prof. dr hab. Krzysztof PIASECKI
Wydział Zarządzania, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu
e-mail: k.piasecki@ue.poznan.pl

DOI: **10.15290/ose.2017.03.87.01**

Profesorowi Witoldowi Kosińskiemu
in memoria

O PEWNYCH MODYFIKACJACH TEORII SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH

Streszczenie

Skierowane liczby rozmyte zostały zdefiniowane w doskonały i intuicyjny sposób przez Witolda Kosińskiego. Z tej przyczyny skierowane liczby rozmyte coraz częściej określa się mianem liczb Kosińskiego. W pierwszej części tej pracy zaproponowano w pełni sformalizowaną definicję liczby Kosińskiego. Definicję tę następnie uogólniono do przypadku skierowanej liczby rozmytej z nieciągłą funkcją przynależności. Istotną wadą arytmetyki zaproponowanej przez Kosińskiego był brak zamknięcia przestrzeni skierowanych liczb rozmytych ze względu na podstawowe działania arytmetyczne, takie jak: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Głównym celem prezentowanej pracy jest taka modyfikacja działań arytmetycznych, aby przestrzeń liczb Kosińskiego była zamknięta z racji zmodyfikowanych działań arytmetycznych.

Słowa kluczowe: skierowane liczby rozmyte, arytmetyka

ON CERTAIN MODIFICATIONS OF ORDERED FUZZY NUMBERS THEORY

Summary

Ordered fuzzy numbers have been defined in an excellent, intuitive way by Witold Kosiński. For this reason, they are increasingly referred to as Kosiński's numbers. A fully formalized definition of a Kosiński's number is proposed in the first part of this work. This definition is generalized so as to fit an ordered fuzzy number with an upper semi-continuous membership function. A significant drawback of Kosiński's arithmetic is that the space of ordered fuzzy numbers is not closed under addition, subtraction, multiplication, or division. The main aim of this paper is to modify the arithmetic in such a way that the space of ordered fuzzy numbers is closed under the modified arithmetic operations.

Key words: ordered fuzzy number, arithmetic

JEL: C02

1. Wstęp

Nieprecyzyjne określenia i oceny przesłanek podejmowania decyzji są istotnym czynnikiem, który ma wpływ na proces decyzyjny. W obrębie badań operacyjnych nieprecyzyjność tę najczęściej modeluje się za pomocą teorii zbiorów rozmytych, zainicjowanej przez Zadeha [1965]. Z racji rosnących potrzeb, teoria ta jest intensywnie rozwijana do tej pory. Jednym z podstawowych narzędzi jest tutaj liczba rozmyta (w skrócie FN). Szczególny rodzaj FN, tj. skierowane liczby rozmyte (w skrócie OFN), został w intuicyjny sposób wprowadzony przez Kosińskiego i współautorów [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002 a, b; 2003; Kosiński, 2006]. Skierowane liczby rozmyte zaczęły znajdować swoje zastosowanie w badaniach operacyjnych. Przykłady takich zastosowań można już znaleźć w pracach: [Kacprzak, 2012; Roszkowska, Kacprzak, 2016; Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017; Piasecki, 2016].

Jednak zdefiniowane w intuicyjny sposób OFN wykazywały pewne wady. Szczególnie istotnym mankamentem arytmetyki zaproponowanej przez Kosińskiego był tutaj brak zamknięcia przestrzeni OFN ze względu na podstawowe działania arytmetyczne, takie jak: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie [Kosiński, 2006]. Powodowało to znaczne trudności w praktycznych zastosowaniach OFN, m.in. w badaniach operacyjnych.

Stąd głównym celem prezentowanej pracy jest taka modyfikacja działań arytmetycznych, aby przestrzeń liczb Kosińskiego była zamknięta z uwagi na te działania. Realizacji tego celu będzie służyć dyskusja nad intuicyjną definicją OFN zaproponowaną przez Kosińskiego. Dyskusja ta będzie zmierzać do zaproponowania takiej formalnej definicji OFN, która będzie w pełni odzwierciedlać intuicyjne podejście Kosińskiego. Zakłada się przy tym uzyskanie takiego stopnia ogólności, aby było możliwe zastosowanie teorii skierowanych liczb rozmytych do modelu Behawioralnej Wartości Bieżącej (w skrócie BPV) [Piasecki, 2011a; b, 2014], [Piasecki, Siwek, 2015]. Postawienie takiego celu wynika z faktu, że Łyczkowska-Hanćkowiak [2017] uzasadniła nadanie BPV orientacji.

2. Określenia liczby rozmytej

Teoria zbiorów rozmytych [Zadeh, 1965] odnosi się do opisu nieprecyzyjnych pojęć, przez które rozumie się nieprecyzyjnie wyróżniony obiekt w przestrzeni elementów $\mathbb{X}$. Każdy podzbiór rozmyty $A \subset \mathbb{X}$ jest jednoznacznie opisany za pomocą swej funkcji przynależności $\mu_A \in [0; 1]^{\mathbb{X}}$. W ujęciu logik wielowartościowych, wartość $\mu_A(x)$ jest interpretowana jako wartość logiczna zdania $x \in A$. Za pomocą symbolu $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych w przestrzeni $\mathbb{X}$.

W tym artykule do analizy dowolnego zbioru rozmytego zastosowano następujące pojęcia:

- α – cięcie $[A]_\alpha$ zbioru $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ określone dla każdego $\alpha \in]0; 1]$ za pomocą zależności:

$$[A]_\alpha = \{x \in \mathbb{X}: \mu_A(x) \geq \alpha\}, \tag{1}$$

– domknięcie nośnika $[A]_{0^+}$ zbioru $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ określone za pomocą zależności:

$$[A]_{0^+} = \lim_{\alpha \to 0^+} [A]_\alpha. \tag{2}$$

W tym artykule przedmiotem zainteresowania będą wartości przybliżone. Stąd przestrzeń $\mathbb{X}$ ograniczamy do przypadku przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Przybliżeniem dowolnej wartości jest rozmyta liczba rzeczywista $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, zdefiniowana poniżej w najbardziej ogólny sposób.

Definicja 1. Liczba rozmyta (w skrócie FN) jest to podzbiór rozmyty $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o ograniczonym domknięciu nośnika $[S]_{0^+}$ i reprezentowany przez swą półciągłą z góry funkcję przynależności $\mu_S \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ spełniająca warunki [Dubois, Prade, 1979]:

$$\exists_{x \in \mathbb{R}}: \mu_S(x) = 1, \tag{3}$$

$$\forall_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3}: x \leq y \leq z \Longrightarrow \mu_S(y) \geq \min\{\mu_S(x), \mu_S(z)\}\,. \tag{4}$$

Przykładem FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest Behawioralna Wartość Bieżąca [Piasecki, 2011a; b, 2014; Piasecki, Siwek, 2015] reprezentowana przez funkcję swą funkcję przynależności przedstawioną na rysunku 1.

Wzorując się na pracy [Dubois, Prade, 1982], dla każdej czwórki $(a_S, b_S, c_S, d_S) \in \mathbb{R}^4$ spełniającej warunek $a_S \leq b_S \leq c_S \leq d_S$ definiujemy szczególny rodzaj FN $S(a_S, b_S, c_S, d_S)$ typu LR (w skrócie LR-FN). Każda z LR-FN $S(a_S, b_S, c_S, d_S)$ jest reprezentowana przez swe funkcje przynależności $\mu_S \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$określoną następująco:

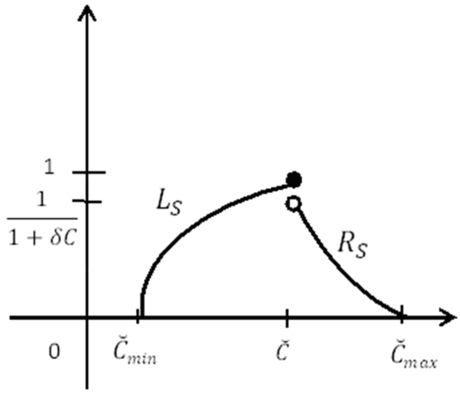
$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < a_S \\ L_S(x) & a_S \leq x \leq b_S \\ 1 & b_S \leq x \leq c_S, \\ R_S(x) & c_S \leq x \leq d_S \\ 0 & d_S < x \end{cases} \tag{5}$$

gdzie lewa funkcja odniesienia $L_S \in [0,1]^{[a_S,b_S]}$ jest prawostronnie ciągłą funkcją rosnącą i prawa funkcja odniesienia $R_S \in [0,1]^{[c_S,d_S]}$ jest lewostronnie ciągłą funkcją malejącą. Dowolną parę funkcji (L_S, R_S) nazywamy parą funkcji odniesienia.

W pracy [Dubois, Prade, 1982] LR-FN zdefiniowano jedynie do przypadku czwórki $(a_S, b_S, c_S, d_S) \in \mathbb{R}^4$ spełniającej warunek $a_S < b_S \leq c_S < d_S$ oraz ciągłych funkcji odniesienia będących suriekcjami. Dalsze uogólnienia wynikały z potrzeb narzucanych przez wymogi poszczególnych zastosowań. Dzięki tym uogólnieniom można m.in. stwierdzić, że BPV opisana na rysunku 1. jest LR-FN $S\left(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}, \check{C}_{max}\right)$. Na tym rysunku można również dostrzec, że prawa funkcja odniesienia R_S nie jest suriekcją. Zaproponowane uogólnienie określenia LR-FN jest zatem niezbędne do przedstawienia BPV jako LR-FN.

RYSUNEK 1.

Behawioralna wartość bieżąca (BPV)



Źródło: [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017].

Goetschel i Voxman [1986] pokazali, że definicję 1. można zastąpić równoważną poniższą definicją FN.

Definicja 2. FN jest to podzbiór rozmyty $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o ograniczonym domknięciu nośnika $[S]_{0^+}$ spełniający dodatkowo warunek [Goetschel, Voxman, 1986]:

$$\forall_{\alpha \in]0;1]} \exists_{(l_S(\alpha), r_S(\alpha)) \in \mathbb{R}^2 : l_S(\alpha) \leq r_S(\alpha)} : [S]_\alpha = [l_S(\alpha), r_S(\alpha)] \,. \tag{6}$$

Następnie Goetschel i Voxman [1986] dowiedli prawdziwości poniższych twierdzeń.

Twierdzenie 1. Dla dowolnej FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ mamy:

– l_S jest ograniczoną funkcją niemalejącą na $[0; 1]$, (7)

– r_S jest ograniczoną funkcją nierosnąca na $[0; 1]$, (8)

$$l_S(1) \leq r_S(1), \tag{9}$$

– funkcje l_S i r_S są lewostronnie ciągłe na $]0; 1]$ i prawostronnie ciągłe w 0. (10)

Dowolną parę funkcji (l_S, r_S) spełniającą warunki: (7), (8), (9) i (10), nazywamy parą funkcji Goetschela-Voxmana.

Twierdzenie 2. Dla dowolnej pary (l_S, r_S) funkcji Goetschela-Voxmana istnieje dokładnie jedna FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ taka, że spełniony jest warunek (6).

W tej sytuacji parę funkcji Goetschela-Voxmana, reprezentującą FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, zawsze będziemy oznaczać za pomocą symbolu (l_S, r_S). W szczególnym przypadku można stwierdzić, że:

Twierdzenie 3. Dla dowolnej LR-FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dodatkowo mamy:
– funkcje l_S i r_S są ciągłe na $]0,1[$. (11)

Twierdzenie 4. Dla dowolnej pary (l_S, r_S) funkcji Goetschela-Voxmana, spełniającej dodatkowo warunek (11), istnieje dokładnie jedna LR-FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ taka, że spełniony jest warunek (6).

Jeśli FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest typu LR, to wtedy mamy:

$$S = S\big(l_S(0), l_S(1), r_S(1), r_S(0)\big). \tag{12}$$

Ponadto, dla dowolnej LR-FN $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ między reprezentującymi ją parą (L_S, R_S) funkcji odniesienia a parą (l_S, r_S) funkcji Goetschela-Voxmana zachodzą następujące tożsamości:

$$\forall_{\alpha\in[0;1]}: l_S(\alpha) = L_S^{\star}(\alpha) = \min\{x \in [a_S, b_S]: L_S(x) \geq \alpha\}, \tag{13}$$

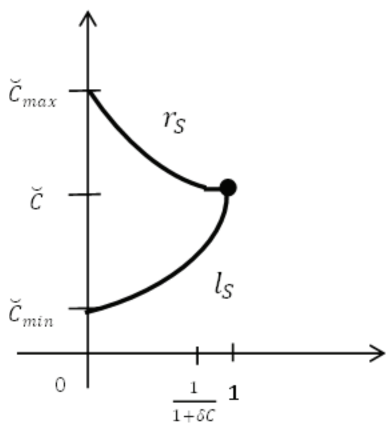
$$\forall_{\alpha\in[0;1]}: r_S(\alpha) = R_S^{\circ}(\alpha) = \max\{x \in [c_S, d_S]: R_S(x) \geq \alpha\}, \tag{14}$$

$$\forall_{x\in[l_S(0), l_S(1)]}: L_S(x) = l_S^{\lhd}(x) = \max\{\alpha \in [0;1]: l_S(\alpha) = x\}, \tag{15}$$

$$\forall_{x\in[r_S(1), r_S(0)]}: R_S(x) = r_S^{\rhd}(x) = \min\{\alpha \in [0;1]: r_S(\alpha) = x\}. \tag{16}$$

RYSUNEK 2.

Funkcje Goetschela-Voxmana



Źródło: opracowanie własne.

Reasumując, w rozdziale tym uogólniliśmy pojęcie LR-FN do przypadku jednostronnie ciągłych funkcji odniesienia. Uogólnienie takie było konieczne do tego, aby móc BPV zaliczyć do klasy LR-FN. Na rysunku 2. przedstawiono parę (l_S, r_S) funkcji Goetschela-Voxmana, reprezentującą BPV przedstawioną na rysunku 1.

Ponadto, warto zauważyć, że jeśli funkcje Goetschela-Voxmana są różnowartościowe, to mamy wtedy:

$$\forall_{x\in[l_S(0),l_S(1)]}: L_S(x) = l_S^{\lhd}(x) = l_S^{-1}(x), \tag{17}$$

$$\forall_{x\in[r_S(1),r_S(0)]}: R_S(x) = r_S^{\rhd}(x) = r_S^{-1}(x). \tag{18}$$

3. Istota i określenie skierowanych liczb rozmytych

Pojęcie skierowanych liczb rozmytych (w skrócie OFN) zostało wprowadzone przez Kosińskiego i współautorów w serii artykułów [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002a; 2002b; 2003; Kosiński, 2006] jako rozszerzenie pojęcia FN. Stąd dowolna OFN powinna być określona jako taki podzbiór rozmyty przestrzeni liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, którego funkcja przynależności spełnia warunki definicji 1. lub definicji 2. Z drugiej strony Kosiński zdefiniował OFN jako uporządkowaną parę funkcji przekształcających przedział jednostkowy $[0,1]$ w $\mathbb{R}$. Taka para nie jest podzbiorem rozmytym w $\mathbb{R}$. Oznacza to, że nie można zaakceptować oryginalnej terminologii Kosińskiego. Niemniej intuicyjne podejście Kosińskiego do pojęcia OFN jest bardzo użyteczne. Z tych powodów poniżej zaprezentowano zmodyfikowaną definicję OFN. Zmodyfikowana definicja w pełni będzie odpowiadać intuicyjnemu określeniu OFN sformułowanemu przez Kosińskiego. Pojęcie OFN jest ściśle powiązane z następującą parą uporządkowaną.

Definicja 3. Para Kosińskiego jest to uporządkowana para(f_S, g_S) ciągłych bijekcji lub funkcji stałych $f_S: [0,1] \to UP_S$ i $g_S: [0,1] \to DOWN_S$ spełniających warunki:

$$\left(f_s(1) - f_s(0)\right) \cdot \left(g_s(1) - g_s(0)\right) \le 0, \tag{19}$$

$$|f_s(1) - g_s(1)| \le |f_s(0) - g_s(0)|, \tag{20}$$

$$UP_S \cap DOWN_S = \{f_s(1)\} \cap \{g_s(1)\}. \tag{21}$$

Dla dowolnej pary Kosińskiego (f_S, g_S) funkcja $f_S: [0,1] \to UP_S$ jest nazywana funkcją wznoszącą. Wtedy funkcja $g_S: [0,1] \to DOWN_S$ jest nazywana funkcją opadająca. Obie te funkcje mają swoją wspólną nazwę – funkcje Kosińskiego.

Uwaga: W oryginalnej wersji definicji Kosińskiego [2006] OFN są zdefiniowane jako uporządkowana para (f_S, g_S) ciągłych funkcji $f_S, g_S \in \mathbb{R}^{[0;1]}$. Pozostałe warunki definicji 3. Kosiński zaznaczył jedynie na wykresach. Zdefiniowane w ten sposób OFN nie były podzbiorem rozmytym. Z tego powodu zaproponowane w definicji 3. przez Kosińskiego OFN zostały zastąpione przez termin **para Kosińskiego**.

Warunki: (19), (20) i (21) implikują, że każda para Kosińskiego spełnia dokładnie jeden z następujących warunków:

$$f_S(0) \le f_S(1) \le g_S(1) \le g_S(0), \tag{22}$$

$$f_S(0) \ge f_S(1) \ge g_S(1) \ge g_S(0). \tag{23}$$

W przypadku spełnienia warunku (22) funkcję f_S nazywamy początkową funkcją Kosińskiego, zaś funkcję g_S końcową funkcją Kosińskiego. Jeśli jest spełniony warunek (23), to funkcję f_S nazywamy końcową funkcją Kosińskiego, natomiast funkcję g_S początkową funkcją Kosińskiego.

Korzystając z tych określeń faktu, OFN definiuje się w poniższy sposób.

Definicja 4. Dla ustalonej pary Kosińskiego (f_S, g_S), OFN $\overleftrightarrow{S}$ jest to para $\langle S, \mho \rangle$ złożona z $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ i orientacji $\mho$, gdzie:

- $S \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest LR-FN jednoznacznie wyznaczona przez parę (l_S, r_S) funkcji Goetschela-Voxmana określonych w ten sposób, że:
  - lewa funkcja Goetschela-Voxmana l_S jest równa początkowej funkcji Kosińskiego;
  - prawa funkcja Goetschela-Voxmana r_S jest równa końcowej funkcji Kosińskiego;
- orientacja $\mho$ jest określona jako wspólny zwrot wszystkich wektorów prowadzących z przeciwdziedziny UP_S funkcji wznoszącej do przeciwdziedziny $DOWN_S$ funkcji opadającej.

Powyższa definicja jest zgodna ze stosowanym przez Kosińskiego intuicyjnym podejściem do pojęcia OFN. Stąd autor tego artykułu zgadza się z opinią, że OFN powinny być nazwane liczbami Kosińskiego [Prokopowicz, 2015a,b]. Przestrzeń wszystkich OFN oznaczamy za pomocą symbolu $\mathfrak{K}$. Dla dowolnych OFN $\overleftrightarrow{S} \in \mathfrak{K}$ ich funkcja wznosząca jest oznaczona za pomocą symbolu f_S i ich funkcja opadająca jest oznaczana za pomocą symbolu g_S. Ciągłość funkcji Kosińskiego powoduje, że UP_S i $DOWN_S$ są przedziałami domkniętymi. Liczby $f_S(0)$ i $f_S(1)$ są granicami przedziałuUP_S. Liczby $g_S(0)$ i $g_S(1)$ są granicami przedziału $DOWN_S$. Z tego powodu dowolną OFN $\overleftrightarrow{S}$ z danymi UP_S i $DOWN_S$ oznaczamy za pomocą symbolu $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$.

Kiedy $f_S(0) < g_S(0)$, to wtedy warunek (22) opisuje dodatnią orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca f_S jest rosnącą lub stałą i funkcja opadająca g_S jest malejącą lub stałą. Wykresy takich funkcji Kosińskiego zostały przedstawione na rysunku 3a.

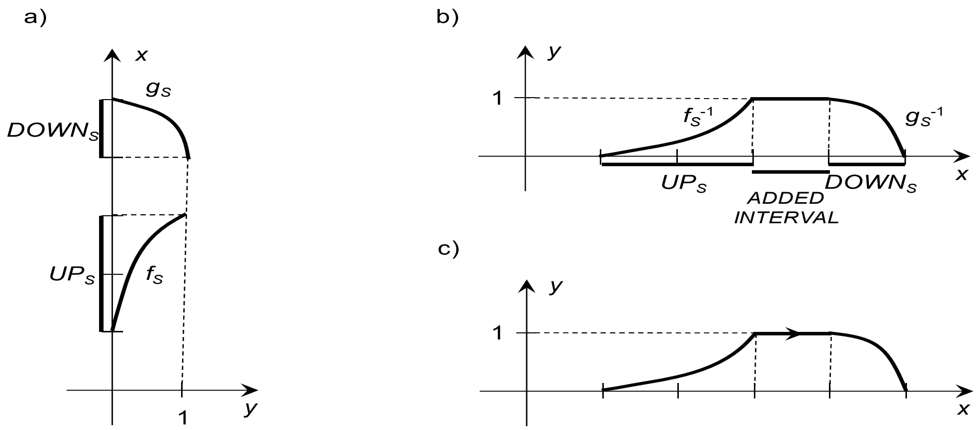
Ponadto, z zależności (5), (17) i (18) wynika, że dodatnio zorientowane OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jednoznacznie wyznaczają FN$S(f_S(0), f_S(1), g_S(1)$ $g_S(0))$ opisane przez swą funkcję przynależności $\mu_S \colon \mathbb{R} \to [0; 1]$ daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < f_S(0) \\ f_S^{-1}(x) & f_S(0) \le x < f_S(1) \\ 1 & f_S(1) \le x \le g_S(1), \\ g_S^{-1}(x) & g_S(1) < x \le g_S(0) \\ 0 & g_S(0) < x \end{cases} \tag{24}$$

Wykres powyższej funkcji przynależności jest przedstawiony na rysunku 3b. Wykres funkcji przynależności OFN jest pokazany na rysunku 3c. Ostatni wykres ma dodatkową strzałkę oznaczającą orientację, co stanowi informację uzupełniającą.

RYSUNEK 3.

Konstrukcja dodatnio zorientowanej OFN



Źródło: [Kosiński, 2006].

Kiedy $f_S(0) > g_S(0)$, to wtedy warunek (23) opisuje ujemną orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca f_S jest malejąca lub stała i funkcja opadająca g_S jest rosnąca lub stała. Z zależności: (5), (17) i (18) wynika, że ujemnie zorientowana OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jednoznacznie determinuje FN$S(g_S(0), g_S(1), f_S(1), f_S(0))$ opisaną przez swą funkcję przynależności $\mu_S: \mathbb{R} \to [0; 1]$ daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < g_S(0) \\ g_S^{-1}(x) & g_S(0) \leq x < g_S(1) \\ 1 & g_S(1) \leq x \leq f_S(1), \\ f_S^{-1}(x) & f_S(1) < x \leq f_S(0) \\ 0 & f_S(0) < x \end{cases} \tag{25}$$

W szczególnym przypadku OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jest trapezoidalna OFN $\overleftrightarrow{Tr}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$, określona przez następującą parę Kosińskiego:

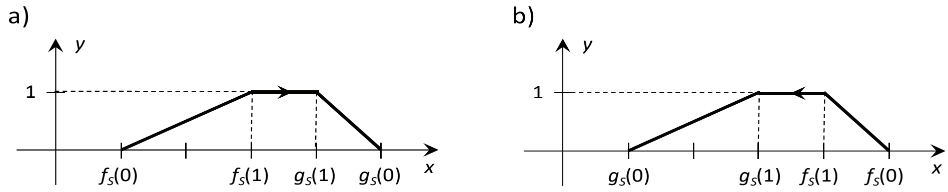
$$f_S(y) = \left(f_S(1) - f_S(0)\right) \cdot y + f_S(0), \tag{26}$$

$$g_S(y) = \left(g_S(1) - g_S(0)\right) \cdot y + g_S(0). \tag{27}$$

Funkcja przynależności przykładowej dodatnio zorientowanej $\overleftrightarrow{Tr}(f_S(0), f_S(1)$ $g_S(1), g_S(0))$ jest przedstawiona na rysunku 4a. Z kolei, na rysunku 4b znajduje się wykres funkcji przynależności przykładowej ujemnie zorientowanej $\overleftrightarrow{Tr}(f_S(0), f_S(1),$ $g_S(1), g_S(0))$.

RYSUNEK 4.

Funkcja przynależności trapezoidalnej OFN



Źródło: [Kosiński, 2006].

Na koniec warto zauważyć, że w przypadku $f_S(0) = g_S(0)$ orientacja OFN jest niezdefiniowana. Wtedy jednak rozpatruje się liczbę $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(0), f_S(0), f_S(0))$, jako ze swej natury niezorientowaną liczbę rzeczywistą $f_S(0) \in \mathbb{R}$.

4. Uogólnienie pojęcia skierowanej liczby rozmytej

Na rysunku 2. uwidoczniono prawą funkcję Goetschela-Voxmana r_S, reprezentującą przykładową BPV, która jest malejąca na przedziale $\left[0; \frac{1}{1+\delta C}\right]$ i stała na przedziale $\left[\frac{1}{1+\delta C}, 1\right]$. Porównując to spostrzeżenie z definicją 3., można stwierdzić, że nie istnieje para Kosińskiego mogąca nadać orientację przykładowej BPV. Z drugiej strony Łyczkowska-Hanćkowiak [2017] uzasadniła nadanie BPV orientacji poprzez potrzebę oznaczenia subiektywnej prognozy zwrotu trendu przyszłych ocen BPV. Wywołuje to konieczność rozszerzenia definicji 3. pary Kosińskiego. W dalszych rozważaniach autor artykułu posłużył się poniższą, uogólnioną definicją pary Kosińskiego.

Definicja 5. Para Kosińskiego jest to uporządkowana para (f_S, g_S) ciągłych słabo monotonicznych suriekcji $f_S: [0,1] \to UP_S$ i $g_S: [0,1] \to DOWN_S$, spełniających warunki: (19), (20) i (21).

Wtedy definicja 4. OFN pozostaje bez zmian. Przestrzeń wszystkich OFN oznaczono za pomocą symbolu $\mathfrak{K}$.

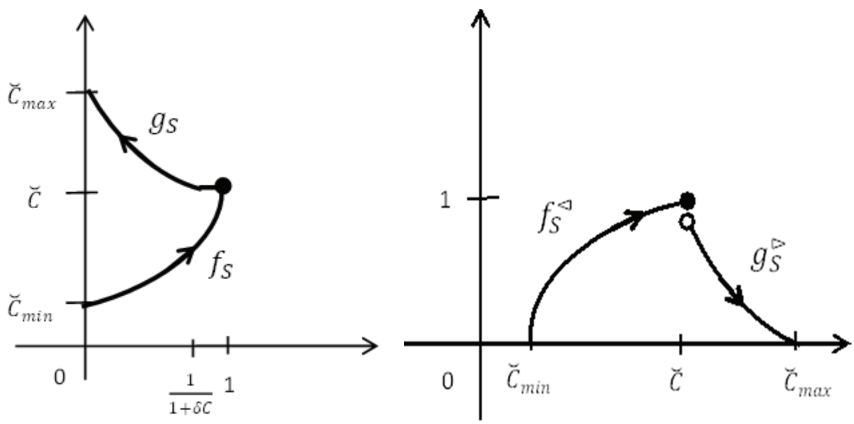
Kiedy $f_S(0) < g_S(0)$, to wtedy warunek (22) opisuje dodatnią orientację OFN. W tym przypadku funkcja wznosząca f_S jest niemalejąca i funkcja opadająca g_S jest nierosnąca. Ponadto, z zależności: (5), (15) i (16) wynika, że dodatnio zorientowana OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jednoznacznie wyznacza FN $S(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ opisaną przez swą funkcję przynależności $\mu_S: \mathbb{R} \to [0; 1]$ daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < f_S(0) \\ f_S^{\lhd}(x) & f_S(0) \le x < f_S(1) \\ 1 & f_S(1) \le x \le g_S(1), \\ g_S^{\rhd}(x) & g_S(1) < x \le g_S(0) \\ 0 & g_S(0) < x \end{cases} \quad (28)$$

Dzięki tym uogólnieniom można m.in. stwierdzić, że jeśli przewiduje się wzrost oceny przykładowej BPV , to wtedy można ją przedstawić jako dodatnio zorientowaną OFN $\overleftrightarrow{S}(\breve{C}_{min}, \breve{C}, \breve{C}, \breve{C}_{max})$. Na rysunku 5a przedstawiono wykresy pary Kosińskiego, wyznaczającej dodatnio zorientowaną przykładową BPV. Na rysunku 5b zobrazowano wykres funkcji przynależności tej dodatnio zorientowanej BPV.

RYSUNEK 5.

Dodatnio zorientowana BPV



Źródło: [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017].

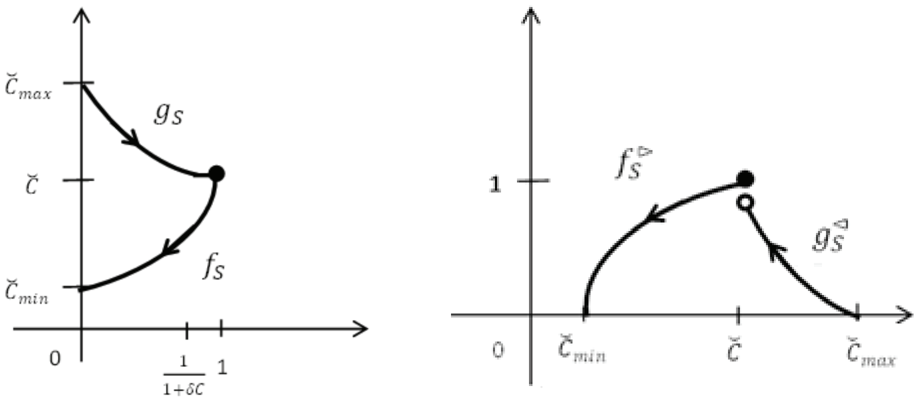
Kiedy $f_S(0) > g_S(0)$, to wtedy warunek (23) opisuje ujemną orientację OFN. Wówczas funkcja wznosząca f_S jest nierosnąca i funkcja opadająca g_S jest niemalejąca. Dzięki zależnościom: (5), (15) i (16) ujemnie zorientowana OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ jednoznacznie determinuje FN $S(g_S(0), g_S(1), f_S(1), f_S(0))$, opisaną przez swą funkcję przynależności $\mu_S: \mathbb{R} \to [0; 1]$ daną następująco:

$$\mu_S(x) = \begin{cases} 0 & x < g_S(0) \\ g_S^{\lhd}(x) & g_S(0) \le x < g_S(1) \\ 1 & g_S(1) \le x \le f_S(1), \\ f_S^{\rhd}(x) & f_S(1) < x \le f_S(0) \\ 0 & f_S(0) < x \end{cases} \quad (29)$$

Dzięki tym uogólnieniom można m.in. stwierdzić, że jeśli przewiduje się spadek oceny przykładowej BPV, to wtedy można ją przedstawić jako ujemnie zorientowaną OFN $\overleftrightarrow{S}(\check{C}_{max}, \check{C}, \check{C}, \check{C}_{min})$. Na rysunku 6a przedstawiono wykresy pary Kosińskiego, wyznaczającej ujemnie zorientowaną przykładową BPV. Na rysunku 6b zobrazowano wykres funkcji przynależności ujemnie zorientowanej przykładowej BPV.

RYSUNEK 6.

Ujemnie zorientowana BPV



a) b)

Źródło: [Łyczkowska-Hanćkowiak, 2017].

Relacje pomiędzy OFN $\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0))$ a zerem $0 \in \mathbb{R}$ są zdefiniowane w następujący sposób:

$$\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)) > 0 \Leftrightarrow \min\{f_S(0), g_S(0)\} > 0, \qquad (30)$$

$$\overleftrightarrow{S}(f_S(0), f_S(1), g_S(1), g_S(0)) \neq 0 \Leftrightarrow f_S(0) \cdot g_S(0) > 0. \qquad (31)$$

5. Arytmetyka skierowanych liczb rozmytych

W tym rozdziale wszystkie symbole $+, -, \times, /$ podstawowych działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych zaprezentowano za pomocą symbolu $\circ$.

Dubois i Prade [1978] pierwsi wprowadzili operacje arytmetyczne na FN w sposób zgodny z zasadą rozszerzenia Zadeha [1975 a, b, c].

Niech $A, B, C \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ są FN. Dowolne działanie arytmetyczne $\circ$ można rozszerzyć do działania $\odot$ na FN za pomocą tożsamości:

$$C = A \circledcirc B, \tag{32}$$

gdzie:

$$\mu_C(z) = \sup\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}: z = x \circ y\,, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}. \tag{33}$$

Goetschel i Voxman [1986] dowiedli, że mamy tutaj:

$$l_C = l_A \circ l_B \wedge r_C = r_A \circ r_B. \tag{34}$$

Formalna prostota tych zależności jest istotną zaletą definiowania za ich pomocą działań arytmetycznych na FN.

Kosiński wraz ze współautorami [Kosiński, Prokopowicz, Ślęzak, 2002 a, b; 2003] zaproponował poniższe rozszerzenie działań arytmetycznych do przypadku działań na OFN.

Niech $\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B}, \overleftrightarrow{C} \in \mathfrak{K}$. Dowolne działanie arytmetyczne $\circ$ można rozszerzyć do działania $\circledcirc$ na OFN dzięki tożsamości:

$$\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{A} \circledcirc \overleftrightarrow{B}, \tag{35}$$

gdzie:

$$f_C = f_A \circ f_B \wedge g_C = g_A \circ g_B. \tag{36}$$

W obu powyższych rozszerzeniach dzielnik musi być niezerowy, to jest spełniający relację (31). Jednocześnie łatwo można sprawdzić, że dla zorientowanych licz trapezoidalnych mamy:

$$\overleftrightarrow{Tr}(a \circ e, b \circ f, c \circ g, d \circ h) = \overleftrightarrow{Tr}(a, b, c, d) \circ \overleftrightarrow{Tr}(e, f, g, h). \tag{37}$$

Bez trudu można stwierdzić[1], że jeśli OFN mają identyczne orientacje, to rezultaty uzyskane za pomocą arytmetyki Kosińskiego są identyczne z wynikami uzyskanymi za pomocą arytmetyki wprowadzonej przez Dubois i Prade. Oznacza to, że dla dowolnej pary OFN $\left(\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B}\right)$ o identycznej orientacji warunek (35) implikuje warunek (32). Oczywiście należy tutaj pamiętać, że zgodnie z definicją 5., OFN $\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B}, \overleftrightarrow{C}$ zostały utworzone poprzez nadanie orientacji FN $A, B, C \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Ponadto, Kosiński [2006] pokazał, że jeśli OFN mają różne orientacje, to rezultaty uzyskane za pomocą jego arytmetyki mogą być różne od wyników uzyskanych dzięki arytmetyce wprowadzonej przez Dubois i Prade.

Oznacza to, że dla dowolnej pary OFN $\left(\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B}\right)$ o różnej orientacji warunek (35) nie jest warunkiem dostatecznym dla (32).

Kontrprzykład: Rozważmy sumę Kosińskiego $\bar{\bar{A}}$ trapezoidalnych OFN $\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{Tr}(1; 3; 7; 8\ )$ i $\overleftrightarrow{D} = \overleftrightarrow{Tr}(5; 4; 4; 2\ )$ to jest:

[1] Wystarczy zestawić razem zależności: (34), (35), (37) i (38) z definicją 5. i warunkami: (22) i (23).

$$\bar{\bar{A}} = \overleftrightarrow{Tr}(1;\ 3;\ 7;8) \oplus \overleftrightarrow{Tr}(5;4;4;2).$$

Stosując zależności (36), otrzymujemy:

$$6 = 1 + 5 = f_C(0) + f_D(0) = f_A(0) < f_A(1) = f_C(1) + f_D(1) = 3 + 4 = 7$$

$$10 = 8 + 2 = g_C(0) + g_B(0) = g_A(0) < g_A(1) = g_C(1) + g_B(1) = 7 + 4 = 11.$$

To oznacza, że funkcje f_A i g_B są równocześnie rosnące. Jest to sprzeczność! To oznacza, że w tym przypadku zależności (36) nie wyznaczyły pary Kosińskiego. Wykres uporządkowanej pary, określonej przez te zależności, jest przedstawiony na rysunku 7a.

Wniosek: Istnieją takie pary Kosińskiego, że ich suma Kosińskiego nie istnieje.

Z tego powodu powinno się zmodyfikować działania arytmetyczne na OFN w ten sposób, aby wynik działania zawsze istniał. W tym artykule poddaje się myśl związaną z akceptacją następującej modyfikacji działań arytmetycznych zaproponowanych przez Kosińskiego.

Niech $\overleftrightarrow{A}, \overleftrightarrow{B}, \overleftrightarrow{C} \in \mathfrak{K}$. Dowolne działanie arytmetyczne $\circ$ rozszerzamy do zmodyfikowanego działania $\boxed{\circ}$ na OFN za pomocą tożsamości:

$$\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{A} \boxed{\circ} \overleftrightarrow{B}, \tag{38}$$

gdzie $\overleftrightarrow{C}$ jest reprezentowane przez parę Kosińskiego(f_C, g_C) daną przez tożsamości:

$$f_C(y) = \begin{cases} \min\{f_A(y) \circ f_B(y), f_C(1)\} \, (f_C(1) < g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha \leq \beta) \\ \max\{f_A(y) \circ f_B(y), f_C(1)\} \, (f_C(1) > g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha > \beta), \end{cases} \tag{39}$$

$$g_C(y) = \begin{cases} \max\{g_A(y) \circ g_B(y), g_C(1)\} \, (f_C(1) < g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha \leq \beta) \\ \min\{g_A(y) \circ g_B(y), g_C(1)\} \, (f_C(1) > g_C(1)) \vee (f_C(1) = g_C(1) \wedge \alpha > \beta), \end{cases} \tag{40}$$

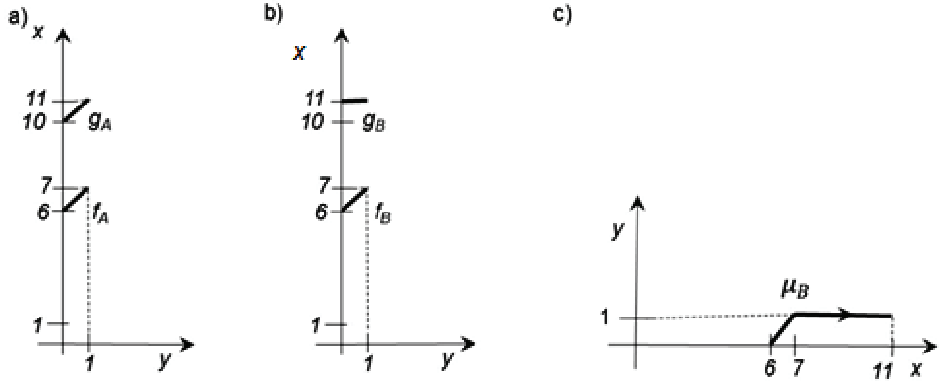
gdzie:

$$\begin{cases} f_C(1) = f_A(1) \circ f_B(1) \\ g_C(1) = g_A(1) \circ g_B(1) \\ \alpha = f_A(0) \circ f_B(0) \\ \beta = g_A(0) \circ g_B(0). \end{cases} \tag{41}$$

Dla dowolnej pary OFN rezultat zmodyfikowanego działania $\boxed{\circ}$ jest równy OFN reprezentowanej przez tę parę Kosińskiego, która jest najbliższa uporządkowanej pary określonej za pomocą tożsamości (36). To powoduje, że jeśli dla danej pary OFN istnieje wynik arytmetycznego działania Kosińskiego $\odot$, to wtedy jest on równy wynikowi zmodyfikowanego działania $\boxed{\circ}$. Jeśli są dwie różne OFN najbliższe wynikowi działania Kosińskiego $\odot$, to wtedy wybieramy spośród nich zawsze jednoznacznie określoną, dodatnio zorientowaną OFN.

RYSUNEK 7.

Dodawanie trapezoidalnych OFN



Źródło: opracowanie własne.

Przykład: Przedstawiono tutaj pewne przypadki zmodyfikowanych sum $\boxplus$ trapezoidalnych OFN. Warto zauważyć, że w żadnym z tych przypadków suma Kosińskiego $\oplus$ nie istnieje.

$$\overleftrightarrow{Tr}(1;\ 2;\ 4;6) \boxplus \overleftrightarrow{Tr}(5;3;2;1) = \overleftrightarrow{Tr}(5;5;6;7)$$

$$\overleftrightarrow{Tr}(6;\ 4;\ 2;1) \boxplus \overleftrightarrow{Tr}(1;2;3;5) = \overleftrightarrow{Tr}(7;6;5;5)$$

$$\overleftrightarrow{Tr}(1;\ 2;\ 4;4) \boxplus \overleftrightarrow{Tr}(5;3;2;1) = \overleftrightarrow{Tr}(5;5;6;6)$$

$$\overleftrightarrow{Tr}(4;\ 4;\ 2;1) \boxplus \overleftrightarrow{Tr}(1;2;3;5) = \overleftrightarrow{Tr}(6;6;5;5)$$

$$\overleftrightarrow{Tr}(1;\ 2;\ 3;4) \boxplus \overleftrightarrow{Tr}(6;3;2;2) = \overleftrightarrow{Tr}(7;5;5;5)$$

$$\overleftrightarrow{B} = \overleftrightarrow{Tr}(1;\ 3;\ 7;8) \boxplus \overleftrightarrow{Tr}(5;4;4;2) = \overleftrightarrow{Tr}(6;7;11;11)$$

Ostatnia, zmodyfikowana suma jest reprezentowana przez parę Kosińskiego, przedstawioną na rysunku 7b. Funkcja przynależności tej sumy jest dana na rysunku 7c.

6. Podsumowanie

W pracy, dzięki wykorzystaniu twierdzeń Goetschela i Voxmana [1986], udało się przedstawić teorię skierowanych liczb rozmytych Kosińskiego jako ciągłą kontynuację ewolucji teorii liczb rozmytych. W sposób niezbity dowiedziono, że zgodnie z przypuszczeniami Kosińskiego [2006], jeśli w jego arytmetyce ograniczyć się do liczb o identycznej orientacji, to uzyska się wprowadzoną przez Dubois i Prade [1978] arytmetykę liczb rozmytych. Wobec przywołanych już twierdzeń Goetschela i Voxmana, podobnych efektów rozszerzenia można oczekiwać także na gruncie całej teorii liczb rozmytych. Zatem teoria Kosińskiego może być brana pod uwagę jako rozszerzenie teorii liczb rozmytych. Wniosek ten otwiera szerokie, nowe pole badawcze.

Za sprawą uogólnienia pojęcia pary Kosińskiego udało się teorię skierowanych liczb rozmytych uogólnić do przypadku liczb rozmytych z półciągłymi z góry funkcjami odniesienia.

W przeciwieństwie do arytmetyki Kosińskiego, wszystkie zaproponowane w pracy rozszerzenia działań arytmetycznych są zamknięte w przestrzeni skierowanych liczb rozmytych.

Wszystkie te wyniki dobrze osadzają teorię skierowanych liczb rozmytych na gruncie matematyki systemów rozmytych. Zwiększa to możliwości zastosowania tej teorii w wielu dziedzinach teorii i praktyki.

Literatura

Dubois D., Prade H., 1978, *Operations on fuzzy numbers*, "International Journal System Sciences", vol. 9, DOI: 10.1080/00207727808941724.

Dubois D., Prade H., 1979, *Fuzzy real algebra: some results*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 2, DOI: 10.1016/0165-0114(79)90005-8.

Dubois D., Prade H., 1980, *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, New York.

Goetschel R., Voxman W., 1986, *Elementary fuzzy calculus*, "Fuzzy Sets and Systems", vol. 18, DOI: 10.1016/0165-0114(86)90026-6.

Kacprzak D., 2012, *Zastosowanie skierowanych liczb rozmytych do prezentacji cen akcji*, „Optimum. Studia Ekonomiczne", nr 60.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002a, *Drawback of fuzzy arithmetics – new intuitions and propositions*, [in:] *Methods of Aritificial Intelligence*, T. Burczyński, W. Cholewa, W. Moczulski (eds.), Silesian University of Technology, Gliwice.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2002b, *Fuzzy numbers with algebraic operations: algorithmic approach*, [in:] *Proc. IIS'2002, Sopot, June 3–6, Poland*, M. Klopotek, S.T. Wierzchoń, M. Michalewicz (eds.), Physica Verlag, Heidelberg.

Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., 2003, *Ordered fuzzy numbers*, "Bulletin of the Polish Academy of Sciences", no. 51(3).

Kosiński W., 2006, *On fuzzy number calculus*, "Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.", no. 16(1).

Łyczkowska-Hanćkowiak A., 2017, *Behawioralna wartość bieżąca w ujęciu skierowanych liczb rozmytych*, „Optimum. Studia Ekonomiczne", nr 3(87).

Piasecki K., 2011a, *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań, DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.

Piasecki K., 2011b, *Behavioural present value*, "SSRN Electronic Journal", DOI: 10.2139/ssrn.1729351.

Piasecki K., 2014, *Behawioralna wartość bieżąca – nowe podejście*, „Optimum. Studia Ekonomiczne", nr 67, DOI:10.15290/ose.2014.01.67.03.

Piasecki K., 2016, *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behawioralnych*, Edu-Libri, Kraków-Legionowo.

Piasecki K., Siwek J., 2015, *Behavioural Present Value Defined as Fuzzy Number – a New Approach*, "Folia Oeconomica Stetinensia", no. 15(2), DOI: 10.1515/foli-2015-0033.

Prokopowicz P., 2015, *The Directed Inference for the Kosinski's Fuzzy Number Model*, "Proceedings of the Second International Afro-European Conferencefor Industrial Advancement AECIA 427".

Prokopowicz P., Pedrycz W., 2015, *The Directed Compatibility Between Ordered Fuzzy Numbers – A Base Tool for a Direction Sensitive Fuzzy Information Processing*, "Artificial Intelligence and Soft Computing", no. 9 (119).

Roszkowska E., Kacprzak D., 2016, *The fuzzy SAW and fuzzy TOPSIS procedures based on ordered fuzzy numbers*, Information Sciences, DOI:10.1016/j.ins.2016.07.044.

Zadeh L.A., 1965, *Fuzzy sets*, "Information and Control", no. 8, DOI:10.1016/s0019-9958(65)90241-x.

Zadeh L.A., 1975a, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part I*, "Information linguistic variable. Expert Systems with Applications", no. 36(2).

Zadeh L.A., 1975b, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part II*, "Information Sciences", no. 8(4), DOI:10.1016/0020-0255(75)90046-8.

Zadeh L.A., 1975c, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part III*, "Information Sciences", no. 9(1), DOI:10.1016/0020-0255(75)90017-1.