1+} & v_2^{1+} & \dots & v_n^{1+}] \\ DM_2 & [v_1^{2+} & v_2^{2+} & \dots & v_n^{2+}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ DM_K & [v_1^{K+} & v_2^{K+} & \dots & v_n^{K+}] \end{matrix} \quad (30)$$

gdzie  $v_j^{k+} = \max_i v_{ij}^k$ , dla  $j = 1, 2, \dots, n$  i  $k = 1, 2, \dots, K$ , natomiast rozwiązanie antyidealne  $A^-$  ma postać:

$$A^- = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_n \\ DM_1 & [v_1^{1-} & v_2^{1-} & \dots & v_n^{1-}] \\ DM_2 & [v_1^{2-} & v_2^{2-} & \dots & v_n^{2-}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ DM_K & [v_1^{K-} & v_2^{K-} & \dots & v_n^{K-}] \end{matrix} \quad (31)$$

gdzie  $v_j^{k-} = \min_i v_{ij}^k$ , dla  $j = 1, 2, \dots, n$  i  $k = 1, 2, \dots, K$ . Kolejnym krokiem jest wyznaczenie odległości poszczególnych wariantów decyzyjnych  $A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) opisanych macierzami  $W^i$  od wariantu idealnego  $A^+$  za pomocą formuły:

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n [(v_{ij}^k - v_j^{k+})^2 + (\bar{v}_{ij}^k - \bar{v}_j^{k+})^2]}, \quad (32)$$

oraz od wariantu antyidealnego  $A^-$  za pomocą formuły:

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^n [(v_{ij}^k - v_j^{k-})^2 + (\bar{v}_{ij}^k - \bar{v}_j^{k-})^2]}. \quad (33)$$

Wykorzystując względny współczynnik bliskości każdego z wariantów decyzyjnych  $A_i$  do rozwiązania idealnego postaci:

$$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+} \quad (34)$$

tworzymy ranking wariantów decyzyjnych względem wartości wskaźnika  $RC_i$  i wskazujemy wariant optymalny.

**UWAGA 2.** Zauważmy, że gdy mamy jednego decydenta, tzn.  $K = 1$ , wówczas proponowana metoda jest równoważna klasycznej metodzie TOPSIS rozszerzonej do liczb przedziałowych.

**UWAGA 3.** Zauważmy, że biorąc pod uwagę postać macierzy  $W^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) oraz rozwiązania idealnego  $A^+$  i antyidealnego  $A^-$ , proponowane podejście może być traktowane jako jednoczesne zastosowanie klasycznej metody TOPSIS rozszerzonej do liczb przedziałowych dla każdego z decydentów, reprezentowanego odpowiednimi wierszami wspomnianych macierzy.

**UWAGA 4.** Zauważmy, że proponowana metoda może być stosowana w sytuacji, gdy oceny wariantów decyzyjnych ze względu na kryteria są wyrażone za pomocą liczb rozmytych, wykorzystując twierdzenie o dekompozycji liczb rozmytych na  $\alpha$ -przekroje.

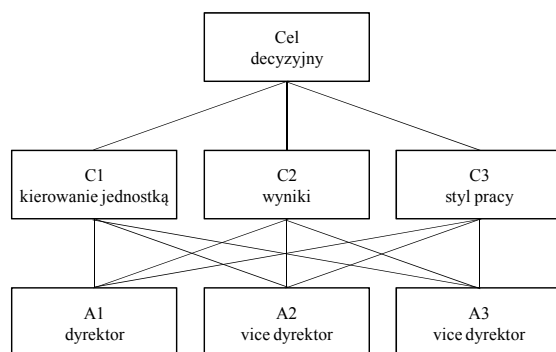
## 5. Przykład liczbowy

Zaproponowane w poprzedniej części podejście dla grupowego podejmowania decyzji zostanie zaprezentowane na przykładzie liczbowym zaczerpniętym z Yue [2012]. Dotyczy ono corocznej oceny władz jednego z uniwersytetów w Chinach. Zbiór wariantów decyzyjnych stanowi dyrektor ( $A_1$ ) oraz dwóch wicedyrektorów ( $A_2$ ) i ( $A_3$ ), którzy są oceniani przez zespoły nauczycieli ( $DM_1$ ), pracowników naukowych ( $DM_2$ ) i studentów ( $DM_3$ ). Decydenci oceniają władze uniwersytetu ze względu na kierowanie jednostką ( $C_1$ ), uzyskane wyniki ( $C_2$ ) i styl pracy ( $C_3$ ). Strukturę hierarchiczną analizowanego problemu prezentuje rysunek 1.

Członkowie zespołów decydentów dokonują ocen stosując skalę punktową od 0 do 100, a oceny zespołu podają w postaci liczb przedziałowych, których dolny kraniec stanowi minimalną, a górny maksymalną ocenę w obrębie członków grupy – tabela 1. Następnie macierze decyzyjne są normalizowane i, wykorzystując wektor wag  $w = (w_1, w_2, w_3) = (0.4, 0.2, 0.4)$ , wyznaczone są znormalizowane ważone macierze decyzyjne – tabela 2. Na podstawie tabeli 2 konstruowane są ważne znormalizowane macierze decyzyjne dla każdego z wariantów decyzyjnych  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – tabela 3 oraz rozwiązania idealne  $A^+$  i antyidealne  $A^-$  – tabela 4. Tabela 5 prezentuje wyniki uzyskane z wykorzystaniem proponowanej metody. Wyszczególniono w niej odległości wariantów decyzyjnych od rozwiązania idealnego –  $d_i^+$ , rozwiązania antyidealnego –  $d_i^-$ , względne współczynniki bliskości każdego wariantu decyzyjnego do ideału –  $RC_i$  oraz ich ranking –  $R$ . Ostatnią kolumnę, oznaczoną jako  $J$ , stanowią znormalizowane (sumujące się do 1) wartości względnych współczynników bliskości każdego wariantu decyzyjnego do ideału, pozwalające lepiej uwypuklić różnice między ocenami końcowymi wariantów decyzyjnych. Z tabeli 5 wynika, że uzyskany ranking ma postać  $A_3 < A_1 < A_2$ . A więc optymalnym wariantem decyzyjnym jest wariant  $A_2$ . Biorąc pod uwagę wskaźnik  $J$  widzimy, że wariant  $A_1$  jest nieznacznie gorszy od niego, natomiast wariant  $A_3$  jest już istotnie słabszy od dwóch wspomnianych.

**RYСУNEK 1**

**Struktura hierarchiczna analizowanego problemu**



Źródło: opracowanie własne.

TABELA 1

## Przedziałowe macierze decyzyjne

		$C_1$	$C_2$	$C_3$
$DM_1$	$A_1$	[60,90]	[72,86]	[85,92]
	$A_2$	[77,81]	[69,93]	[83,88]
	$A_3$	[80,96]	[59,87]	[68,85]
$DM_2$	$A_1$	[77,83]	[68,86]	[82,90]
	$A_2$	[93,98]	[76,86]	[65,87]
	$A_3$	[79,85]	[72,92]	[81,97]
$DM_3$	$A_1$	[85,86]	[76,86]	[80,97]
	$A_2$	[79,87]	[75,89]	[81,93]
	$A_3$	[62,82]	[84,89]	[78,82]

Źródło: Yue [2012].

TABELA 2

## Znormalizowane ważone macierze decyzyjne

		$C_1$	$C_2$	$C_3$
$DM_1$	$A_1$	[0.1052,0.1941]	[0.0613,0.0974]	[0.1547,0.1881]
	$A_2$	[0.1350,0.1747]	[0.0587,0.1053]	[0.1511,0.1799]
	$A_3$	[0.1402,0.2070]	[0.0502,0.0985]	[0.1238,0.1737]
$DM_2$	$A_1$	[0.1407,0.1621]	[0.0606,0.0937]	[0.1415,0.1866]
	$A_2$	[0.1700,0.1914]	[0.0678,0.0937]	[0.1122,0.1804]
	$A_3$	[0.1444,0.1660]	[0.0642,0.1002]	[0.1398,0.2012]
$DM_3$	$A_1$	[0.1604,0.1831]	[0.0695,0.0884]	[0.1415,0.1953]
	$A_2$	[0.1491,0.1853]	[0.0686,0.0915]	[0.1433,0.1872]
	$A_3$	[0.1170,0.1746]	[0.0769,0.0915]	[0.1380,0.1651]

Źródło: opracowanie własne.

TABELA 3

## Znormalizowane ważone macierze decyzyjne dla wariantów decyzyjnych

		$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A_1$	$DM_1$	[0.1052,0.1941]	[0.0613,0.0974]	[0.1547,0.1881]
	$DM_2$	[0.1407,0.1621]	[0.0606,0.0937]	[0.1415,0.1866]
	$DM_3$	[0.1604,0.1831]	[0.0695,0.0884]	[0.1415,0.1953]
$A_2$	$DM_1$	[0.1350,0.1747]	[0.0587,0.1053]	[0.1511,0.1799]
	$DM_2$	[0.1700,0.1914]	[0.0678,0.0937]	[0.1122,0.1804]
	$DM_3$	[0.1491,0.1853]	[0.0686,0.0915]	[0.1433,0.1872]

		$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A_3$	$DM_1$	[0.1402,0.2070]	[0.0502,0.0985]	[0.1238,0.1737]
	$DM_2$	[0.1444,0.1660]	[0.0642,0.1002]	[0.1398,0.2012]
	$DM_3$	[0.1170,0.1746]	[0.0769,0.0915]	[0.1380,0.1651]

Źródło: opracowanie własne.

**TABELA 4**

**Rozwiązania idealne i antyidealne**

		$C_1$	$C_2$	$C_3$
$A^+$	$DM_1$	[0.1402,0.2070]	[0.0587,0.1053]	[0.1547,0.1881]
	$DM_2$	[0.1700,0.1914]	[0.0642,0.1002]	[0.1398,0.2012]
	$DM_3$	[0.1604,0.1831]	[0.0769,0.0915]	[0.1415,0.1953]
$A^-$	$DM_1$	[0.1052,0.1941]	[0.0502,0.0985]	[0.1238,0.1737]
	$DM_2$	[0.1407,0.1621]	[0.0606,0.0937]	[0.1122,0.1804]
	$DM_3$	[0.1170,0.1746]	[0.0695,0.0884]	[0.1380,0.1651]

Źródło: opracowanie własne

**TABELA 5**

**Wyniki uzyskane proponowaną metodą: odległości do rozwiązania idealnego i antyidealnego, względne współczynniki bliskości do ideału, ranking wariantów decyzyjnych oraz znormalizowany względny współczynnik bliskości do ideału**

	$d_i^+$	$d_i^-$	$RC_i$	$R$	$J$
$A_1$	0.0593	0.0712	0.5457	2	0.3517
$A_2$	0.0517	0.0748	0.5916	1	0.3812
$A_3$	0.0739	0.0523	0.4145	3	0.2671

Źródło: opracowanie własne.

## 6. Porównanie proponowanej metody z innymi metodami

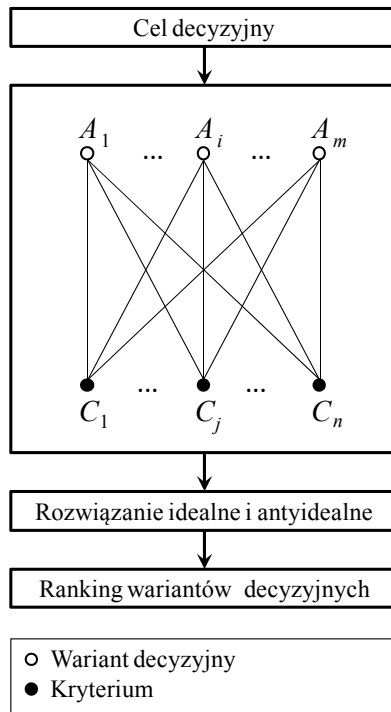
Porównany teraz proponowaną metodę z innymi metodami, wskazując podobieństwa i różnice. Na rysunku 2 pokazano strukturę hierarchiczną klasycznej metody TOPSIS [Hwang, Yoon, 1981], natomiast na rysunku 3 strukturę hierarchiczną proponowanej w pracy metody. Z kolei w tabeli 6 zestawiono porównanie podobieństw i różnic wybranych charakterystyk klasycznej metody TOPSIS, przedziałowej metody TOPSIS dla grupy decydentów proponowanej przez Yue [2011] oraz metody proponowanej w pracy.

Dodatkowo porównamy wyniki (ranking wariantów decyzyjnych), uzyskane na podstawie przykładu liczbowego z części 5, proponowaną metodą (**PM**) z popularnymi metodami agregującymi macierze decyzyjne w jedną zbiorczą macierz decyzyjną (która jest punktem wyjścia w metodzie TOPSIS do rankingu wariantów decyzyjnych):

- za pomocą średniej arytmetycznej (**ART**) [Chen, 2000; Wang, Chang, 2007; Roszkowska, Kacprzak, 2016],
- za pomocą średniej geometrycznej (**GEO**) [Shih i in., 2007; Ye, Li, 2009],
- za pomocą średniej ważonej, gdzie wagi określają istotność decydentów, metodą zaproponowaną przez Yue [2011].

## RYSUNEK 2

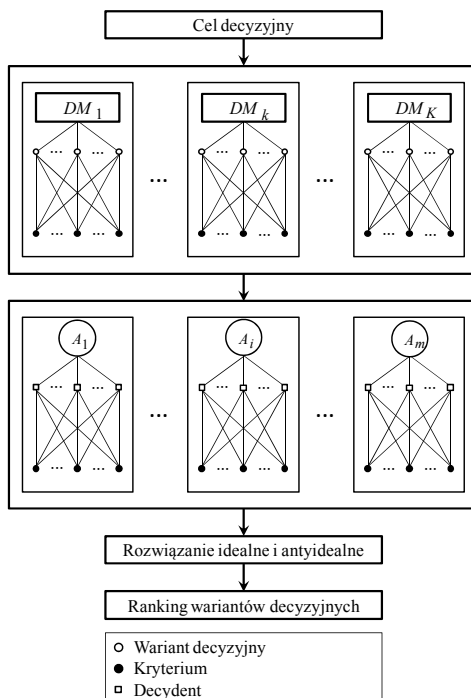
### Struktura hierarchiczna klasycznej metody TOPSIS



Źródło: opracowanie własne.

## RYSUNEK 3

## Struktura hierarchiczna proponowanej metody



Źródło: opracowanie własne.

## TABELA 6

Porównanie podobieństw i różnic proponowanej metody z klasyczną metodą TOPSIS i metodą proponowaną przez Yue [2011]

Charakterystyka	Klasyczna metoda TOPSIS	Propozycja Yue [2011]	Proponowane podejście
Liczba decydentów	jeden	więcej niż jeden	więcej niż jeden
Główne informacje	macierz decyzyjna złożona z liczb rzeczywistych	macierze decyzyjne złożone z liczb przedziałowych	macierze decyzyjne złożone z liczb przedziałowych
Wagi kryteriów	dane	dane	dane
PIS	najlepszy wariant decyzyjny opisany wektorem liczb rzeczywistych	najlepsza decyzja opisana macierzą liczb przedziałowych	najlepszy wariant decyzyjny opisany macierzą liczb przedziałowych
NIS	najgorszy wariant decyzyjny opisany wektorem liczb rzeczywistych	najgorsza decyzja opisana macierzą liczb przedziałowych	najgorszy wariant decyzyjny opisany macierzą liczb przedziałowych

Charakterystyka	Klasyyczna metoda TOPSIS	Propozycja Yue [2011]	Proponowane podejście
Odległość wariantów od PIS i NIS	odległość między wektorami	odległość między macierzami	odległość między macierzami
Względny współczynnik bliskości do ideału	$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$	$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$	$RC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^+}$
Końcowa decyzja	ranking wariantów decyzyjnych	ranking decydentów	ranking wariantów decyzyjnych

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki liczbowe, tzn. odległości od rozwiązania idealnego  $d_i^+$  i antyidealnego  $d_i^-$ , względny współczynnik bliskości do ideału  $RC_i$ , ranking wariantów decyzyjnych  $R$  oraz znormalizowane wartości względnych współczynników bliskości każdego wariantu decyzyjnego do ideału  $J$  zastawiono w tabeli 7. Na rysunku 4 pokazano rankingi wariantów decyzyjnych uzyskane za pomocą analizowanych metod przy użyciu względnych współczynników bliskości do ideału  $RC_i$  oraz ich znormalizowanych wartości  $J$ .

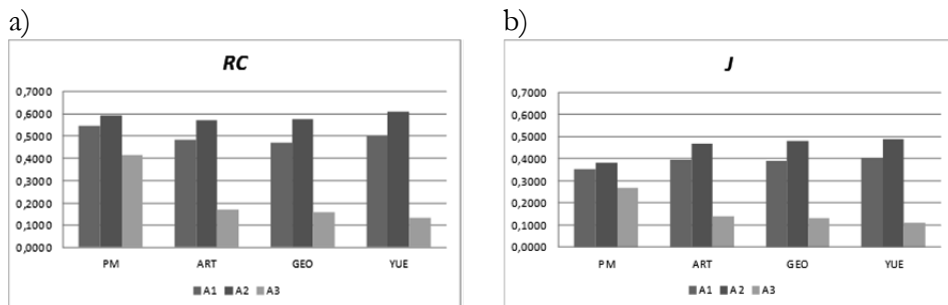
**TABELA 7**

**Wyniki uzyskane za pomocą proponowanej metody oraz metody agregujące macierze decyzyjne z wykorzystaniem średniej arytmetycznej (ART), geometrycznej (GEO) oraz ważonej proponowanej przez Yue [2011]**

Metoda	Wariant	$d_i^+$	$d_i^-$	$RC_i$	$R$	$J$
PM	$A_1$	0.0593	0.0712	0.5457	2	0.3517
	$A_2$	0.0517	0.0748	0.5916	1	0.3812
	$A_3$	0.0739	0.0523	0.4145	3	0.2671
ART	$A_1$	0.0169	0.0157	0.4818	2	0.3940
	$A_2$	0.0128	0.0171	0.5719	1	0.4676
	$A_3$	0.0235	0.0048	0.1693	3	0.1384
GEO	$A_1$	0.0182	0.0161	0.4696	2	0.3906
	$A_2$	0.0136	0.0185	0.5759	1	0.4791
	$A_3$	0.0239	0.0044	0.1566	3	0.1303
Yue	$A_1$	0.0288	0.0291	0.5019	2	0.4023
	$A_2$	0.0237	0.0373	0.6114	1	0.4901
	$A_3$	0.0454	0.0070	0.1343	3	0.1076

Źródło: opracowanie własne.

## RYSUNEK 4

Rankingi wariantów decyzyjnych uzyskane za pomocą analizowanych metod przy użyciu: a)  $RC_i$ , b)  $J$ 

Źródło: opracowanie własne.

Analizując uzyskane wyniki możemy zauważyć, że:

- wszystkie rozważane metody dają taki sam ranking wariantów decyzyjnych i wskazują wariant  $A_2$  jako wariant optymalny;
- metody agregacji ART i GEO dają bardzo podobne wyniki mierzone względny współczynnikiem bliskości do ideału;
- metoda ART oraz Yue dają różne wyniki, co wynika z faktu, że w przykładzie stosując metodę zaproponowaną przez Yue otrzymujemy wagi decydentów w postaci  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,2813, 0,3445, 0,3742)$ , czyli znacząco różne;
- biorąc pod uwagę znormalizowane wartości względnego współczynnika bliskości do ideału  $J$ , wyniki uzyskane metodami ART, GEO i Yue są bardzo do siebie zbliżone, tzn. dają bardzo wysoką ocenę końcową wariantowi  $A_2$ , nieznacznie niższą wariantowi  $A_1$  i bardzo niską wariantowi  $A_3$ . Z kolei proponowana metoda dość mocno obniża ocenę wariantu  $A_2$ , nieznacznie wariantu  $A_1$  i istotnie zwiększa ocenę wariantu  $A_3$ , w stosunku do pozostałych analizowanych metod. Sprawia to, że oceny końcowe uzyskane metodą PM są mniej zróżnicowane niż te uzyskane pozostałymi metodami, które przypisują bardzo wysoką ocenę wariantowi  $A_2$  i bardzo niską wariantowi  $A_3$ ;
- analizy numeryczne pokazały, że niewielka zmiana jednej z ocen np. jednego z krańców oceny wariantu  $A_1$  lub  $A_2$  (których oceny końcowe mierzone za pomocą  $RC_i$  są zbliżone) może zmienić ranking uzyskany proponowaną metodą, podczas gdy pozostałe metody są na to niewrażliwe. Przykładowo, jeżeli najniższa ocena  $A_1$  względem  $C_1$  wykonana przez  $DM_1$  byłaby nie 60 a wyższa, np. 68, warianty decyzyjne  $A_1$  i  $A_2$  zamieniły by się miejscami jeżeli wykorzystamy proponowaną metodę, a w pozostałych metodach zmiana ta nie wpłynęłaby na ranking.



## 5. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano nowe podejście do rankingu wariantów decyzyjnych z danymi przedziałowymi dla grupowego podejmowania decyzji, wykorzystującego metodę TOPSIS. Kluczowym elementem tego podejścia jest przekształcenie macierzy decyzyjnych, dostarczonych przez decydentów, na macierze wariantów decyzyjnych. Pozwala to na uwzględnienie wszystkich pojedynczych ocen decydentów przy wyznaczaniu końcowych ocen wariantów decyzyjnych. Warto również zwrócić uwagę na fakt, że proponowane podejście może być traktowane jako jednoczesne zastosowanie klasycznej metody TOPSIS, rozszerzonej do liczb przedziałowych, dla każdego z decydentów.

Przykład liczbowy oraz porównanie proponowanego podejścia z innymi znanymi z literatury metodami, takimi jak agregacja macierzy decyzyjnych za pomocą średniej arytmetycznej, geometrycznej czy ważonej z wagami określającymi istotność decydentów pokazały, że uzyskane rankingi wariantów decyzyjnych oraz wariant optymalny są jednakowe. Z drugiej strony, biorąc pod uwagę znormalizowany względny współczynnik bliskości do rozwiązania idealnego, możemy zauważyć, że w proponowanej metodzie oceny końcowe poszczególnych wariantów decyzyjnych są mniej zróżnicowane niż w pozostałych rozważanych metodach, które jednemu z wariantów przypisują ocenę bardzo wysoką, a innemu – bardzo niską. Ponadto analizy numeryczne pokazały, że proponowane podejście jest bardziej wrażliwe, w porównaniu z innym analizowanymi metodami, na zmianę pojedynczej oceny w macierzy decyzyjnej.

## Literatura

- Abdullah L., Adawiyah C.W.R., 2014, *Simple Additive Weighting Methods of Multicriteria Decision Making and Applications: A Decade Review*, "International Journal of Information Processing and Management", vol. 5(1), pp. 39-49.
- Behzadian M., Otaghsara S.K., Yazdani M., Ignatius J., 2012, *A state-of the art survey of TOPSIS applications*, "Expert Systems with Applications", vol. 39, pp. 13051-13069.
- Boran F.E., Genc S., Kurt M., Akay D., 2009, *A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method*, "Expert Systems with Applications", vol. 36, pp. 11363-11368.
- Chen C.T., 2000, *Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 114, pp. 1-9.
- Cloud M. J., Kearfott R.B., Moore R.E., 2009, *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia.
- Dymova L., Sevastjanova P., Tikhonenko A., 2013, *A direct interval extension of TOPSIS method*, "Expert Systems with Applications", vol. 40, pp. 4841-4847.

- Hu B.Q., Wang S., 2006, *A Novel Approach in Uncertain Programming Part I: New Arithmetic and Order Relation for Interval Numbers*, "Journal of Industrial and Management Optimization", vol. 2(4), pp. 351-371.
- Hwang C.L., Yoon K. 1981 *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin.
- Jahanshahloo G.R., Hosseinzadeh Lotfi F., Izadikhah M., 2006, *An Algorithmic Method to Extend TOPSIS for Decision Making Problems with Interval Data*, "Applied Mathematics and Computation", vol. 175, pp. 1375-1384.
- Kacprzak D., 2017, *Objective Weights Based on Ordered Fuzzy Numbers for Fuzzy Multiple Criteria Decision Making Methods*, "Entropy", vol. 19(7), pp. 373.
- Kacprzak D., 2018, *Metoda SAW z przedziałowymi danymi i wagami uzyskanymi za pomocą przedziałowej entropii Shannona*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, vol. 348, pp. 144-155.
- Kacprzak D., 2019, *A doubly extended TOPSIS method for group decision making based on ordered fuzzy numbers*, "Expert Systems with Applications", vol. 116, pp. 243-254.
- Roszkowska E., 2009, *Application TOPSIS methods for ordering offers in buyer-seller transaction*, "OPTIMUM, Studia Ekonomiczne", vol. 3(43), pp. 117-133.
- Roszkowska E., 2011, *Multi-Criteria Decision Making Models by Applying the TOPSIS Method to Crisp and Interval Data*, "Multiple Criteria Decision Making", vol. 6, pp. 200-230.
- Roszkowska E., Kacprzak D., 2016, *The fuzzy SAW and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers*, "Information Sciences", vol. 369, pp. 564-584.
- Rudnik K., Kacprzak D., 2017, *Fuzzy TOPSIS method with ordered fuzzy numbers for flow control in a manufacturing system*, "Applied Soft Computing", vol. 52, pp. 1020-1041.
- Senvar O., Otay İ., Boltürk E., 2016, *Hospital site selection via hesitant fuzzy TOPSIS*. "IFAC-PapersOnLine", vol. 49, pp. 1140-1145.
- Shih H.S., Shyur H.J., Lee E.S., 2007, *An extension of TOPSIS for group decision making*, "Mathematical and Computer Modelling", vol. 45, pp. 801-813.
- Wang T.C., Chang T.H., 2007, *Application of TOPSIS in evaluating initial training aircraft under a fuzzy environment*, "Expert Systems with Applications", vol. 33, pp. 870-880.
- Ye F., Li Y.N., 2009, *Group multi-attribute decision model to partner selection in the formation of virtual enterprise under incomplete information*, "Expert Systems with Applications", vol. 36, pp. 9350-9357.
- Yue Z., 2011, *An extended TOPSIS for determining weights of decision makers with interval numbers*, "Knowledge-Based Systems", vol. 24, pp. 146-153.
- Yue Z., 2012, *Developing a straightforward approach for group decision making based on determining weights of decision makers*, "Applied Mathematical Modelling", vol. 36, pp. 4106-4117.