mgr Grzegorz SZCZERBAK
Wydział Informatyki i Komunikacji, Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
e-mail: g.szczerbak@outlook.com

DOI: **10.15290/ose.2017.03.87.13**

WYKORZYSTANIE MODELI GARCH W ANALIZIE RYZYKA FINANSOWEGO SPÓŁEK AKCYJNYCH NOTOWANYCH NA GPW

Streszczenie

Celem niniejszego artykułu jest odpowiedź na pytanie, czy możliwe jest skuteczne prognozowanie wartości ryzyka rynkowego w warunkach polskiego rynku kapitałowego. Do analizy tego zagadnienia wykorzystano szeregi dziennych stóp zwrotu spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w latach 2000-2015. W części badawczej pracy przyjęto założenie, iż analizowane szeregi czasowe są realizacją procesu GARCH, co pozwoliło na modelowanie charakterystycznych właściwości spotykanych w empirycznych szeregach czasowych stóp zwrotu akcji giełdowych. Pomiaru ryzyka dokonano posługując się popularnymi miarami zagrożenia. Została również podjęta próba wyboru optymalnej spośród najpopularniejszych metod estymacji ryzyka.

Słowa kluczowe: GARCH, Value at Risk, Expected Shortfall, Median Shortfall, RiskMetrics

FINANCIAL RISK ANALYSIS IN POLISH STOCK MARKET USING GARCH MODELS

Summary

The aim of this paper is to investigate whether it is possible to successfully forecast market risk in the Polish capital market. To answer this question, daily time series of the stock prices listed on the Warsaw Stock Exchange between 2000-2015 are analysed. In the research part of the paper, it is assumed that the analysed time series are the realisation of the GARCH process, which allows the author to model the characteristic properties among the empirical data. The risk is assessed with the use of popular quantile risk measures. Additionally, an attempt is made to establish the optimal method of risk estimation.

Key words: GARCH, Value at Risk, Expected Shortfall, Median Shortfall, RiskMetrics

JEL: C22, C53, C58, G17, G32

1. Wstęp

Ryzyko jest nieodzownym aspektem każdej inwestycji. Chcąc alokować swój kapitał na giełdzie, potencjalny inwestor będzie narażony na wiele jego różnych odmian.

Spośród tych najczęściej spotykanych warto wymienić: ryzyko zmiany stopy procentowej, zmiany kursów walut, inflacji, braku płynności, bankructwa oraz ryzyko rynkowe będące głównym tematem niniejszego artykułu. Posługując się definicją z pracy Jajugi [2004, s. 99-100], ryzyko rynku (*market risk*) można zdefiniować jako występowanie zależności między ogólną sytuacją na giełdzie a trendami i zmianami cen poszczególnych akcji. Główny aspekt pracy został poświęcony właśnie analizie owego ryzyka w kontekście dynamicznych zmian zachodzących w finansowych szeregach czasowych.

W pierwszym rozdziale zaprezentowano miary wykorzystywane do oceny ryzyka finansowego. Prezentację rozpoczęto od wprowadzenia odchylenia standardowego. Była to pierwsza miara ryzyka inwestycyjnego, którą w 1952 roku zaproponował Henry Markowitz [1952]. Następnie zaprezentowano miary kwantylowe. Rekomendowany przez Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego – Value at Risk [*An international model-based approach*…, 1995] oraz wprowadzony przez zespół pod kierownictwem Phillippe Atznera: Expected Shortfall [Artzner i in. 1999]. W 2013 roku Komitet Bazylejski zarekomendował również Expected Shortfall jako miarę ryzyka inwestycyjnego [*Consultative Document*…, 2013]. Ostatnią, przedstawioną w tym rozdziale miarą, jest Median Shortfall, będąca rozwinięciem idei koherentnych miar ryzyka [Kou i in. 2013] stworzonej w 1999 roku.

Rozdział drugi w całości poświęcono metodom modelowania ryzyka finansowego. W pierwszej kolejności wprowadzono prostsze metody w postaci symulacji historycznej oraz zaproponowanej przez bank J.P. Morgan metody 'RiskMetrics" [*RiskMetrics – Technical Document*, 1999]. W dalszej części rozdziału zarekomendowano wykorzystanie, stworzonych przez Engle'a [1982] i Bollersleva [1986], modeli klasy (G)ARCH. Modele te wprowadzono ponad trzy dekady temu, jednakże wciąż znajdują one zastosowanie w empirycznych badaniach własności finansowych szeregów czasowych. Łatwość parametryzacji, czytelna konstrukcja oraz prostota ich rozbudowywania, pozwalająca uwzględnić charakterystyczne właściwości stóp zwrotu instrumentów finansowych, sprawiają, że cieszą się one dużym zainteresowaniem zarówno ze strony statystyków, jak i ekonometryków.

W ostatnim fragmencie artykułu zaprezentowano empiryczne badania stóp zwrotu akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W badaniu tym dokonano próby oceny skuteczności metod prognozowania ryzyka finansowego oraz jakości trzech, przedstawionych w części metodologicznej pracy, miar ryzyka. Zastosowanie trzech odmiennych metod modelowania ryzyka umożliwiło porównanie ich skuteczności oraz uwidoczniło różnice w uwzględnianiu charakterystycznych właściwości badanych szeregów czasowych.

Pomimo obszernych publikacji poruszających problematykę przedstawioną w niniejszym artykule, tematyka analizy ryzyka inwestycyjnego wciąż pozostaje aktualnym zagadnieniem. Kwestia ta jest szczególnie istotna w sytuacji nowo powstających kryzysów finansowych, rosnącej aktywności algorytmów handlujących instrumentami finansowymi czy też występowania nowych aktywów inwestycyjnych. Obszerna próba badawcza w połączeniu z szerokim wyborem kwantylowych miar ryzyka oraz potraktowaniem różnych specyfikacji modeli GARCH, jako jednej metody analitycznej, nadaje niniejszemu artykułowi wartość pracy oryginalnej.

2. Analiza ryzyka

Jak już wspomniano we wstępie, ryzyko jest nieodłącznym aspektem każdej inwestycji, a potencjalny inwestor, podejmując racjonalne decyzje inwestycyjne, zmuszony jest określić prawdopodobieństwo wielu, czasami ekstremalnych i odmiennych, zdarzeń. W naukach ekonomicznych wyróżnia się najczęściej dwa podstawowe podejścia do ryzyka: ryzyko negatywne i ryzyko pozytywne. Niniejsza praca skupia się wyłącznie na negatywnych aspektach ryzyka inwestycyjnego. Jednakże warto nadmienić, iż inwestorzy skłonni do ryzyka bądź też spekulanci są w znacznym stopniu zdeterminowani do podejmowania owego ryzyka w nadziei na większą, oczekiwaną stopę zwrotu. Pierwsze badania prowadzone przez Henryego Markowitza [1952] dowiodły, iż możliwe jest użycie odchylenia standardowego lub też semi-odchylenia jako miary ryzyka inwestycyjnego. Podejście to nie wytrzymało jednak próby czasu i tym samym zarzutów o nieuwzględnianie niejednorodności wariancji w czasie czy też braku rozróżnienia siły wpływu negatywnych i pozytywnych zmian wartości badanych instrumentów na ich ryzyko. Jako alternatywę zaczęto wykorzystywać Value at Risk (VaR). Była to na tyle dobra alternatywa, że zaczął ją rekomendować, a nawet wymagać jej stosowania, Bazylejski Komitet Nadzoru Bankowego. Pomimo swych niezaprzeczalnych zalet, szybko okazało się, iż możliwe jest zbudowanie lepszej miary ryzyka. Zadania tego podjął się zespół matematyków pod przewodnictwem Philippe Artznera [1999], który zaprezentował koherentną miarę ryzyka – Expected Shortfall. W literaturze można również spotkać się z określeniem *tail conditional expectation* – TCE lub *conditional Value at Risk* – cVaR. Rozdział ten rozpoczyna się od przedstawienia najczęściej spotykanej kwantylowej miary ryzyka – VaR. Wyjaśniono kryteria niezbędne do uznania miary za koherentną, by następnie przytoczyć dwie koherentne miary ryzyka, czyli wspomniany wcześniej Expected Shortfall oraz odporny odpowiednik owej miary – Median Shortfall. Zaprezentowane w tym rozdziale miary ryzyka można uznać za najczęściej wykorzystywane w kontekście ryzyka finansowego, choć warto zaznaczyć, iż oprócz koherentnych miar kwantylowych, również istnieją: wypukłe [Föllmer, Shied, 2002; Fritelli, Rosazza, 2002], spektralne [Acerbi, 2002; Szegö, 2002] i transformujące miary ryzyka [Wang, 2002]. W literaturze polskiej transformujące miary ryzyka zostały zaprezentowane w pracach Trzpiot [2004; 2012; 2014]. Nie są one jednak przedmiotem niniejszej pracy.

2.1. Value at Risk

Value at Risk nazywany także wartością zagrożoną jest najczęściej stosowaną miarą zagrożenia. Ze względu na łatwość interpretacji, sumaryczny sposób przedstawiania możliwej straty i prostotę implementacji jest on stosowany w większości instytucji finansowych. Formalnie VaR jest wyrażany jako oczekiwana wartość straty instrumentu finansowego, przy założeniu, że prawdopodobieństwo jej osiągnięcia lub przekroczenia jest równe arbitralnie przyjętemu poziomowi istotności:

$$\rho(W_{t+1} \leq W_t - VaR) = \alpha, \quad (1)$$

gdzie:
W_t– wartość kapitału w chwili t,
ρ – prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia,
VaR – Value at Risk,
α – arbitralnie przyjęty poziom istotności (1 – poziom ufności).

Głównymi wadami VaR jako miary ryzyka jest niespełnienie założeń o subaddytywności, duża zależność wyników od przyjętej metody estymacji oraz brak informacji o oczekiwanym poziomie strat w przypadku przekroczenia wartości zagrożonej. Szczegółowy opis różnorodnych metod estymacji VaR wraz z praktycznymi wskazówkami dotyczącymi przeprowadzania obliczeń znaleźć można w pracy Besta [2000].

2.2. Koherentne miary ryzyka

W 1999 roku zespół matematyków pod przewodnictwem Philippe Artznera [1999] zaprezentował szereg aksjomatów, które z matematycznego punktu widzenia powinna spełniać dobra miara ryzyka.

1. Translacja inwariantna:

$$\rho(X + \alpha r_0) = \rho(X) - \alpha \quad \underset{X \in G, a \in R^+}{\forall}, \quad (2)$$

gdzie:
r_0 – stopa zwrotu instrumentu wolnego od ryzyka,
G – zbiór wszystkich ryzyk,
X, Y – rozkłady stóp zwrotu instrumentów finansowych,
R^+– przestrzeń dodatnich liczb rzeczywistych.

Jeśli część zysku z instrumentu X zostanie określona jako stała z prawdopodobieństwem wystąpienia równym 100% i zapisana w postaci αr_0, to ryzyko tego instrumentu zmaleje o współczynnik α. W skrajnym przypadku, gdy $\rho(X) = \alpha$, otrzymuje się instrument wolny od ryzyka.

2. Monotoniczność:

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y) \quad \underset{X, Y \in G.}{\forall} \quad (3)$$

Relacja stóp zwrotu dwóch składników przekłada się na relację pomiędzy ryzykiem owych instrumentów finansowych. Jeżeli stopa zwrotu instrumentu Y jest większa od stopy zwrotu instrumentu X, to ryzyko instrumentu Y jest większe niż instrumentu X.

3. Subaddytywność:

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \quad \underset{X, Y \in G.}{\forall} \quad (4)$$

Ryzyko portfela aktywów maleje wraz ze wzrostem jego dywersyfikacji. Ryzyko portfela nie powinno przekraczać sumy ryzyka jego składowych.

4. Dodatnia homogeniczność:

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \quad \underset{X \in G}{\forall} \quad \lambda \geq 0, \tag{5}$$

gdzie:

λ– zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych.

Ryzyko **λ** instrumentów **X** jest równoważne z ryzykiem instrumentu **X** przemnożonym przez współczynnik **λ**.

Miarę spełniającą wszystkie opisane powyżej wymogi nazywa się koherentną. Jako przykład takiej miary Philippe Artzner podał Expected Shortfall, wyznaczany jako oczekiwana wartość strat po przekroczeniu poziomu określonego przez Value at Risk. Formalny zapis tej miary można przedstawić w następujący sposób:

$$ES_\alpha = \mathrm{E}\big(X \big| X \leq VaR_\alpha(X)\big). \tag{6}$$

Jednocześnie warto zauważyć, iż popularne odchylenie standardowe nie jest miarą koherentną, gdyż nie posiada własności translacji inwariantnej i monotoniczności [Trzpiot, 2004]. W przypadku miar budowanych na podstawie semiwariancji również nie jest spełniony warunek monotoniczności miary ryzyka. Value at Risk nie spełnia natomiast wymogu subaddytywności. Główną wadą zaprezentowanej miary mogą być trudności związane z jej estymacją dla rzadziej spotykanych rozkładów prawdopodobieństwa. Wzory wyprowadzone na podstawie funkcji gęstości najczęściej stosowanych rozkładów można znaleźć w pracy Nadarajaha i innych [2014].

W 2013 roku jako alternatywą dla klasycznych już miar zagrożenia Kou zdefiniował Median Shortfall (MS) [Kou i in. 2013]. Analogicznie jak w przypadku ES, wyznacza się ją jako wartość oczekiwaną strat po przekroczeniu VaR, z tą różnicą, iż średnią zastępuje tutaj mediana. Za sprawą tego prostego zabiegu miara ta cechuje się szeregiem pozytywnych właściwości, z których do najważniejszych należą: łatwość oszacowania oraz odporność na błędy estymacji wynikające z nieprawidłowej specyfikacji modelu. Formalny zapis tej miary przedstawiono we wzorze (7):

$$MS_\alpha = mediana[X|X \leq VaR_\alpha(X)] = VaR_{\frac{\alpha}{2}}(X). \tag{7}$$

W przypadku estymacji miarę tę można konstruować w sposób identyczny jak VaR ($MS_{1\%}$ jest równe wartości zagrożonej przy odpowiednio mniejszym poziomie istotności: $VaR_{0,5\%}$). Fakt ten jest szczególnie istotny, jeśli zachodzi konieczność testowania wstecznego (*backtesting*) lub wyznaczania miary ryzyka na podstawie funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. W przypadku Median Shortfall procedura ta przebiega w sposób identyczny jak to ma miejsce w Value at Risk i jest znacznie prostsza do estymacji Expected Shortfall

3. Modelowanie ryzyka

Istnieje wiele metod wykorzystywanych do modelowania ryzyka finansowych stóp zwrotu. W literaturze zazwyczaj wyróżnia się dwa odmienne podejścia. Pierwsze zakłada, iż zmienność w kolejnych dniach prognozy jest stała. Założenie to nie jest jednak zgodne z empirycznymi właściwościami finansowych szeregów czasowych. W niniejszej pracy przyjęto alternatywną koncepcję zakładającą, iż w szeregach tych występuje zmienność warunkowa wynikająca z przeszłych informacji. W zaprezentowanym rozdziale pracy skupiono się przede wszystkim na deterministycznym podejściu zakładającym jednoznaczne oszacowanie parametru zmienności. Alternatywą w tym przypadku mogą być modele zmienności stochastycznej (*Stochastic Volatilisty* – SV), w których przyjmuje się, iż prognoza zmienności nie może być dokładnie oszacowana na podstawie informacji dostępnych w dniu przeprowadzenia prognozy. Obszerne opracowania dotyczące wykorzystania metod SV w modelowaniu ryzyka finansowego można znaleźć w pracach: [Melle, Fabio, 2000; Pajor, 2003, 2010; Taylor, 1986]. Innym alternatywnym podejściem, cieszącym się coraz większą popularnością, są sieci neuronowe, których porównanie ze standardowymi modelami GARCH zostało przedstawione w pracy Hossaina i Nassera [2011]. Warto jednakże pamiętać, iż badania przeprowadzone w pracy Fiszedera [2009] dowodzą, że prognozy generowane przez modele SV, pomimo generalnie lepszego dopasowania wewnątrz próby, są mniej trafne, niż te generowane z wykorzystaniem modeli GARCH.

W pierwszej części tego rozdziału zaprezentowano najprostszą metodę modelowania ryzyka w postaci symulacji historycznej. Wprowadzono ją do pracy zarówno w celach porównawczych w stosunku do bardziej zaawansowanych metod, jak również jako potwierdzenie jej niewielkiej skuteczności. Następnie w dwóch osobnych wariantach przedstawiono miarę RiskMetrics. Zastosowanie wariantu z parametryzacją odpowiednią dla amerykańskiego rynku kapitałowego posłużyło weryfikacji wpływu błędnej specyfikacji modelu na otrzymywane wyniki. Ostatnia część rozdziału została poświęcona czterem odmiennym specyfikacjom modelu GARCH. Różnorodność owych wersji pozwoli na uwzględnienie odmiennych właściwości charakterystycznych dla finansowych szeregów czasowych w modelowanym procesie.

3.1. Symulacja historyczna

Metoda symulacji historycznej jest jedną z prostszych metod wyznaczania wartości zagrożonej. W najprostszej postaci VaR jest wyznaczany na podstawie dolnego kwantyla historycznych stóp zwrotu. Głównymi zaletami tej metody jest jej nieparametryczność, łatwość implementacji oraz brak założeń dotyczących rozkładu stóp zwrotu. W przypadku występowania niestacjonarności, jak to często ma miejsce w szeregach finansowych, wątpliwe jest jednak przyjmowanie założenia, iż przyszłe wartości ryzyka mogą być wyznaczane jedynie na podstawie jego przeszłych realizacji. Częściowym rozwiązaniem tego problemu może być połączenie metod symulacji historycznej z metodami Monte Carlo. W pracy Fiszedera [2009] metoda szacowania wartości zagrożonej na podstawie symulacji historycznej uplasowała się na ostatnich miejscach pod względem jakości otrzymywanych prognoz w rankingu stosowanych metod.

3.2. RiskMetrics

Metoda ta została zaproponowana przez analityków z banku JP Morgan. Zauważyli oni, iż najnowsze obserwacje w większym stopniu wpływają na przyszłe wartości ryzyka, niż te pochodzące z bardziej odległych okresów. W celu modelowania tego typu zjawiska zaczęli oni wykorzystywać metodę wyrównywania wykładniczego dla wariancji (EWMA), zapisywaną formalnie w następujący sposób:

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \lambda\sigma_t^2 + (1-\lambda)\sigma_t^2, \tag{8}$$

λ – parametr modelu $(0 < \lambda < 1)$,
σ^2– wariancja,
t – okres.

Analiza danych, dotyczących spółek giełdowych notowanych na giełdzie w Nowym Jorku, wykazała, iż dla dziennych stóp zwrotu najlepsze wyniki uzyskuje się dzięki zastosowaniu parametru **λ=0,94,** wykorzystując do tego celu dane z dwudziestu pięciu dni poprzedzających okres prognozy. W pracy Fiszedera [2009] zaproponowano odmienne podejście. Wartość parametru została wyznaczona symulacyjnie na podstawie danych z próby, w celu minimalizacji pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE). Obliczeń symulacyjnych można dokonać dzięki przedstawieniu modelu RiskMetrics jako IGARCH(1,1) bez dryfu. W takim przypadku wartość parametru **λ** może zostać oszacowana wraz z resztą parametrów modelu za pomocą metody największej wiarygodności. Podczas stosowania tej miary warto mieć jednak na uwadze to, iż badania przeprowadzone na polskim rynku kapitałowym w pracy Fiszedera [2009] dowodzą, iż miara ta systematycznie nie doszacowuje ryzyka.

3.3. Modele GARCH

Obecnie modele klasy GARCH są najczęściej stosowanymi modelami, służącymi do modelowania i prognozowania zmienności stóp zwrotu instrumentów finansowych. Ich niezwykła popularność przede wszystkim wynika z możliwości modelowania najczęściej spotykanych właściwości stóp zwrotu instrumentów finansowych, tj.: grubych ogonów, leptokurtyczności, grupowania zmienności, powrotu do średniej, asymetrycznego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję oraz długoterminowej zależności danych. W praktycznych badaniach finansowych szeregów czasowych najczęściej wykorzystuje się modele GARCH(1,1), rzadziej GARCH(1,2) lub GARCH(2,1). Popularne jest również łączenie modeli zmienności z modelami autoregresyjnymi, tworząc w ten sposób modele zagnieżdżone typu AR-GARCH. W pracy Piontek [2004] została także postawiona teza, iż modele AR są w tym przypadku znacznie częściej wykorzystywane i bardziej intuicyjne, niż ARMA, ARIMA czy ARFIMA[1].

[1] Obszerny opis poszczególnych modeli klasy GARCH można znaleźć w pracach: [Doman, Doman, 2004; Tsay, 2005; Osińska, 2006; Fiszeder, 2009; Francq, Zakoïan, 2010; Andersen i in. 2009; Gouriéroux, 1997; Ardia, 2008; Asteriou, Hall, 2006; Mayers, 2009]. Przykłady wykorzystania modeli GARCH w analizie ryzyka

W pracy badawczej wykorzystano poniższe specyfikacje modeli GARCH.

1. GARCH(P, Q):

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i.}^2 \quad (9)$$

Zaproponowany w 1986 roku przez Bollersleva [1986] model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej wciąż cieszy się ogromną popularnością w modelowaniu zmienności instrumentów finansowych. Głównymi zaletami przemawiającymi na korzyść stosowania modelu GARCH są: jego skuteczność w prognozowaniu zmienności, łatwa rozszerzalność oraz możliwość opisu za jego pomocą najczęściej spotykanych właściwości instrumentów finansowych. Natomiast najpoważniejszym zarzutem są słabe podstawy teoretyczne wyjaśniające zmienność warunkowych stóp zwrotu. Jednocześnie przytacza się argumenty, iż modele te jedynie opisują zmienność szeregów czasowych, nie wyjaśniając przyczyn owej zmienności.

2. EGARCH(P, Q):

$$lnh_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j lnh_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \{\theta z_{t-i} + \gamma[|z_{t-i}| - E(|z_{t-i}|)]\}, \quad (10)$$

gdzie:

α_0, θ – stałe,

$y_1 \equiv 1,$

$E(|z_{t-i}|) = \sqrt{2/\pi}$ – dla rozkładu normalnego [Fiszeder, 2009, s. 27].

Model ten jest rozszerzeniem standardowego modelu GARCH. Jego zastosowanie umożliwia modelowanie odmiennego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję (asymetrii informacji). Dodatkową zaletą, wynikającą z przyjęcia logarytmicznej postaci wariancji warunkowej, jest również brak konieczności nakładania ograniczeń na parametry modelu w celu zapewnienia dodatnich wartości wariancji warunkowej, co znacznie ułatwia estymację modelu. Wprowadzenie zmiennej standaryzowanej $\boldsymbol{z_t}$ w miejsce powszechnie stosowanej $\boldsymbol{\epsilon_t}$ pozwala w dodatkowy sposób ograniczyć wpływ wartości nietypowych na wariancję warunkową modelu.

3. GJR-GARCH(P, Q):

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \omega_i I_{t-i} \epsilon_{t-i.}^2 \quad (11)$$

Model ten, analogicznie jak EGARCH, służy modelowaniu efektu dźwigni (asymetrii informacji). Zasadniczą jego zaletą jest natomiast znacznie mniej skomplikowana postać wzorów na bezwarunkową wartość oczekiwaną wariancji procesu.

na rynkach światowych są dostępne w pracach: [Lama i in. 2015; Wang, Chung, Guo, 2012; Deacle, Eylasiani, 2014; Furió, Climent, 2013; Smolović, Lipovina-Božović, Vujošević, 2017; Zhu, Galbraith, 2011; Arcia, Hoogerheide, 2014].

4. APARCH(P, Q):

$$h_t{}^{\delta} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j(|\epsilon_{t-i}| + \omega_i\epsilon_{t-i})^{\delta} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_{t-i}^{\delta}, \quad (12)$$

gdzie:

ω – dodatnia liczba naturalna (dla $\omega = 0$ model redukuje się do EGARCH).

W empirycznych badaniach finansowych zdarza się, iż wartości bezwzględne stóp zwrotu są ze sobą silniej skorelowane niż ich kwadraty. Właściwość tę można wykorzystać dzięki zastosowaniu Asymetric Power GARCH, który umożliwia jednoczesne modelowanie skośności.

W pracy badawczej wszystkie przedstawione powyżej specyfikacje modeli były rozważane z następującymi rozkładami warunkowymi stóp zwrotu:

1. normalny,
2. t-Studenta,
3. skośny t-Studenta,
4. uogólniony rozkład błędu,
5. uogólniony rozkład hiperboliczny,
6. Johnsona,
7. odwrotny rozkład gaussowski.

Jednocześnie warto w tym momencie zauważyć, że wyniki analiz VaR z wykorzystaniem modeli GARCH, przedstawione w pracy Fiszedera [2009, s. 250], wskazują, że specyfikacja rozkładu warunkowego w żaden sposób nie wpływa na wyniki otrzymywanych prognoz. Fakt ten nie jest jednak zgodny z badaniami przeprowadzonymi w pracy Piontek [2002], w której dowiedziono, iż w przypadku gdy VaR jest równy 0,05, rozkład normalny sprawdza się doskonale. Natomiast zastosowanie rozkładów o grubszych ogonach (t-Studenta) może skutkować niedoszacowaniem ryzyka i zwiększoną liczbą przekroczeń ustalonego poziomu ryzyka. Sytuacja ta ulega odwróceniu przy mniejszym poziomie istotności równym 0,01.

4. Analiza empiryczna

W części badawczej pracy przeanalizowano dane dotyczące wszystkich spółek akcyjnych notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Z podstawowego zbioru usunięto instrumenty, które nie zachowały ciągłości notowań w okresie od 1 stycznia 2000 roku do 1 stycznia 2015 roku. Z analizy wyłączono również 30% najmniej płynnych spółek i walory spekulacyjne, których cena w analizowanym okresie spadła poniżej kwoty 1 zł. Dla tak dobranego zbioru danych według wzoru (13) wyznaczono logarytmiczne stopy zwrotu, które następnie poddano badaniu na obecność heteroskedastyczności:

$$r_t = lnP_t - lnP_{t-1}, \quad (13)$$

gdzie:

r_t – stopa zwrotu instrumentu w chwili t,

P_t – cena instrumentu w chwili t.

Analizy efektu ARCH dokonano wykorzystując zaproponowane w pracy Doman i Doman [2009] testy Engle'a [1982] oraz Mcleoda-Li [1983], przyjmując opóźnienia na poziomie 4% długości badanego szeregu finansowego. Dodatkowo, ze względu na wielokrotne posługiwanie się tymi testami statystycznymi, zastosowano poprawkę Bonferroniego [Bonferroni, 1936]. Wyniki obydwu testów potwierdziły istnienie 36 spółek giełdowych, których szeregi logarytmicznych stóp zwrotu w analizowanym okresie charakteryzowały się występowaniem efektu ARCH przy poziomie istotności wynoszącym 0,01. W rezultacie otrzymano zbiór wymienionych poniżej spółek giełdowych, których analizy dokonano w dalszej części pracy, a mianowicie: Agora, Amica, Ulma, Bank Handlowy, Mbank, Budimex, Sygnity, Dębica, Efekt, Elbudowa, CNT, Forte, Hydrotor, Indykpol, INstalKrak, Groclin, Kęty, KGHM, Kompap, ALMA, Pelion, Mostostal Płock, Mostostal Warszawa, Muza, Novita, Orbis, Pekao, PKN Orlen, Polnord, Prochem, Projprzem, REMAK, Ropczyce, Stalprodukt, WAWEL i WISTIL.

4.1. Metodologia

Właściwe analizy rozpoczęto od skrócenia szeregu czasowego. Modele GARCH, zastosowane do poprawnej estymacji parametrów, wymagają długich szeregów. Posługując się wynikami badań Ng i Lam [2006], minimalna długość szeregu czasowego dla modelu GARCH powinna być nie mniejsza niż 1 000 obserwacji. Logarytmiczne stopy zwrotu zawarte w przedziale czasowym od 1 stycznia 2000 roku do 1 grudnia 2004 roku zostały więc wykorzystane jako zbiór treningowy dla estymowanych modeli. Właściwe analizy, dotyczące ryzyka finansowego, zostały przeprowadzone jedynie dla okresu od 1 stycznia 2005 roku do 1 stycznia 2015 roku. Estymacji ryzyka dokonano za pomocą poniższych metod.

1. Metoda symulacji historycznej

   Dla pierwszego dnia każdego miesiąca w analizowanym okresie został wyznaczony dolny 5%-owy kwantyl rozkładu stóp zwrotu. Następnie dla pozostałych dni każdego miesiąca (od 27 do 30) wyznaczano prognozy dzienne, wykorzystując regułę pierwiastka kwadratowego.
2. RiskMetrics

   Prognoz przyszłych wartości ryzyka tą metodą dokonano dzięki budowie dwóch typów modeli. Pierwszy z nich polegał na budowie modelu IGARCH z parametrem $\lambda = 0{,}94$ i warunkowym rozkładem normalnym. W drugim natomiast wykorzystano metodę największej wiarygodności do estymacji wszystkich parametrów modelu IGARCH(P,Q) z rozkładami warunkowymi przytoczonymi w rozdziale 3. Prognozy ryzyka skonstruowano analogicznie jak w przypadku metody symulacji historycznej. Dla pierwszego dnia każdego roku został oszacowany model z optymalnymi parametrami (P,Q). Następnie modele te zostały wykorzystane, by każdego miesiąca (uwzględniając najnowsze dane historyczne) stworzyć 27-30 (w zależności od miesiąca) dziennych prognoz. Wszystkie prognozy ryzyka zostały skonstruowane na podstawie metody bootstrap zaprezentowanej w pracach Pascuala i innych [2006] i Shimizu

[2010]. W modelach, w których były szacowane wszystkie parametry modelu, zastosowano identyczne procedury selekcji i testowania jak w przypadku opisanych poniżej modeli AR-GARCH.

3. AR-GARCH

Szacowanie modeli AR-GARCH rozpoczęto od wyznaczenia parametru AR dla każdej analizowanej spółki giełdowej na pierwszy dzień każdego roku kalendarzowego w analizowanym okresie. Ze względu na niejednoznaczność wyników funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej procedura ta została wykonana dzięki budowie modeli autoregresyjnych z uwzględnieniem metody największej wiarygodności. Stosując kryterium informacyjne AIC, wybrano model najlepiej opisujący zachowanie stóp zwrotu, a parametrem AR posłużono się podczas estymacji łącznej modelu zagnieżdżonego AR-GARCH. Wykorzystując oszacowany uprzednio stopień autokorelacji szeregu czasowego, dokonano estymacji modeli AR-GARCH metodą największej wiarygodności. Modele te były konstruowane według następującego schematu: dla każdej z trzydziestu sześciu analizowanych spółek oraz dla każdego z jedenastu analizowanych lat stworzono cztery warianty modeli AR-GARCH. Modele te przedstawiono we wzorach: (9), (10), (11), (12). Każdy z tych wariantów został również oszacowany w szesnastu wersjach z parametrami $P<4$ i $Q<4$ oraz siedmioma, przedstawionymi w rozdziale trzecim, warunkowymi rozkładami stóp zwrotu. Oznacza to, iż dla każdej z trzydziestu sześciu spółek stworzono 4 982 modeli. Kolejnym etapem analizy była redukcja zmiennych statystycznie nieistotnych. Wykorzystano w tym celu test Nybloma [1989] na stabilność parametrów modelu, zaproponowany przez Doman i Doman [2004]. Przyjmując poziom istotności równy 0,05, dokonano usunięcia zmiennych statystycznie nieistotnych w każdym ze 177 408 modeli. W przypadku gdy dalsza redukcja zmiennych nie była już możliwa, a model wciąż zawierał zmienne statystycznie nieistotne, zostawał on usunięty z puli wariantów akceptowalnych dla dalszych analiz. Następne kryterium selekcji stanowił test Kupca [1995], który jest bezpośrednio związany z przytaczanymi w niniejszej pracy miarami ryzyka. Na ostatnim etapie selekcji zastosowano kryterium informacyjne BIC. Jeśli i to kryterium okazało się nierozstrzygające, preferowano modele prostsze (typu GARCH) wobec bardziej złożonych alternatyw.

Oszacowany, na początku każdego roku, optymalny model AR-GARCH następnie wykorzystano pierwszego dnia każdego kolejnego miesiąca w danym roku (uwzględniając dane historyczne z poprzednich miesięcy), w celu skonstruowania 27-30 (w zależności od miesiąca) dziennych prognoz. Skonstruowane i wyselekcjonowane w ten sposób modele charakteryzowały się sporą stabilnością. Ich specyfikacje na przestrzeni lat zmieniały się tylko w niewielkim stopniu. Świadczy to tak o dobrym doborze modeli wyjściowych, jak i ich stabilności, która może przekładać się na wyniki otrzymywanych prognoz. Analogicznie jak w przypadku modeli IGARCH stosowanych w metodologii RiskMetrics, do konstrukcji prognoz wykorzystano metody bootstrap.

Wyniki tych analiz zobrazowano poniżej. W tabeli 1. i 2. zaprezentowano wyniki dotyczące liczby otrzymanych (po procesie selekcji) modeli z podziałem zarówno na typ skonstruowanego modelu, jak i wykorzystywany, warunkowy rozkład prawdopodobieństwa.

TABELA 1.

Liczba oszacowanych modeli GARCH z uwzględnieniem ich typu

Model	GARCH	EGARCH	GJR-GARCH	APARCH
Liczba	284	16	11	10

Źródło: opracowanie własne.

Analiza frakcji wystąpień poszczególnych typów modeli wykazała, iż najczęściej stosowany w badaniach empirycznych model GARCH zdecydowanie zdominował pozostałe modele.

TABELA 2.

Liczba oszacowanych modeli GARCH z uwzględnieniem rozkładu warunkowego

Rozkład	Norm	NIG	GED	t-Stud	Jsu	Ghyp	s t-Stud
Liczba	150	64	49	24	19	9	6,

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku analizy frakcji liczebności poszczególnych modeli w przeprowadzonym badaniu, z uwagi na typ warunkowego rozkładu prawdopodobieństwa, wyniki są znacznie bardziej zróżnicowane. Zaskoczeniem może być fakt, iż w przypadku analizy instrumentów finansowych, w których niejednokrotnie założenie o normalności nie jest spełnione, rozkładem najczęściej występującym w badaniu był właśnie rozkład normalny. Popularność drugiego pod względem popularności rozkładu można natomiast wyjaśnić zwiększoną liczbą jego parametrów, co w rezultacie umożliwiło lepsze dopasowanie do danych empirycznych.

Uśrednione dla wszystkich analizowanych spółek wyniki rocznego poziomu przekroczeń, ryzyka i pierwiastka błędu średniokwadratowego dla przyjętych miar ryzyka zamieszczono w tabelach: 3.-5.

TABELA 3.

Analiza metod estymacji Value at Risk

Metoda estymacji	**Symulacja historyczna**	**RiskMetrics $\lambda = 0.94$**	**RiskMetrics -IGARCH**	**AR-GARCH**
Średnia liczba przekroczeń w roku	1,41	13,47	12,14	9,89
Ryzyko	-13,31%	-4,27%	-4,38%	-4,06%
RMSE	0,1461	0,0503	0,0503	0,0430

Źródło: opracowanie własne.

Analiza metod estymacji ryzyka na podstawie $VaR_{5\%}$ wykazała, iż najmniejszą liczbę przekroczeń (średnio 1,41 przekroczenia poziomu ryzyka rocznie na spółkę) zanotowano w odniesieniu do estymacji metodą historyczną. Głównym powodem takiego stanu rzeczy jest jednak znacznie przeszacowany średni poziom ryzyka oraz słaba jakość dopasowania otrzymanych prognoz w stosunku do rzeczywistego poziomu zmienności. W przypadku metod RiskMetrics obserwowana jakość dopasowania była identyczna. W metodzie, w której parametr λ był wyznaczany metodą największej wiarygodności, zaobserwowano zmniejszoną liczbę przekroczeń przy przyjętym poziomie VaR. Wynik ten jest zgodny z analizą porównawczą tych dwóch metod przeprowadzoną przez Fiszedera [2009], w której to również symulacyjne wyznaczanie parametru skutkowało lepszą jakością oceny ryzyka. Najlepsze wyniki otrzymano dzięki zastosowaniu modeli GARCH. Znamienny jest tutaj fakt, iż spadek liczby przekroczeń w żaden sposób nie był spowodowany wzrostem oszacowanego poziomu ryzyka, które w tym przypadku był na najniższym poziomie. Analiza porównawcza jakości dopasowania otrzymanych prognoz do rzeczywistego poziomu ryzyka także umożliwia uznanie metody estymacji wartości zagrożonej z wykorzystaniem modeli GARCH za najlepszą.

TABELA 4.

Analiza metod estymacji Expected Shortfall

Metoda estymacji	**Symulacja historyczna**	**RiskMetrics $\lambda = 0.94$**	**RiskMetrics -IGARCH**	**AR-GARCH**
Średnia liczba przekroczeń w roku	0,38	7,76	6,47	3,96
Ryzyko	-20,81%	-5,36%	-5,50%	-5,05%
RMSE	0,2300	0,0625	0,0625	0,0524

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku analizy ryzyka z wykorzystaniem Expected Shortfall, jako miary ryzyka, sytuacja wygląda analogicznie jak dla VaR. Zarówno jakość dopasowania, jak i liczba przekroczeń sugeruje wykorzystanie metody GARCH jako optymalnej metody estymacji poziomu ryzyka rynkowego. Warto również zauważyć, iż w modelach GARCH, przy wzroście ryzyka średniorocznego o 1 punkt procentowy w stosunku do VaR, zanotowano spadek liczby przekroczeń przyjętego poziomu o połowę. Wśród pozostałych metod estymacji zaobserwowano podobną tendencję, co może przemawiać za lepszymi właściwościami Expected Shortfall jako miary ryzyka. W przypadku RiskMetrics z estymowanym parametrem λ był widoczny spadek liczby przekroczeń (średnio o jedno przekroczenie rocznie), przy nieznacznie zwiększonym poziomie ryzyka.

TABELA 5.

Analiza metod estymacji Median Shortfall

Metoda estymacji	**Symulacja historyczna**	**RiskMetrics $\lambda = 0.94$**	**RiskMetrics - IGARCH**	**AR-GARCH**
Przekroczenia	0,61	8,91	7,55	5,1
Ryzyko	-17,94%	-5,09%	-5,22%	-4,81%
RMSE	0,1975	0,0595	0,0596	0,0501

Źródło: opracowanie własne.

Jednocześnie w odniesieniu do Median Shortfall stwierdzono znaczący spadek liczby przekroczeń w porównaniu z Value at Risk. Jednakże spadek ten nie był tak drastyczny, jak w stosunku do ES. Zanotowano również lepsze dopasowanie prognoz do danych empirycznych wraz z jednoczesnym zmniejszeniem wartości prognozowanego ryzyka. Fakt ten może przemawiać za zmniejszonym błędem szacunku ryzyka i dokładniejszymi prognozami.

Zarówno ES, jak i MS wypadły w tym badaniu zdecydowanie lepiej niż VaR. Różnice pomiędzy tymi dwiema miarami, choć wciąż zauważalnie, nie były już tak drastyczne. Mniejszy poziom ryzyka i lepsze dopasowanie prognoz do empirycznych szeregów czasowych w przypadku MS były efektem konstrukcji tej miary. Ze względu na zastosowanie mediany, miara ta była bardziej odporna na pojawienie się wartości odstających. Powodowało to, iż wszystkie jej odchylenia od średniej (równej 0) były słabsze niż w odniesieniu do Expected Shortfall. Z tą samą przyczyną dotyczącą ES wiązała się mniejsza liczba przekroczeń przyjętego poziomu ryzyka w porównaniu z MS. Obecna w finansowych szeregach czasowych ujemna autokorelacja pierwszego stopnia sprawia, iż bardziej prawdopodobne jest wystąpienie po sobie dwóch stóp zwrotu z odmiennymi znakami, niż kolejnych dwóch wzrostów/spadków. W przypadku stóp zwrotu akcji spółek giełdowych zdarzenia ekstremalne i wartości odstające są dość powszechnym zjawiskiem. Potencjalny inwestor będzie starał się uchronić przed prawdopodobną serią dwóch lub trzech przekroczeń poziomu ryzyka z rzędu, które to zostałyby prędzej wychwycone przez ES. Z tego właśnie powodu wybór ES może być bardziej zasadny dla inwestora z wysoką awersją do ryzyka.

Z racji specyfikacji przyjętej w metodologii estymacji ryzyka z wykorzystaniem modeli GARCH zweryfikowano również istnienie lub brak zależności między liczbą miesięcy, która upłynęła od wyboru optymalnej specyfikacji zastosowanego modelu (1 stycznia każdego roku), a wartością ryzyka mierzonego zaprezentowanymi w pracy miarami. Wyniki przeprowadzonych analiz zamieszczono w tabelach: 6. i 7.

TABELA 6.

Analiza średniego poziomu ryzyka w poszczególnych miesiącach roku

	Ryzyko		
Miesiąc	**VaR**	**ES**	**MS**
Styczeń	-4,06%	-5,06%	-4,83%
Luty	-4,06%	-5,06%	-4,81%
Marzec	-4,00%	-5,09%	-4,81%
Kwiecień	-3,98%	-5,03%	-4,82%
Maj	-3,98%	-4,92%	-4,68%
Czerwiec	-4,02%	-5,00%	-4,80%
Lipiec	-4,01%	-5,04%	-4,80%
Sierpień	-4,07%	-5,08%	-4,81%
Wrzesień	-4,20%	-5,12%	-4,87%
Październik	-4,14%	-5,16%	-4,93%
Listopad	-4,01%	-5,05%	-4,82%
Grudzień	-4,04%	-5,05%	-4,82%

Źródło: opracowanie własne.

Wykorzystując test korelacji liniowej Pearsona z 1895, dokonano analizy korelacji między liczbą miesięcy, które upłynęły od momentu oszacowania optymalnego modelu GARCH (styczeń), a wartością ryzyka w kolejnych miesiącach otrzymaną dla każdej z trzech zastosowanych miar. Uzyskane wyniki świadczą o braku statystycznie istotnej korelacji między liczbą miesięcy a otrzymanymi poziomami ryzyka.

Dla średniego poziomu liczby przekroczeń również zweryfikowano hipotezę o występowaniu korelacji linowej. Jedynie w przypadku miary VaR otrzymany wynik sugerował występowanie jednostronnej korelacji liniowej $(\rho = 0{,}41, p = 0{,}09)$. Jednakże, ze względu na małą liczbę obserwacji w przeprowadzonym teście, badanie to powtórzono z wykorzystaniem permutacyjnego testu korelacji Pearsona. Uzyskany w ten sposób wynik $(\rho = 0{,}29, p = 0{,}177)$ sugeruje także i w tym przypadku brak statystycznie istotnej korelacji liniowej.

TABELA 7.
Analiza średniego poziomu przekroczeń w poszczególnych miesiącach roku

	Ryzyko		
Miesiąc	**VaR**	**ES**	**MS**
Styczeń	8	3	4
Luty	7	3	4
Marzec	9	3	5
Kwiecień	7	3	3
Maj	10	4	5
Czerwiec	8	3	4
Lipiec	11	4	6
Sierpień	13	6	6
Wrzesień	8	3	4
Październik	10	4	5
Listopad	11	4	5
Grudzień	8	3	4

Źródło: opracowanie własne.

5. Podsumowanie

Wyniki przeprowadzonej analizy są zgodne z wynikami badań przeprowadzonych w pracy Piontek [2002]. Najdokładniejsze estymatory ryzyka dla zaprezentowanych miar kwantylowych otrzymano dzięki wykorzystaniu modeli GARCH. Przy szacowaniu miar opartych na $VaR_{5\%}$ do estymowania jest wystarczające (w większości przypadków) wykorzystanie standardowych modeli GARCH z rozkładem Gaussowskim. Tendencja ta zapewne zostanie odwrócona w przypadku bardziej restrykcyjnych poziomów istotności. Dla $VaR_{1\%}$ lub $VaR_{0,1\%}$ zastosowanie rozkładów o grubszych od normalnego ogonach może prowadzić do lepszej jakości prognoz. Spośród wszystkich przeanalizowanych miar ryzyka VaR okazał się najmniej skuteczną miarą. Pozostałe dwie miary cechowały się podobnymi charakterystykami. Ze względu na szybsze dostosowywanie się ES do aktualnej sytuacji rynkowej możliwe jest utrzymanie z większym prawdopodobieństwem wyznaczonego poziomu ryzyka. Wiąże się to oczywiście z niewielkim wzorem błędnych szacunków i przyjętego poziomu ryzyka. Jednakże w aspekcie inwestycji finansowych jest to koszt pozwalający zawczasu otrzymać niezbędne informacje o wzroście ryzyka spowodowanym nieoczekiwanymi i ekstremalnymi zmianami cen akcji. Informacja ta, jak również jej wpływ i znaczenie mogłyby w przypadku MS zostać pominięte.

W kwestii skuteczności zaprezentowanych modeli (miar), wykorzystywanych do modelowania (oceny) ryzyka inwestycyjnego, średnią wartość czterech przekroczeń rocznie w przypadku ES należy uznać za bardzo dobry wynik. Szczególnie przy uwzględnieniu, iż horyzontem prognozy było 30 jednodniowych okresów, a sam model był estymowany raz do roku. Stabilność otrzymanych specyfikacji modeli, niewielka liczba przekroczeń przyjętego poziomu ryzyka oraz stabilny jego poziom można uznać za sukces przeprowadzonych badań i pozytywną odpowiedź na pytanie, czy jest możliwe skuteczne prognozowanie, modelowanie i zarządzanie ryzykiem finansowym.

Literatura

Acerbi C., 2002, *Risk Aversion and Coherent Risk Measures: A Spectral Representation* Theorem, "Journal of Banking and Finance", no. 7.

Andersen T. G., Davis R. A., Kreiß J.-P., Mikosch T., 2009, *Handbook of Financial Time Series*, Springer, Berlin.

Ardia D., 2008, *Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications*, Springer, Berlin.

Ardia D., Hoogerheide L. F., 2014, *GARCH models for daily stock returns: Impact of estimation frequency on Value-at-Risk and Expected Shortfall forecasts*, "Economic Letters", vol. 123, iss. 2.

Asteriou D., Hall S., G., 2007, *Applied Econometrics: A modern Approach using EViews and Microfit Revised Edition*, MacMillan, Palgrave.

Basel Committee on Banking Supervision, 1995, *An international model-based approach to market risk capital requirements*, Bank for International Settlements, http://www.bis.org/publ/bcbs17.pdf (data wejścia: 04.07.2017).

Basel Committee on Banking Supervision, 2013, *Consultative Document: Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework,* Bank for International Settlements, http://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf (data wejścia: 04.07.2017).

Best P., 2000, *Wartość narażona na ryzyko: obliczanie i wdrażanie modelu VaR*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.

Bollerslev T., 1986, *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, "Journal of Econometrics", no. 31.

Bonferroni C.E., 1936, *Teoria statistica delle classi a calcolo delle probabilita*, "Pubblicazioni del R Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Firenze".

Deacle S., Elyasiani E., 2014, *Real estate investment by Bank Holding Companies and their risk and return: nonparametric and GARCH procedures*, "Applied Financial Economics", vol. 24, no. 13.

Doman M., Doman R., 2004, *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Doman M., Doman R., 2009, *Modelowanie zmienności i ryzyka: metody ekonometrii finansowej*, Wolters, Kraków.

Engle R. F., 1982, *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of the United Kingdom Inflation*, "Econometrica", no. 50.

Föllmer H., Shied A., 2002, *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*, "Finance Stoch", no. 6(4).

Furió D., Climent F. J., 2013, *Extreme value theory versus traditional GARCH approaches applied to financial data: a comparative evaluation*, "Quantitive Finance", vol. 13, no. 1.

Fritelli M., Rosazza G.E., 2002, *Putting Order in Risk Measures*, "Journal of Banking and Finance", no. 26(7).

Gouriéroux C., 1997, *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, New York.

J.P Morgan/Reuters, 1996, *RiskMetrics – Technical Document*, https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-aee2-3449d5c7e95a (data wejścia: 04.07.2017).

Melle A., Fornari F., 2000, *Stochastic Volatility in Financial Markets: Crossing the bridge to continuous time*, Springer Science + Business Media, miejsce?.

Mayers R., A., 2009, *Complex Systems in Finance and Econometrics*, Springer, New York.

Ng H., Lam K., 2006, *How does Sample Size Affect GARCH Models?*, "Information Sciences 2006", Kaohsiung.

Fiszeder P., 2009, *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.

Francq C., Zakoïan J., 2010, *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, WILEY, Hoboken.

Hossain A., Nasser M., 2011, *Comparison of the finite mixture of ARMA-GARCH, back propagation neural networks and support-vector machines in forecasting financial returns*, "Journal of Applied Statistics", vol. 38, no. 3.

Jajuga K., Jajuga T., 2004, *Inwestycje: instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Kou S., Peng X., Heyde C., 2013, *External Risk Measures and Basel Accords*, "Mathematics of Operations Research", vol. 38, no. 3.

Kupiec P., 1995, *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*, "Journal of Derivatives", no. 2.

Lama A., Jha G. K., Paul R. K., Gurung B., 2015, *Modelling and Forecasting of Price Volatility: An Application of GARCH and EGARCH Models,* "Agricultural Economics Research Review", vol. 28 (no. 1).

McLeod A.I., Li W.K., 1983, *Diagnostic Checking ARMA Time Series Model Using Squared Residual Autocorrelations*, "Journal of Time Series Analysis, no. 4.

Markowitz H., 1952, *Portfolio Selection*, "The Journal of Finance, vol. 7, no. 1.

Nadarajah, S., Zhang, B., & Chan, S., 2014, *Estimation methods for expected shortfall*, "Quantitative Finance, no. 14(2).

Nyblom J., 1989, *Testing for the Constancy of Parameters over Time*, "Journal of the Statistical Society B 54".

Osińska M., 2006*, Ekonometria finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

Pajor A., 2003, *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.

Pajor A., 2010, *Wielowymiarowe procesy wariancji stochastycznej w ekonometrii finansowej,* Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.

Pascual L., Romo J., Ruiz E., 2006, *Bootstrap prediction for returns and volatilities in GARCH models*, "Computational Statistics and Data Analysis", vol. 50, no. 9.

Piontek K., 2001, *Heteroskedastyczność rozkładu stop zwrotu a koncepcja pomiaru ryzyka metodą VaR*, „Modelowanie preferencji a ryzyko", Ustroń.

Piontek K., 2002, *Pomiar ryzyka metodą VaR a modele AR-GARCH ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie z „grubymi ogonami*, „Materiały Konferencyjne Uniwersytetu Szczecińskiego część II", Międzyzdroje.

Piontek K., 2004, *Zastosowanie modeli klasy ARCH do opisu własności szeregu stóp zwrotu indeksu WIG*, "Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 1021", Wrocław.

Shimizu K., 2010, *Bootstrapping Stationary ARMA-GARCH Models*, "Vieweg+Teubner", Wiesbaden.

Smolović J.C., Lipovina-Božović, M., Vujošević S., 2017, *GARCH models in value at risk estimation: empirical evidence from the Montenegrin stock exchange*, "Economic Research-Ekonomska Istraživanja".

Szegö G., 2002, *Measures of risk*, "Journal of Banking & finance 26", Italy.

Taylor S.J., 1986, *Modelling financial time series*, Chichester, New York.

Trzpiot G., 2004, *O wybranych własnościach miar ryzyka*, „Badania Operacyjne i Decyzje, nr 3-4, Katowice.

Trzpiot G., 2012, *O własnościach transformujących miar ryzyka*, „Analiza Szeregów Czasowych a Statystyczny Pomiar Ryzyka", Zeszyty Naukowe Wydziałowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice.

Trzpiot G., 2014, *Optymalizacja portfela z wykorzystaniem koherentnych transformujących miar ryzyka*, „Studia Ekonomiczne", nr 208.

Tsay R., 2005, *Analysis of Financial Time Series*, Willey, Hoboken.

Wang S.S., 2002, *A Risk a Measure that Goes beyond Coherence*, "Actuarial Approach to Financial Risks", Colloquium.

Wang Y.-J., Chung H., Guo J.-H., 2012, *A value-at-risk analysis of carry trades using skew-GARCH models*, "Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics", vol. 17, no. 4.

Zhu D., Galbraith J. W., 2011, *Modelling and forecasting expected shortfall with the generalized asymmetric Student-t and symmetric exponential power distributions*, "Journal of Empirical Finance", vol. 18, Issue 4.