

dr Dariusz KACPRZAK

Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka

e-mail: d.kacprzak@pb.edu.pl

DOI: 10.15290/ose.2017.03.87.08

ZASTOSOWANIE SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH W MODELU RÓWNOWAGI RYNKOWEJ¹

Streszczenie

W pracy rozważono liniowy model równowagi rynkowej, w którym parametry są liczbami rzeczywistymi. W modelu tym zakłada się, że popyt i podaż zależą tylko od ceny, a czynniki pozacenowe są niezmiennie. Jednak, by uzyskać bardziej realistyczny model, można uwzględnić wpływ czynników pozacenowych na popyt i podaż. W ten sposób otrzyma się model z rozmytymi parametrami, które mogą być reprezentowane za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Aby wyznaczyć rozmytą równowagę rynkową tego modelu, należy rozwiązać rozmyty, liniowy układ równań.

Słowa kluczowe: podaż, popyt, równowaga rynkowa, skierowane liczby rozmyte

APPLICATION OF ORDERED FUZZY NUMBERS TO MODELING OF MARKET EQUILIBRIUM

Summary

The paper considers a linear model of market equilibrium in which real numbers are taken as parameters. In the model, it is assumed that demand and supply depend only on price, while other (non-price related) determinants do not change. However, to get a more realistic model, the author takes into account the impact of other (non-price related) determinants on demand and supply. In this way, a model with fuzzy parameters is obtained, which can be represented by means of ordered fuzzy numbers. In order to determine the fuzzy market equilibrium of such a model, a fuzzy linear system of equations must be solved.

Key words: demand, supply, market equilibrium, ordered fuzzy numbers

JEL: C02, C20, C65

¹ Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WI/1/2016 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

1. Wstęp

W pracy przedstawiono matematyczny model sytuacji ekonomicznej, nazywanej równowagą rynkową. Jest to taki stan gospodarki, w którym popyt na dobra i usługi jest równoważony podażą tych dóbr i usług. Chcąc zapewnić przejrzystość i prostotę modelu (częściowej) równowagi, często przyjmuje się, że funkcje popytu i podaży są liniowe o rzeczywistych parametrach oraz korzysta się z klauzuli *ceteris paribus*, która zakłada niezmiennosc determinantów pozacenowych. Jednak, aby model był bliższy rzeczywistości obrazowi rynku, można uwzględnić wpływ czynników pozacenowych na parametry funkcji popytu i podaży. W ten sposób osiąga się model równowagi o parametrach rozmytych.

Celem pracy jest prezentacja modelu skierowanych liczb rozmytych w aspekcie możliwości zastosowania go w modelowaniu ekonomicznym. Wykorzystano go w modelu równowagi częściowej, w którym parametry przedstawiono za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Działania arytmetyczne na tych liczbach są zbliżone do działań na liczbach rzeczywistych. Dodatkowo, istnienie elementów przeciwnych względem dodawania i odwrotnych względem mnożenia pozwala na rozwiązywanie układów równań liniowych o rozmytych współczynnikach.

W literaturze można znaleźć szereg prac, które stosują model skierowanych liczb rozmytych w modelach ekonomicznych. Modelem tym posłużono się m.in.: do prezentacji przychodu i kosztu [Kosiński i in. 2009; Kacprzak, 2010; 2012a], w modelu Leontiewa [Kacprzak, 2008; 2010; 2017], do prezentacji cen akcji [Kacprzak, 2012b; Kacprzak i in. 2013; Marszałek, Burczyński, 2013], do prezentacji cen i dynamiki ich zmian [Kacprzak, 2014] czy do ustalania ekonomicznej wielkości dostawy [Kacprzak, Kosiński, 2014; Sobol i in. 2015]. Ważnym zastosowaniem modelu skierowanych liczb rozmytych jest użycie go w wielokryterialnych metodach wspomagana decyzji. Badania w tym zakresie zostały zapoczątkowane przez Roszkowską i Kacprzaka [Roszkowska, Kacprzak, 2016; Kacprzak, 2017], następnie wykorzystane do rozwiązywania praktycznego problemu sterowania linią produkcyjną [Rudnik, Kacprzak, 2017]. Wspomniane wyżej zastosowania korzystają ze skierowania jako dodatkowej informacji oraz arytmetykę zbliżoną do arytmetyki liczb rzeczywistych, czego nie posiadały wcześniejsze modele liczb rozmytych.

Artykuł składa się z siedmiu części. W drugiej krótko zaprezentowano liniowy model równowagi rynkowej o parametrach rzeczywistych, w następnej przedstawiono argumenty przemawiające za zastąpieniem w tym modelu parametrów rzeczywistych liczbami rozmytymi. Część czwartą i piątą poświęcono prezentacji modelu skierowanych liczb rozmytych i użyciu tych liczb jako parametrów modelu równowagi. Ostatnią część stanowi przykład numeryczny i podsumowanie.

2. Liniowy model równowagi rynkowej

Popyt na dobro to przypadająca na jednostkę czasu wielkość zapotrzebowania odpowiadająca różnym cenom tego dobra. Zależy on od wielu zmiennych, z których podstawową (wynikającą z określenia) jest cena. Do pozacenowych determinantów popytu można zaliczyć:

- dochody nabywców,

- ceny dóbr komplementarnych i substytucyjnych,
- oczekiwania dotyczące sytuacji rynkowej,
- gusty i preferencje nabywców,
- przewidywane zmiany cen dobra,
- zmiany liczby i struktury ludności [Milewski, Kwiatkowski, 2005, s. 46].

Z kolei, podaż dobra to ilość dobra w jednostce czasu oferowana na rynku przy różnych wysokościach ceny. Podobnie jak w przypadku popytu, podaż jest również funkcją wielu zmiennych, z których główną jest także cena. Natomiast do pozacenowych determinantów podaży można zaliczyć:

- koszty wytwarzania,
- rentowność produkcji dóbr substytucyjnych,
- przewidywane zmiany cen dobra,
- wypadki losowe i czynniki naturalne (przy pewnych rodzajach produkcji) [Milewski, Kwiatkowski, 2005, s. 51].

W ekonomii powszechnie korzysta się z klauzuli *ceteris paribus*. Pozwala ona badać np. zależność między popytem a ceną oraz podażą a ceną, jak również równowagę rynkową, zakładając, że czynniki pozacenowe nie ulegają zmianie. W pozycjach poświęconych ekonomii matematycznej wspomniany model równowagi rynkowej często jest przedstawiany za pomocą funkcji liniowych, tzw. model liniowy [Chaing, 1994, s. 48; Gawinecki, 2000, s. 88]. Zaletą takiego podejścia jest niewątpliwie przejrzystość i prostota.

W celu zaprezentowania liniowego modelu równowagi rynkowej, zakłada się, że na rynku (wyizolowanym) znajduje się tylko jedno dobro konsumpcyjne. Oznacza to, że w modelu równowagi wystarczy uwzględnić trzy zmienne, tj.:

- P – cenę dobra,
- Q_d – wielkość popytu na dobro,
- Q_s – wielkość podaży dobra.

Ponadto, zakłada się, opierając się na obserwacji rynku, że popyt jest malejącą liniową funkcją ceny, tzn. ma postać (rysunek 1.)²:

$$Q_d = a - bP, \quad (1)$$

natomiast podaż jest rosnącą liniową funkcją ceny, tzn. ma postać (rysunek 1.):

$$Q_s = -c + dP, \quad (2)$$

gdzie parametry $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$. Dodatkowo przyjmuje się, że podaż nie występuje do chwili, kiedy cena nie przekroczy określonego dodatniego poziomu (z równania (2) wynika, że jest on równy c/d). Równowaga na modelowanym rynku zachodzi wówczas, gdy:

$$Q_d = Q_s. \quad (3)$$

Biorąc pod uwagę równania (1)-(3), równowaga rynkowa jest osiągnięta, gdy cena ma wartość:

² Na rysunku 1. oznaczenia osi nie są zgodne z konwencją matematyczną, tzn. oś pozioma oznacza cenę, a oś pionowa opisuje wielkość popytu i podaż, ponieważ zastosowano konwencję przyjętą w podręcznikach do ekonomii. Pozostałe rysunki również utrzymano w tej konwencji.

$$\bar{P} = \frac{a+c}{b+d}, \quad (4)$$

a odpowiadająca jej wielkość równowagi \bar{Q} ($\bar{Q} = Q_d = Q_s$) wynosi:

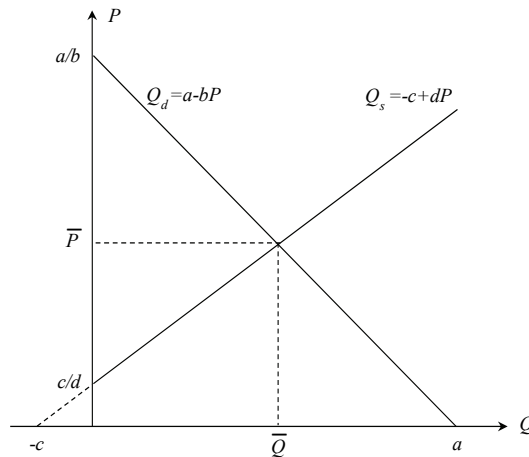
$$\bar{Q} = \frac{ad-bc}{b+d}. \quad (5)$$

Z (5) wynika, że aby $\bar{Q} > 0$ (punkt przecięcia musi znajdować się powyżej osi poziomej) parametry funkcji liniowych (1) i (2) muszą spełniać warunek:

$$ad > bc. \quad (6)$$

RYSUNEK 1.

Ilustracja graficzna liniowej funkcji popytu (1), liniowej funkcji podaży (2) oraz równowagi rynkowej



Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Chiang, 1994, s. 49].

3. Liniowy model równowagi rynkowej o rozmytych parametrach

W uproszczonym liniowym modelu równowagi rynkowej (1)-(3) założono, że jego parametry, tzn. a , b , c i d są rzeczywistymi liczbami dodatnimi. Jednak zwrócono uwagę na to, że aby model równowagi rynkowej był bliższy rzeczywistości, a jednocześnie dalej pozostał przejrzysty i prosty, te parametry mogą być opisane za pomocą liczb rozmytych, co wynika z kilku obserwacji rynku.

1. Istnienie czynników pozacenowych.

Na rzeczywistym rynku, jak wspomniano w części 1., popyt zależy od różnych czynników pozacenowych. Zmiana któregoś z nich powoduje przesunięcie funkcji popytu. W przypadku liniowej funkcji popytu znajduje to odzwierciedlenie w zmianie wartości wyrazu wolnego, czyli elementu a w liniowej funkcji popytu (1).

2. Elastyczność cenowa funkcji popytu.

Elastyczność cenowa popytu mierzy procentową (względna) zmianę zapotrzebowania w reakcji na procentową (względna) zmianę ceny. Do czynników wpływających na jej wielkość można zaliczyć m.in. ilość i bliskość substytutów oraz procentowy udział dobra w wydatkach konsumenta [Słoman, 2001, s. 63]. Korzystając z pochodnej funkcji, można pokazać, że elastyczność cenowa liniowej funkcji popytu zależy wprost proporcjonalnie od współczynnika kierunkowego. Oznacza to, że czynniki pozacenowe oddziałują na zmianę współczynnika kierunkowego c w liniowej funkcji popytu (1).

3. Stosowanie określeń nieprecyzyjnych i niejednoznacznych w ekonomii.

Dane do konstrukcji funkcji popytu mogą pochodzić z wielorakich źródeł, m.in. w wyniku ankietowania konsumentów. Ci z kolei mogą stosować, co jest częste w ekonomii, określenia nieprecyzyjne i niejednoznaczne. Na przykład konsumenci, udzielając odpowiedzi na pytanie o wielkość zapotrzebowania na dobro, gdy jego cena wzrośnie o jednostkę, mogą posługiwać się określeniami typu „około 10” czy „w przybliżeniu 10”, zamiast precyzyjną wartością. W przypadku liniowej funkcji popytu, wykorzystując interpretację matematyczną czy ekonometryczną, współczynnik kierunkowy wyznacza wielkość spadku popytu wywołanego wzrostem ceny o jednostkę, co oznacza, że takie nieprecyzyjne informacje znajdują odzwierciedlenie we współczynniku kierunkowym c w liniowej funkcji popytu (1).

Analogiczne uwagi można sformułować w stosunku do liniowej funkcji podaży. Wspomniane obserwacje rzeczywistego rynku uzasadniają użycie liczb rozmytych do opisu parametrów modelu równowagi rynkowej.

4. Skierowane liczby rozmyte

W 1965 roku w czasopiśmie „Information and Control” ukazała się praca Lotfi A. Zadeha pod tytułem: *Fuzzy Sets* [Zadeh, 1965], w której autor wprowadził pojęcie zbioru rozmytego. Liczba rozmyta to wypukły, normalny zbiór rozmyty, określony na uniwersum liczb rzeczywistych, którego funkcja przynależności jest kawałkami ciągła. Zbiory i liczby rozmyte dały możliwość matematycznego modelowania wielkości nieprecyzyjnych, niepewnych czy też wyrażonych w postaci opisowej (lingwistycznych). Znalazło to szerokie zastosowanie praktyczne, m. in. w zagadnieniach związanych ze sterowaniem i podejmowaniem decyzji.

Podstawowe działania arytmetyczne na liczbach rozmytych opierają się na zasadzie rozszerzania i są dość skomplikowane. Wymagają wykonania wielu operacji zarówno na stopniach przynależności, jak i na elementach nośników. Dodatkowo zastosowania praktyczne liczb rozmytych pokazują, że ich funkcje przynależności zazwyczaj nie są dyskretne, ale ciągłe, a także mają stosunkowo regularny kształt, często w postaci: trójkąta, trapezu, krzywej Gaussa itp. Oznacza to, że nie trzeba podawać stopni przynależności dla wszystkich elementów nośnika, a jedynie kilka parametrów, które jednoznacznie określają regularne funkcje przynależności. Powyższe spostrzeżenia sprawiły, że Dubois i Prade [Dubois, Prade, 1980, s. 53] zaproponowali specjalną postać liczb roz-

mytych, nazywaną reprezentacją typu LR , która znacznie poprawia efektywność wykonywanych działań arytmetycznych. Jednocześnie pokazali oni, że dokładne wzory można uzyskać tylko dla dodawania i odejmowania, natomiast w przypadku mnożenia i dzielenia przedstawiono formuły przybliżone.

Model liczb rozmytych, zaproponowany przez Zadeha, a także jego późniejsza modyfikacja, tzw. model LR , posiadają kilka słabości, które ograniczają ich zastosowanie w niektórych dziedzinach, np. w modelowaniu ekonomicznym. Niedoskonałości te wynikają przede wszystkim z określenia działań arytmetycznych na tych liczbach. Powodują one powiększanie nośnika (niezależnie, czy liczby rozmyte dodajemy, czy odejmujemy), jak również brak elementów przeciwnych względem dodawania i odwrotnych w stosunku do mnożenia. Skutkuje to brakiem możliwości rozwiązywania, w ogólnym przypadku, prostych równań: $A + X = C$ oraz $A \cdot X = C$, gdzie A i C są ustalonymi liczbami rozmytymi, ponieważ $A + X + (-A) \neq X$ i $A \cdot X \cdot A^{-1} \neq X$. Dodatkowo, rozwiązanie równania $A + X = C$ nie istnieje, jeżeli nośnik liczby A jest szerszy, niż nośnik liczby C .

Wspomnianych powyżej ograniczeń jest pozbawiony model skierowanych liczb rozmytych (*Ordered Fuzzy Numbers* – OFN)³. Został on zaproponowany w 2002 roku przez Kosińskiego, Prokopowicza i Ślęzaka [Kosiński i in. 2002; 2003; Kosiński, Prokopowicz, 2004]. Arytmetyka działań w tym modelu jest analogiczna do działań na liczbach rzeczywistych, które stają się szczególnym przypadkiem OFN.

Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę funkcji ciągłych:

$$A = (f_A, g_A), \quad (7)$$

gdzie

$$f_A, g_A: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (8)$$

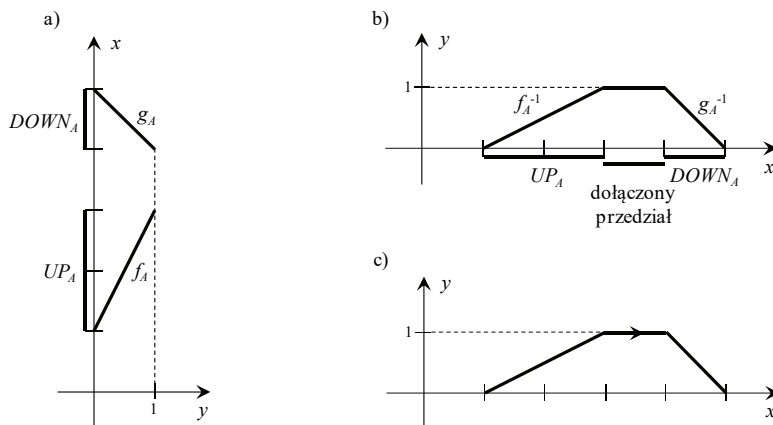
Poszczególne funkcje skierowanej liczby rozmytej nazywamy odpowiednio: f_A – częścią wznoszącą (*UP*), g_A – częścią opadającą (*DOWN*) (rysunek 2a). Ponieważ obie te funkcje są ciągłe, to ich obrazy są ograniczonymi przedziałami odpowiednio UP_A i $DOWN_A$, których granice oznaczamy następująco: $UP_A = (f_A(0), f_A(1))$ oraz $DOWN_A = (g_A(1), g_A(0))$. Na rysunku 2a przedstawiono ilustrację graficzną skierowanej liczby rozmytej, gdzie y jest argumentem funkcji f_A i g_A , natomiast x wartością tych funkcji. Jeżeli funkcje f_A i g_A są ściśle monotoniczne, istnieją do nich funkcje odwrotne f_A^{-1} i g_A^{-1} , określone na odpowiednich przedziałach UP_A i $DOWN_A$ (rysunek 2b). Do zbiorów UP_A i $DOWN_A$ dodajemy na przedziale $[f_A(1), g_A(1)]$ (przedział ten może być jednoelementowy) funkcję stałą (*CONST*) równą 1 (warunek normalności). Wówczas zbiór $UP_A \cup [f_A(1), g_A(1)] \cup DOWN_A$ tworzy jeden przedział (nośnik liczby A). Pozwala to określić funkcję przynależności μ_A skierowanej liczby rozmytej A w następujący sposób [Kacprzak, 2008; 2010]:

³ Po śmierci prof. Kosińskiego, aby upamiętnić i uhonorować jego imię, termin *Ordered Fuzzy Numbers* często zastępowano określeniem *Kosinski Fuzzy Numbers* [Prokopowicz, Pedrycz, 2015].

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin [f_A(0), g_A(0)] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy } x \in [f_A(1), g_A(1)] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy } x \in DOWN_A \end{cases} \quad (9)$$

RYSUNEK 2.

- a) Przykładowa skierowana liczba rozmyta, b) Skierowana liczba rozmyta przedstawiona w sposób nawiązujący do wypukłych liczb rozmytych, c) Strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację OFN



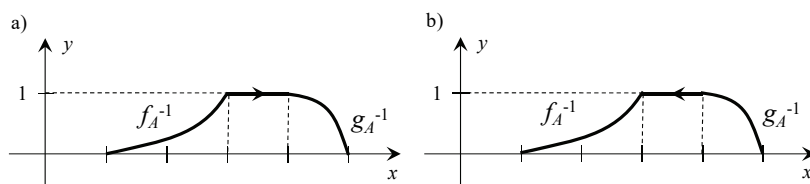
Źródło: [Kosiński i in. 2002].

Tak określone liczby rozmyte nawiązują do wypukłych liczb rozmytych (*Convex Fuzzy Numbers* – CFN), jednak są wyposażone w dodatkową własność zaznaczoną strzałką – skierowanie (rysunek 2c).

Graficznie liczba (f_A, g_A) nie różni się od liczby (g_A, f_A) , lecz w rzeczywistości są to dwie różne liczby, różniące się skierowaniem. Skierowanie pozwala na podzielenie zbioru skierowanych liczb rozmytych na dwie grupy: liczby o skierowaniu dodatnim, jeżeli skierowanie jest zgodne z osią Ox (rysunek 3a), liczby o skierowaniu ujemnym, jeżeli skierowanie jest przeciwne niż oś Ox (rysunek 3b).

RYSUNEK 3.

- a) Skierowana liczba rozmyta (f_A, g_A) o skierowaniu dodatnim,
b) Skierowana liczba rozmyta (g_A, f_A) o skierowaniu ujemnym



Źródło: opracowanie własne.

Szczególnym przypadkiem skierowanych liczb rozmytych są liczby rzeczywiste. W modelu OFN są one utożsamiane z parą funkcji stałych. Dokładniej, liczba $r \in \mathbb{R}$ jest zapisywana jako skierowana liczba rozmyta postaci $r = (r^*, r^*)$, gdzie $r^*(y) = r$ dla $y \in [0,1]$.

Podstawowe działania arytmetyczne, czyli dodawanie (+), odejmowanie (-), mnożenie (\times) i dzielenie ($/$), na skierowanych liczbach rozmytych są określone następująco. Niech $A = (f_A, g_A)$ i $B = (f_B, g_B)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi, wówczas liczba $C = (f_C, g_C)$ jest wynikiem działania $* \in \{+, -, \times, /\}$ na liczbach: A i B ($C = A * B$), jeżeli:

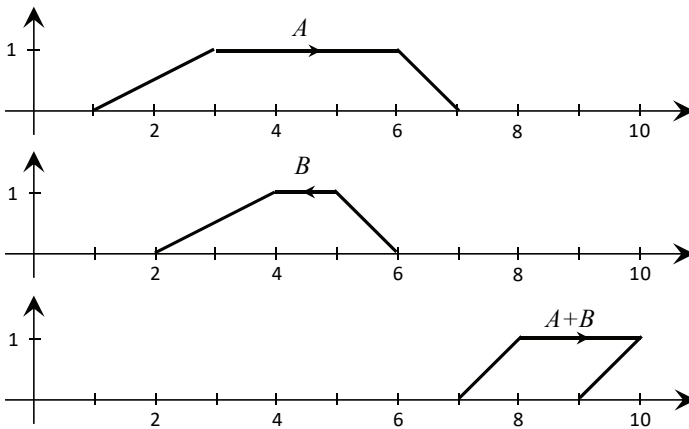
$$\forall y \in [0,1] [f_C(y) = f_A(y) * f_B(y) \text{ i } g_C(y) = g_A(y) * g_B(y)]. \quad (10)$$

Dodatkowo, w przypadku dzielenia musi być spełniony warunek, że $\forall y \in [0,1] f_B(y) \neq 0$ i $g_B(y) \neq 0$. Zbiór skierowanych liczb rozmytych z tak określonymi działaniami ma strukturę przestrzeni liniowo-topologicznej [Kosiński, Prokopowicz, 2004].

Warto w tym miejscu nadmienić, że wykonując działania arytmetyczne na skierowanych liczbach rozmytych, jako wynik można uzyskać tzw. liczby „niewłaściwe” [Kosiński i in. 2003], niebędące skierowanymi liczbami rozmytymi, których interpretacja jest trudna. Na przykład weźmy dwie skierowane liczby rozmyte $A = (1 + 2s, 7 - s)$ i $B = (6 - s, 2 + 2s)$, gdzie $s \in [0,1]$, wówczas ich suma $A + B = (7 + s, 9 + s)$, gdzie $s \in [0,1]$ jest niewłaściwą liczbą rozmytą (rysunek 4).

RYSUNEK 4.

Dwie trapezowe skierowane liczby rozmyte A i B oraz „niewłaściwa” liczba będąca ich sumą $A + B$



Źródło: opracowanie własne.

5. Skierowane liczby rozmyte w liniowym modelu równowagi rynkowej

Skierowane liczby rozmyte, poza modelowaniem nieprecyzyjności (rozmytości), pozwalają również uwzględnić dodatkowy element (informację) obrazowany skierowaniem. Przyjmijmy, że rozmyte liniowe funkcje popytu (1) i podaży (2) mają postać:

$$Q_d = \tilde{a} - \tilde{b}P, \quad (10)$$

$$Q_s = -\tilde{c} + \tilde{d}P, \quad (11)$$

gdzie parametry: \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} i \tilde{d} są reprezentowane za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Biorąc pod uwagę skierowanie, otrzymamy $3^4 = 81$ różnych układów parametrów modelu (wliczając w to również parametry rzeczywiste). W pracy ograniczono się do układów, w których skierowanie będziemy interpretować przez pryzmat oczekiwań uczestników rynku w odniesieniu do ceny. Oznacza to, że wartość $f(0)$ będzie określała wielkość parametru najmniej oczekiwaną (pożądaną) przez konsumenta lub producenta, natomiast $g(0)$ wielkość parametru najbardziej oczekiwaną (pożądaną). Korzystając z liniowej rozmytej funkcji popytu (10), mamy:

$$Q_d = \tilde{a} - \tilde{b}P \Rightarrow P = \frac{\tilde{a} - Q_d}{\tilde{b}}. \quad (12)$$

Warto zauważyć, że im niższa cena rynkowa, tym korzystniejsza sytuacja konsumenta (założyliśmy, że popyt jest malejącą liniową funkcją ceny). Z (12) widać, że wyraz wolny \tilde{a} stoi w liczniku, co oznacza, że im mniejsza jego wartość, tym cena dobra jest niższa. Ponadto, współczynnik kierunkowy \tilde{b} stoi w mianowniku, więc im wyższa jego wartość, tym cena dobra jest niższa. Sprawia to, że wyraz wolny \tilde{a} powinien mieć skierowanie ujemne (rysunek 5a, gdzie $\tilde{a} = \tilde{40}$), natomiast współczynnik kierunkowy \tilde{b} skierowanie dodatnie (rysunek 6a, gdzie $\tilde{c} = \tilde{8}$). Odmiennie sytuacja wygląda ze strony producenta. Z (11) mamy:

$$Q_s = -\tilde{c} + \tilde{d}P \Rightarrow P = \frac{\tilde{c} + Q_s}{\tilde{d}}. \quad (13)$$

Producent jest zainteresowany ukształtowaniem się ceny na jak najwyższym poziomie (założyliśmy, że podaż jest rosnącą liniową funkcją ceny). Z (13) widać, że wyraz wolny \tilde{c} powinien mieć skierowanie dodatnie (rysunek 5b, gdzie $\tilde{c} = \tilde{6}$), zaś współczynnik kierunkowy \tilde{d} skierowanie ujemne (rysunek 6b, gdzie $\tilde{d} = \tilde{20}$).

Korzystając z zależności (4)-(5) oraz rozmytej liniowej funkcji popytu (10) i z rozmytej liniowej funkcji podaży (11), otrzymujemy rozmytą równowagę rynkową, przy której rozmyta cena ma postać:

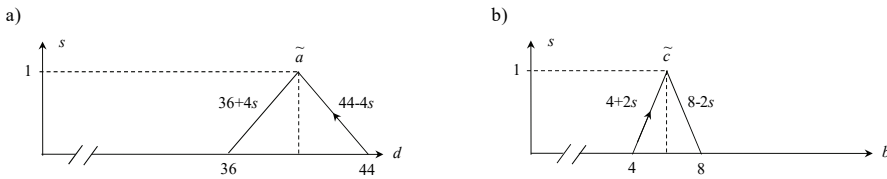
$$\bar{P} = \frac{(f_a g_a) + (f_c g_c)}{(f_b g_b) + (f_d g_d)} = \frac{(f_a + f_c g_a + g_c)}{(f_b + f_d g_b + g_d)}, \quad (14)$$

a odpowiadająca jej rozmyta wielkość równowagi \bar{Q} ($\bar{Q} = Q_d = Q_s$) wyraża się następująco:

$$\bar{Q} = \frac{(f_a g_a)(f_d g_d) - (f_b g_b)(f_c g_c)}{(f_b g_b) + (f_d g_d)} = \frac{(f_a f_d g_a g_d) - (f_b f_c g_b g_c)}{(f_b + f_d g_b + g_d)}. \quad (15)$$

RYSUNEK 5.

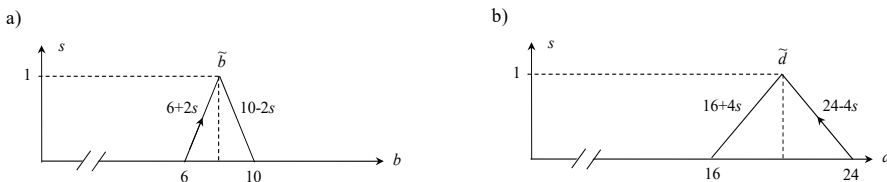
Skierowane liczby rozmyte reprezentujące wyraz wolny rozmytej liniowej funkcji: a) popytu (10), b) podaży (11)



Źródło: opracowanie własne.

RYSUNEK 6.

Skierowane liczby rozmyte reprezentujące współczynnik kierunkowy rozmytej liniowej funkcji: a) popytu (10), b) podaży (11)



Źródło: opracowanie własne.

6. Przykład rozmytego liniowego modelu równowagi rynkowej o współczynnikach reprezentowanych za pomocą OFN

Rozważmy rozmyty liniowy model równowagi rynkowej o współczynnikach reprezentowanych za pomocą trójkątnych skierowanych liczb rozmytych. Przyjmijmy, że rozmyte liniowe funkcje popytu (10) oraz podaży (11) mają postać:

$$Q_d = \tilde{40} - \tilde{8}P, \quad (16)$$

$$Q_s = -\tilde{6} + \tilde{20}P. \quad (17)$$

Rozważmy trzy przypadki rozmywania parametrów modelu:

- rozmyte wyrazy wolne funkcji (16) i (17),
- rozmyte współczynniki kierunkowe funkcji (16) i (17),
- rozmyte parametry funkcji (16) i (17).

AD a) Rozmyty liniowy model równowagi rynkowej o rozmytych wyrazach wolnych. Funkcje (16) i (17) przyjmują wówczas postać:

$$Q_d = (44 - 4s, 36 + 4s) - (8,8)P, \quad (18)$$

$$Q_s = -(4 + 2s, 8 - 2s) + (20,20)P, \quad (19)$$

gdzie $s \in [0,1]$. Rozmyta równowaga rynkowa ma miejsce, zgodnie z (14), gdy cena ma postać:

$$\bar{P} = \frac{(44-4s, 36+4s) + (4+2s, 8-2s)}{(8,8) + (20,20)} = \left(\frac{48-2s}{28}, \frac{44+2s}{28} \right), \quad (20)$$

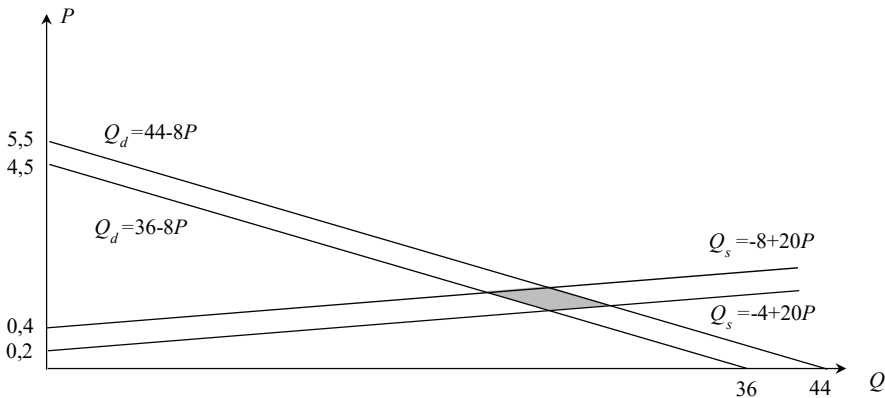
a odpowiadająca jej wielkość równowagi \bar{Q} , zgodnie z (15), ma postać:

$$\bar{Q} = \frac{(44-4s, 36+4s)(20,20) - (8,8)(4+2s, 8-2s)}{(8,8) + (20,20)} = \left(\frac{848-96s}{28}, \frac{656+96s}{28} \right), \quad (21)$$

gdzie $s \in [0,1]$. Na rysunku 7. pokazano obszar rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (18) i podaży (19). Natomiast na rysunku 8a zobrazowano skierowaną liczbę rozmytą reprezentującą cenę równowagi (20), a na rysunku 8b odpowiadającą jej wielkość równowagi (21).

RYSUNEK 7.

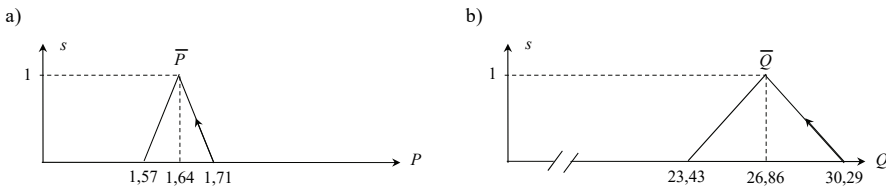
Ilustracja graficzna rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (18) i funkcji podaży (19)



Źródło: opracowanie własne.

RYSUNEK 8.

Skierowane liczby rozmyte reprezentujące równowagę rynkową: a) cenę \bar{P} (20), b) wielkość równowagi \bar{Q} (21)



Źródło: opracowanie własne.

AD b) Liniowy rozmyty model równowagi rynkowej o rozmytych współczynnikach kierunkowych. Funkcje (16) i (17) przyjmują wówczas postać:

$$Q_d = (40,40) - (6 + 2s, 10 - 2s)P, \quad (22)$$

$$Q_s = -(6,6) + (24 - 4s, 16 + 4s)P, \quad (23)$$

gdzie $s \in [0,1]$. Rozmyta równowaga rynkowa ma miejsce, gdy cena ma postać:

$$\bar{P} = \frac{(40,40)+(6,6)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \left(\frac{46}{30-2s}, \frac{46}{26+2s} \right), \quad (24)$$

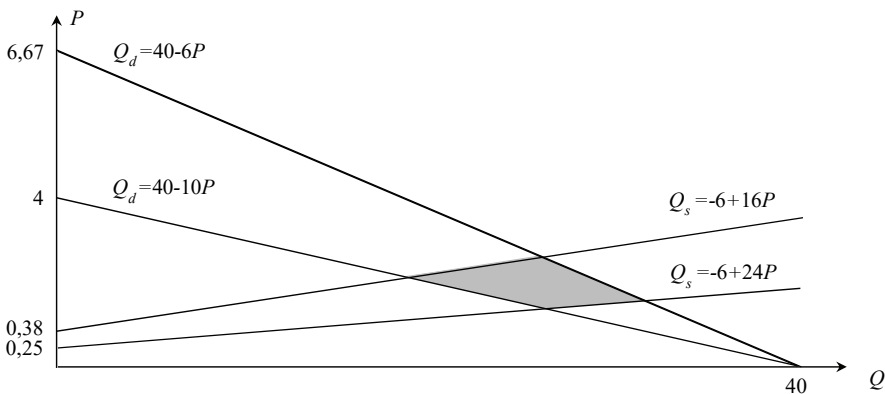
a odpowiadająca jej wielkość równowagi \bar{Q} jest postaci:

$$\bar{Q} = \frac{(40,40)(24-4s,16+4s)-(6,6)(6+2s,10-2s)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \left(\frac{924-172s}{30-2s}, \frac{580+172s}{26+2s} \right), \quad (25)$$

gdzie $s \in [0,1]$. Na rysunku 9. pokazano obszar rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (22) i podaży (23). Natomiast na rysunku 10a zobrażono skierowaną liczbę rozmytą reprezentującą cenę równowagi (24), a na rysunku 10b odpowiadającą jej wielkość równowagi (25).

RYSUNEK 9.

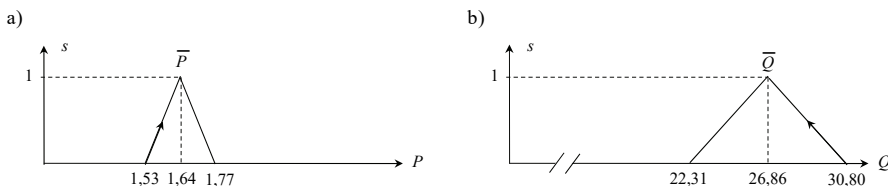
Ilustracja graficzna rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (22) i funkcji podaży (23)



Źródło: opracowanie własne.

RYSUNEK 10.

Skierowane liczby rozmyte reprezentujące równowagę rynkową: a) cenę \bar{P} (24), b) wielkość równowagi \bar{Q} (25)



Źródło: opracowanie własne.

AD c) Liniowy rozmyty model równowagi rynkowej o rozmytych parametrach. Funkcje (16) i (17) przyjmują wówczas postać:

$$Q_d = (44 - 4s, 36 + 4s) - (6 + 2s, 10 - 2s)P, \quad (26)$$

$$Q_s = -(4 + 2s, 8 - 2s) + (24 - 4s, 16 + 4s)P, \quad (27)$$

gdzie $s \in [0,1]$. Rozmyta równowaga rynkowa ma miejsce, gdy cena ma postać:

$$\bar{P} = \frac{(44-4s,36+4s)+(4+2s,8-2s)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \left(\frac{48-2s}{30-2s}, \frac{44+2s}{26+2s} \right), \quad (28)$$

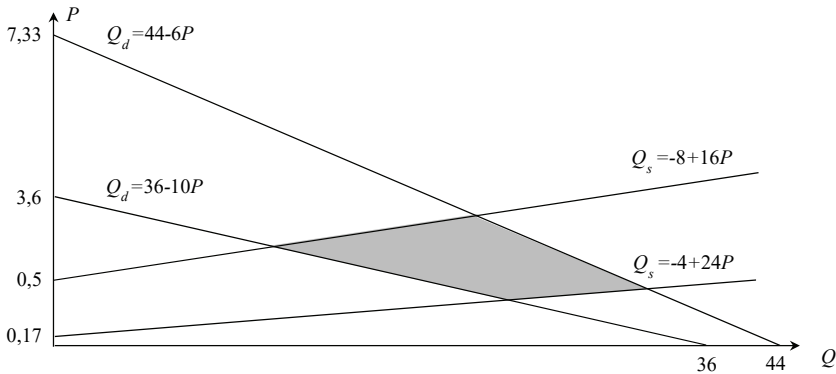
a odpowiadająca jej wielkość równowagi \bar{Q} jest postaci:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \frac{(44-4s,36+4s)(24-4s,16+4s)-(6+2s,10-2s)(4+2s,8-2s)}{(6+2s,10-2s)+(24-4s,16+4s)} = \\ &= \left(\frac{12s^2-292s+1032}{30-2s}, \frac{12s^2+244s+496}{26+2s} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

gdzie $s \in [0,1]$. Na rysunku 11. pokazano obszar rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (26) i podaży (27). Natomiast na rysunku 12a zobrazowano skierowaną liczbę rozmytą reprezentującą cenę równowagi (28), a na rysunku 12b odpowiadającą jej wielkość równowagi (29).

RYSUNEK 11.

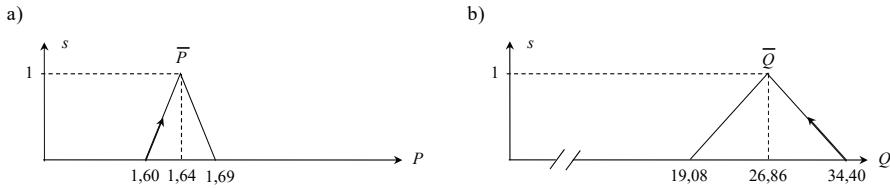
Ilustracja graficzna rozmytej równowagi rynkowej dla funkcji popytu (22) i funkcji podaży (23)



Źródło: opracowanie własne.

RYSUNEK 12.

Skierowane liczby rozmyte reprezentujące równowagę rynkową: a) cenę \bar{P} (28), b) wielkość równowagi \bar{Q} (29)



Źródło: opracowanie własne.

7. Podsumowanie

W pracy przedstawiono modyfikację liniowego modelu (częściowej) równowagi rynkowej, w którym parametry, zazwyczaj opisywane liczbami rzeczywistymi, zastąpiono skierowanymi liczbami rozmytymi. Umożliwia to reprezentowanie równowagi rynkowej za pomocą pewnego podzbioru płaszczyzny (płaszczyzny ceny i odpowiadającej jej wielkości popytu/podaży), a nie za pomocą punktu. Powoduje to, że model wierniej odzwierciedla rzeczywistość gospodarczą, ponieważ punktowe położenie równowagi jest raczej stanem idealnym i trudnym do osiągnięcia w realnych warunkach ekonomicznych. Co więcej, skierowane liczby rozmyte pozwalają uwzględnić dodatkowy czynnik, np. oczekiwania konsumenta czy producenta, obrazowany skierowaniem.

Literatura

- Chiang A.C., 1994, *Podstawy ekonomii matematycznej*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Dubois D., Prade H., 1980, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Application*, Academic Press, New York.
- Gawinecki J., 2000, *Matematyka dla ekonomistów*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlu i Prawa, Warszawa.
- Kacprzak D., 2008, *Model Leontiewa i skierowane liczby rozmyte*, VII Konferencja Naukowo-Praktyczna „Energia w nauce i technice”, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Suwałki.
- Kacprzak D., 2010, *Skierowane liczby rozmyte w modelowaniu ekonomicznych*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 3.
- Kacprzak D., 2012a, *Przychód i koszt całkowity przedsiębiorstwa wyrażony przy użyciu skierowanych liczb rozmytych*, „Zarządzanie i Finanse. Journal of Management and Finance”, no. 2/1.

- Kacprzak D., 2012b, *Zastosowanie skierowanych liczb rozmytych do prezentacji cen akcji*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 6.
- Kacprzak D., 2014, *Prezentacja cen dóbr konsumpcyjnych oraz dynamiki ich zmian za pomocą skierowanych liczb rozmytych*, „Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 1.
- Kacprzak D., 2017, *Objective Weights Based on Ordered Fuzzy Numbers for Fuzzy Multiple Criteria Decision Making Methods*, “Entropy”, 19(7), 373.
- Kacprzak D., 2017, *The Input-Output Model Based on Ordered Fuzzy Numbers*, [in:] *Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers: A Tribute to Professor Witold Kosiński*, P. Prokopowicz, J. Czerniak, D. Mikołajewski, Ł. Apiecionek, D. Ślęzak (eds.), “Studies in Fuzziness and Soft Computing”, vol. 356, Springer.
- Kacprzak D., Kosiński W., 2014, *Optimizing firm inventory costs as a fuzzy problem*, “Studies in Logic, Grammar and Rhetoric”, nr 37.
- Kacprzak D., Kosiński W., Kosiński W. K., 2013, *Financial stock data and ordered fuzzy numbers*, Artificial Intelligence and Soft Computing: 12th International Conference, ICAISC'2013, Berlin.
- Kosiński W., Prokopowicz P., 2004, *Algebra liczb rozmytych*, „Matematyka Stosowana”, nr 5(46).
- Kosiński W., Prokopowicz P., Kacprzak D., 2009, *Fuzziness – representation of dynamic changes by ordered fuzzy numbers*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 243, Springer-Verlag, Berlin.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002, *Drawback of fuzzy arithmetics – new intuitions and propositions*, [in:] *Methods of Artificial Intelligence*, T. Burczyński, W. Cholewa, W. Moczulski (eds.), Gliwice.
- Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2003, *Ordered Fuzzy Numbers*, “Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematic”, 52(3).
- Marszałek A., Burczyński T., 2013, *Financial fuzzy time series models based on ordered fuzzy numbers*, [in:] *Time Series Analysis. Modelling and Applications*, W. Pedrycz, S. M. Chen (eds.), ISRL 47, Springer, Berlin, Heidelberg.
- Milewski R., Kwiatkowski E., 2005, *Podstany ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Prokopowicz P., Pedrycz W., 2015, *The Directed Compatibility Between Ordered Fuzzy Numbers – A Base Tool for a Direction Sensitive Fuzzy Information Processing*, “Artificial Intelligence and Soft Computing”, vol. 9119.
- Roszkowska E., Kacprzak D., 2016, *The fuzzy SAW and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers*, “Information Sciences”, vol. 369.
- Rudnik K., Kacprzak D., 2017, *Fuzzy TOPSIS method with ordered fuzzy numbers for flow control in a manufacturing system*, “Applied Soft Computing”, vol. 52.
- Słoman J., 2001, *Podstany ekonomii*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Sobol I., Kacprzak D., Kosiński W., 2015, *Optimizing of a company's costs under fuzzy data and optimal orders under dynamic conditions*, “Optimum. Studia Ekonomiczne”, nr 5.
- Zadeh L.A., 1965, *Fuzzy Sets*, “Information and Control”, no. 8.