

Agnieszka LACH¹

ZASTOSOWANIE KOPULI W ZADANIU MINIMALIZACJI WARTOŚCI ZAGROŻONEJ PORTFELA

Streszczenie

W artykule zastosowano wybrane kopule w zadaniu minimalizacji wartości zagrożonej (VaR) portfeli w okresach charakteryzujących się odmiennym typem trendu. Rozkłady empiryczne stóp zwrotu z akcji 10 spółek wchodzących w skład indeksu WIG20 połączono kopułami Gaussa, t-Studenta, Claytona, Franka, Gumbela i odwróconą Gumbela. Symulacje z tak otrzymanych rozkładów wielowymiarowych stanowiły podstawę do utworzenia portfeli minimalizujących wartość zagrożoną. Jakość VaR, wyliczoną dla pozycji krótkiej i długiej, oceniono testem Kupca. Wartość zagrożona została poprawnie wyznaczoną dla rozkładów utworzonych za pomocą: dwóch kopuli archimedesowych uwzględniających zależność w dolnym ogonie (Claytona i odwróconej Gumbela), jednej kopuli z symetryczną zależnością w ogonach (t-Studenta) oraz jednej kopuli nie mającej zależności w ogonach (Gaussa).

Słowa kluczowe: kopule, wartość zagrożona, optymalizacja portfela

APPLICATION OF COPULAS FOR MINIMISING PORTFOLIO VALUE AT RISK

Summary

In the paper, selected copulas are applied in the task of minimizing the value at risk (VaR) of portfolios in the periods characterized by different types of trend. Empirical distributions of returns on 10 companies listed on WIG20 index are combined with Gaussian, t-Student, Clayton, Frank, Gumbel, and rotated Gumbel copulas. Simulations from thus obtained multivariate distributions are the basis for minimizing the VaR of portfolios. The quality of the VaR, calculated for both short and long positions, are assessed with the Kupiec test. The value at risk is properly set for joint distributions created with the following copulas: two Archimedean copulas with lower tail dependence (Clayton and rotated Gumbel), one copula with symmetric dependence in tails (t-Student), and one copula with no tail dependence (Gaussian).

Key words: copulas, value at risk, portfolio optimisation

DOI: 10.15290/ose.2015.02.74.09

1. Wstęp

Ryzyko nieodzownie towarzyszy każdemu inwestorowi, podobnie jak chęć jego precyzyjnego określenia. Spośród wielu dostępnych miar ryzyka szczególną uwagę

¹ Mgr Agnieszka Lach – Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu; e-mail: alach@interia.pl.

badaczy w ostatnich latach przyciągnęła wartość zagrożona. Wraz ze wzrostem jej popularności rosła również ilość metod opracowanych do coraz dokładniejszego jej pomiaru. Wśród nich znalazła się metoda Monte Carlo, polegająca na symulowaniu danych z pewnego hipotetycznego rozkładu, od którego zależy dokładność pomiaru ryzyka.

Kopule, poprzez rozdzielenie struktury zależności od rozkładów brzegowych, otwierają szerokie możliwości w zakresie formowania rozkładów wielowymiarowych. Z jednej strony możliwe jest modelowanie wyłącznie struktury zależności pomiędzy walorami, a więc uchwycenie takich cech rynków kapitałowych, jak nasilające się, zgodne ruchy cenowe w okresach spadków i wzrostów. Z drugiej strony takie podejście nie koliduje z kształtowaniem rozkładów pojedynczych walorów, które uwzględniają grubość ogonów, skośność czy leptokurtyczność. Dotychczasowe badania na rynkach zagranicznych wskazują, że w porównaniu z innymi powszechnie stosowanymi metodami kopule poprawiają jakość wartości zagrożonej wyliczonej dla portfeli [Braun, Grziska, 2011; Cherubini, Luciano, Vecchiato, 2004; Embrechts, Höing, Juri, 2003]. Badania przeprowadzone na rynku polskim dla portfeli o równych udziałach walorów prowadzą do podobnych wniosków [Doman, 2011; Papla, Piontek, 2003].

W artykule skupiono się wyłącznie na porównaniu struktury zależności wybranych kopuli, dlatego przyjęto, że rozkłady brzegowe są rozkładami empirycznymi. Z uformowanych w ten sposób rozkładów wielowymiarowych symulowano stopy zwrotu, na podstawie których minimalizowano wartość zagrożoną portfela. Czynność powtarzano dla pozycji krótkiej oraz długiej, w okresach różniących się typem trendu. Celem badania było porównanie wartości zagrożonej portfela, oszacowanej na podstawie wybranych kopuli, z rzeczywistą wartością zagrożoną portfela.

2. Kopule

Kopule są łącznikami pomiędzy wielowymiarowymi rozkładami łącznymi oraz ich rozkładami brzegowymi. Jeżeli $X = (X_1, \dots, X_n)$ oznacza n -wymiarowy wektor zmiennych losowych, wówczas zależność pomiędzy rozkładem łącznym F i rozkładami brzegowymi F_i , $i=1, \dots, n$ na mocy twierdzenia Sklara można opisać za pomocą kopuli C [Doman, 2011, s. 14]:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (1)$$

Kopulę tę można wyodrębnić za pomocą wzoru:

$$C(u_1, \dots, u_n) = F\left(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)\right), \quad (2)$$

gdzie $F_i^{(-1)}$ oznacza funkcję kwantylową dystrybuanty F_i . Wzór (2) pokazuje, jak wyodrębnić wyłącznie strukturę zależności z rozkładu wielowymiarowego. Ze wzoru tego wynika również, że kopule nie zależą od rozkładów brzegowych, tylko od zmiennych u_i , które posiadają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$.

Zależność pomiędzy stopami zwrotów z aktywów oznacza jednoczesną, zgodną zmianę ich cen. Zależność ta, zwiększająca się w okresach silnych ruchów cenowych,

charakteryzuje się asymetrią – wspólny kierunek zmian jest silniejszy w okresach spadków, niż w okresach wzrostów [Ang, Chen, 2002; Longin, Solnik, 2001].

W punktach 3. i 4. zaprezentowano kopule wykorzystane w badaniu:

- eliptyczne: gaussowską oraz t-Studenta;
- archimedesowe: Claytona, Franka oraz Gumbela.

3. Kopule eliptyczne

Rozkłady eliptyczne są symetryczne i zakładają liniową zależność pomiędzy zmiennymi losowymi, są więc nieodpowiednimi narzędziami do modelowania stóp zwrotu na rynkach kapitałowych. Dodatkowo ich rozkłady brzegowe są rozkładami eliptycznymi tego samego typu, dlatego nie powinno się ich stosować, jeśli rozkłady zmiennych losowych różnią się kształtem. Ostatni problem można rozwiązać poprzez wyznaczenie dystrybuant dowolnych rozkładów brzegowych oraz powiązanie ich kopułami eliptycznymi. Utworzony w ten sposób rozkład wielowymiarowy nosi nazwę meta-eliptycznego [Heilpern, 2007, s. 65].

Kopula gaussowska

Kopula Gaussa generuje wielowymiarowy standaryzowany rozkład normalny tylko wtedy, gdy rozkłady brzegowe są również standaryzowanymi rozkładami normalnymi [Cherubini, Luciano, Vecchiato, 2004, s. 113]. W przeprowadzonych badaniach kopule łączyły się z rozkładami empirycznymi, nie uzyskano więc wielowymiarowego rozkładu normalnego, tylko rozkład meta-gaussowski. W takim przypadku n -wymiarowa kopula gaussowska z macierzą korelacji R wyraża się wzorem:

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R^n \left(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n) \right), \quad (3)$$

gdzie Φ_R^n jest n -wymiarową dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego z macierzą korelacji R , a $F_i^{(-1)}$ oznacza funkcję odwrotną do dystrybuanty rozkładu empirycznego. Kopula Gaussa nie posiada zależności w ogonach rozkładów.

Kopula t-Studenta

Kopulę t-Studenta, która ma n -wymiarów, ν stopni swobody oraz macierz korelacji R , można przedstawić w postaci:

$$C_{\nu,R}^t(u_1, \dots, u_n) = t_{\nu,R}^n \left(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n) \right), \quad (4)$$

gdzie $t_{\nu,R}^n$ jest n -wymiarową dystrybuantą rozkładu t-Studenta z ν stopniami swobody oraz macierzą korelacji R , a $F_i^{(-1)}$ oznacza funkcję odwrotną do dystrybuanty rozkładu brzegowego. Kopula t-Studenta posiada symetryczną zależność w dolnym i górnym ogonie rozkładu.

4. Kopule archimedesowe

Z pojęciem kopuli archimedesowych jest związana funkcja zwana generatorem. Generator $\varphi: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ jest ściśle malejącą, wypukłą funkcją, spełniającą warunek $\varphi(1) = 0$. Generator jest nazywany silnym, jeśli $\varphi(0) = \infty$. W przypadku tworzenia rozkładów wielowymiarowych, funkcja odwrotna do generatora silnego φ^{-1} musi dodatkowo spełniać warunek [Heilpern, 2007, s. 50]:

$$(-1)^n (\varphi^{-1})^{(n)}(t) \geq 0, \quad (5)$$

gdzie $f^{(n)}$ oznacza pochodną n -tego rzędu funkcji f (dla $t > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$). Funkcję spełniającą powyższy warunek nazywamy całkowicie monotoniczną.

Tak określony generator oraz jego odwrotność pozwalają na wyznaczenie kopuli archimedesowej dla przypadku wielowymiarowego:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)). \quad (6)$$

Kopule archimedesowe umożliwiają opis asymetrycznych zależności w ogonach rozkładów, ale ich użycie jest ograniczone z dwóch powodów – mają zazwyczaj niewiele parametrów (jeden lub dwa), a wszystkie pary zmiennych charakteryzuje ten sam typ zależności [Doman, 2011, s. 25].

Opis wybranych kopuli archimedesowych ograniczono do podania generatora, funkcji przeciwnej do generatora oraz kopuli zbudowanej na ich podstawie [Cherubini, Luciano, Vecchiato, 2004, s. 150-151].

Rodzina Claytona

Kopula Claytona ma zależność w dolnym ogonie rozkładu, w górnym ogonie zależność nie występuje.

Generator jest postaci:

$$\varphi(u) = u^{-\theta} - 1, \quad (7)$$

a funkcja odwrotna do generatora, która jest całkowicie monotoniczna dla $\theta > 0$:

$$\varphi^{-1}(t) = (t + 1)^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (8)$$

Kopula Claytona ma postać:

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\theta} - n + 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \text{dla } \theta > 0. \quad (9)$$

Rodzina Franka

Kopule Franka opisują zależności symetryczne, a w ogonach ich rozkładów nie ma zależności.

Generator jest postaci:

$$\varphi(u) = \ln \left(\frac{\exp(-\theta u) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \right), \quad (10)$$

a funkcja odwrotna do generatora, która jest całkowicie monotoniczna dla $\theta > 0$:

$$\varphi^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta} \ln(1 + e^t(e^{-\theta} - 1)). \quad (11)$$

Kopula Franka ma postać:

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{\prod_{i=1}^n (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right\},$$

dla $\theta > 0$, gdy $n \geq 3$. (12)

Rodzina Gumbela

Kopula Gumbela ma zależność w górnym ogonie, natomiast w dolnym ogonie zależność nie występuje.

Generator jest postaci:

$$\varphi(u) = (-\ln(u))^\theta, \quad (13)$$

a funkcja odwrotna do generatora, która jest całkowicie monotoniczna dla $\theta \geq 1$:

$$\varphi^{-1}(t) = \exp(-t^{\frac{1}{\theta}}). \quad (14)$$

Kopula Gumbela ma postać:

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad \text{dla } \theta \geq 1. \quad (15)$$

5. Oszacowanie parametrów kopuli

W badaniu przyjęto, że dystrybuanta zmiennych losowych (X_1, \dots, X_n) została opisana przez odpowiednio dobraną kopulę oraz empiryczne rozkłady brzegowe. Parametry kopuli oszacowano metodą kanoniczną. Metoda ta składa się z dwóch etapów [Heilpern, 2007, s. 135].

1. Oszacowania brzegowych dystrybuant empirycznych:

$$F_{i;m}(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^m \mathbf{1}(X_{ji} \leq x), \quad (16)$$

gdzie m oznacza liczbę obserwacji.

2. Oszacowania parametrów kopuli metodą największej wiarygodności. Estymator $\hat{\theta}$ parametrów otrzymuje się maksymalizując logarytm funkcji wiarygodności l

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^m \log(c(u_{j1}, \dots, u_{jn}; \boldsymbol{\theta})), \quad (17)$$

gdzie:

c – gęstość kopuli C ,

$u_{ji} = F_{i;m}(x_{ji})$.

Symulacja danych z rozkładu wielowymiarowego określonego przez kopulę i rozkłady brzegowe przebiega dwuetapowo. Na pierwszym etapie losowane są z kopuli realizacje (u_1, \dots, u_n) wektora zmiennych losowych (U_1, \dots, U_n) . Zmienne te posiadają rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$. Następnie wylosowanym realizacjom zostają przyporządkowane odpowiednie kwantyle rozkładów brzegowych $(x_1 = F_1^{-1}(u_1), \dots, x_n = F_n^{-1}(u_n))$, które z kolei są realizacjami zmiennych losowych (X_1, \dots, X_n) .

Istnieje wiele algorytmów symulowania danych z kopuli [Heilpern, 2007, s. 97-111; Doman, 2011, s. 32-35]. W wykorzystanym do obliczeń programie R symulacje z kopuli eliptycznych polegają na generowaniu wartości losowych z odpowiadającego im rozkładu eliptycznego, zaś dla wielowymiarowych kopuli archimedesowych opierają się na algorytmie Marschalla i Olkina [Jun, 2007, s. 13].

6. Wartość zagrożona

Wartość zagrożoną dla pozycji długiej można zdefiniować jako kwantyl rzędu α rozkładu stóp zwrotu:

$$VaR_\alpha = -F^{-1}(\alpha), \quad (18)$$

gdzie F^{-1} oznacza funkcję odwrotną do dystrybuanty stóp zwrotu. Wartość zagrożona dla pozycji krótkiej jest natomiast definiowana jako $1 - \alpha$ kwantyl rozkładu:

$$VaR_{1-\alpha} = F^{-1}(1 - \alpha). \quad (19)$$

Po odwróceniu znaków stóp zwrotu pozycję krótką można traktować jak pozycję długą, stąd zadanie minimalizacji wartości zagrożonej dla obydwu przypadków ma tę samą postać. Do wyszukania rozwiązania optymalnego użyto algorytmu symulowanego wyżarzania dostępnego w programie R, który zastosowano do minimalizacji warunkowej wartości zagrożonej portfela w Gubian i in. [Gubian, Hoeng, Suomela, Xiang, 2013]. Algorytm ten nie obsługuje warunków ograniczających w postaci równości. W związku z tym warunek sumowania udziałów spółek w portfelu do jedności został ujęty w funkcji celu w postaci funkcji kary [Yollin, 2009]. Ostatecznie zadanie minimalizacji wartości zagrożonej ma postać:

$$\min (VaR_\alpha + 100 \cdot ((1 - (\sum_{i=1}^n w_i))^2)), \quad (20)$$

$$w_i \geq 0, \quad (21)$$

$$w_i \leq 1, \quad (22)$$

gdzie w_i oznacza udział i -tego waloru w portfelu.

Jakość oszacowanej wartości zagrożonej oceniono za pomocą testu Kupca, zgodnie z którym:

$$H_0: \frac{k}{m} = \alpha, \quad (23)$$

$$H_1: \frac{k}{m} \neq \alpha, \quad (24)$$

gdzie k oznacza liczbę przekroczeń, a α poziom istotności. Statystyka testowa ma natomiast postać:

$$LR = 2 \left(\ln \left(\left(\frac{k}{m} \right)^k \left(1 - \frac{k}{m} \right)^{m-k} \right) - \ln \left((1 - \alpha)^{m-k} \alpha^k \right) \right). \quad (25)$$

Celem badań było wyznaczenie kopuli statycznych, które najlepiej dopasowały się do danych historycznych, dlatego liczbę przekroczeń badano na tym samym okresie, na którym wyliczano zadanie minimalizacji wartości zagrożonej.

7. Kopule w zadaniach optymalizacji portfela

Szeroki przegląd zastosowań kopuli w finansach można znaleźć w opracowaniu Pattona [Patton, 2012]. W kontekście przeprowadzonych badań istotne są zwłaszcza dwa, wymienione w przytoczonej pozycji, walory aplikacyjne kopuli: do zarządzania ryzykiem oraz do optymalizacji portfela.

W ramach zarządzania ryzykiem w badaniach skupiono się głównie na pomiarze wartości zagrożonej, a wpływ wybranych kopuli na VaR był zazwyczaj rozpatrywany dla portfeli o równych udziałach walorów. Cherubini, Luciano i Vecchiato [Cherubini, Luciano, Vecchiato, 2004] badali wartość zagrożoną portfela złożonego z trzech indeksów o równych udziałach. Embrechts, Höing i Juri [Embrechts, Höing, Juri, 2003] eksplorowali VaR portfeli dwuskładnikowych, posiadających normalne rozkłady brzegowe. W 2006 roku Embrechts i Höing rozszerzyli badania nad VaR na portfele wielowymiarowe. Braun i Grziska [Braun, Grziska, 2011] badali portfele o równych udziałach złożone z walorów z państw grupy G7.

Kopule znajdują również zastosowanie w zadaniach optymalizacji portfela. Patton [Patton, 2004] maksymalizował funkcję użyteczności inwestora przy różnych poziomach stałej względnej awersji do ryzyka (ang. *CRAA – constant relative risk aversion*), dla portfeli złożonych z dwóch indeksów. Zależność pomiędzy stopami zwrotu jest modelowana szerokim wachlarzem kopuli. Autor stwierdził, że przewaga portfeli zbudowanych na podstawie rozkładów uwzględniających asymetrię jest statystycznie istotna, zwłaszcza gdy dopuszcza się krótką sprzedaż. Hong, Tu i Zhou [Hong, Tu, Zhou, 2007] optymalizowali dziesięciowymiarowe portfele dla inwestora z awersją do rozczarowania (ang. *DA – disappointment aversion*). Autorzy dowodzili, że uwzględnienie asymetrii rozkładów znacząco poprawia wybór optymalnego portfela. Christoffersen i Langlois [Christoffersen, Langlois, 2011] wykorzystali kopule do opisanja zależności pomiędzy czterema czynnikami modelu Famy i Frencha (trzy czynniki standardowego modelu, premię za ryzyko, kapitalizację i wielkość spółek, uzupełniono o czynnik momentum). Autorzy, podobnie jak Patton, maksymalizowali funkcję użyteczności inwestora na podstawie różnych poziomów stałej względnej awersji do ryzyka, uwzględ-

niając jednocześnie czteroczynnikowy model Famy i Frencha. Tutaj również okazuje się, że korzyści z modelowania za pomocą kopuli są większe, niż w przypadku zastosowania rozkładu normalnego.

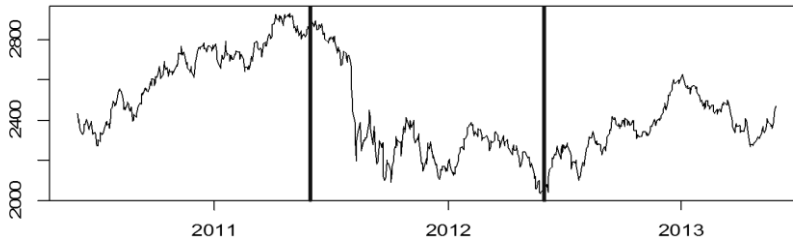
Z przytoczonych powyżej przykładów wynika, że dotychczasowe badania przeprowadzone z użyciem kopuli zazwyczaj są ograniczone do kilku wymiarów. Wielowymiarowość w modelowaniu zależności wciąż stanowi spore wyzwanie i jest wskazana jako kierunek przyszłych badań [Patton, 2012].

8. Wyniki badań

Badania obejmęły trzyletni okres od czerwca 2010 do maja 2013 roku. Wybrany przedział czasowy podzielono na trzy roczne okresy (odpowiednio: 252, 252 i 247 obserwacji), wyróżniono również trzyletni okres czwarty, obejmujący wszystkie lata (751 obserwacji). W pierwszym roku na indeksie WIG20 panowała hossa, w drugim bessą, natomiast w trzecim jest widoczny zarówno trend wzrostowy, jak i spadkowy (wykres 1.).

WYKRES 1.

Indeks WIG20 w okresie: czerwiec 2010 rok – maj 2013 rok*



* Pionowymi liniami oddzielono od siebie przedziały czasowe wyróżnione do badań.

Źródło: opracowanie własne.

Do badań wybrano 10 spółek wchodzących w skład indeksu WIG20, reprezentujących różne subindeksy sektorowe. Jeśli w ramach subindeksu występowała więcej niż jedna spółka, wybierano tę o najwyższym udziale w indeksie. Badania przeprowadzono w oparciu o jednodniowe logarytmiczne stopy zwrotu, wyliczone na podstawie kursów zamknięcia. Lista wybranych spółek oraz ich statystyki opisowe w wybranych okresach znajdują się w tabeli 1.

TABELA 1.

Statystyki opisowe wybranych spółek

Okres	Statystyka opisowa	PKOBP	KGHM	PKNORLEN	PGE	EUROCASH	TPSA	ASSECPOL	KERNEL	SYNTHOS	GTC
I rok (czerwiec 2010 – maj 2011)	Minimum	-5,10	-5,29	-3,70	-4,08	-4,43	-8,64	-5,22	-6,68	-7,15	-10,15
	Maksimum	4,63	7,12	6,37	3,23	7,48	7,56	5,45	9,97	6,78	4,78
	Średnia	0,03	0,26	0,13	0,06	0,14	0,06	-0,04	0,10	0,42	-0,07
	Odchylenie standardowe	1,52	2,08	1,70	1,15	1,86	1,71	1,60	2,16	2,10	1,66
	Skośność	0,08	0,25	0,58	-0,05	0,39	-0,76	-0,03	0,63	0,30	-0,94
	Kurtoza	0,63	0,33	1,26	0,86	1,17	5,48	0,78	2,49	1,08	5,67
II rok (czerwiec 2011 – maj 2012)	Minimum	-8,60	-14,89	-11,39	-9,66	-9,10	-12,02	-6,84	-8,07	-13,38	-12,27
	Maksimum	7,58	7,42	6,51	8,11	8,76	4,98	6,56	8,27	11,63	9,02
	Średnia	-0,13	-0,16	-0,19	-0,11	0,11	-0,05	-0,03	-0,15	0,00	-0,49
	Odchylenie standardowe	2,16	3,04	2,44	2,10	2,41	1,75	2,22	2,57	2,95	3,32
	Skośność	-0,24	-1,11	-0,47	-0,39	-0,06	-1,42	-0,11	0,02	-0,64	-0,05
	Kurtoza	1,63	4,15	2,50	3,57	1,72	9,53	0,97	0,84	4,02	0,96
III rok (czerwiec 2012 – maj 2013)	Minimum	-3,18	-21,39	-5,27	-8,38	-10,41	-32,74	-9,01	-8,17	-11,93	-7,52
	Maksimum	4,66	6,53	6,95	6,00	6,72	6,68	4,53	8,62	7,83	7,87
	Średnia	0,03	0,06	0,19	-0,01	0,22	-0,27	-0,06	0,01	0,00	0,16
	Odchylenie standardowe	1,32	2,36	1,90	1,71	2,23	2,94	1,63	2,28	2,21	2,37
	Skośność	0,16	-3,17	0,26	-0,35	-0,57	-6,26	-0,78	-0,16	-0,26	0,17
	Kurtoza	0,05	26,59	1,07	2,72	2,63	62,39	4,48	1,32	3,58	1,32
I-III rok (czerwiec 2010 – maj 2013)	Minimum	-8,60	-21,39	-11,39	-9,66	-10,41	-32,74	-9,01	-8,17	-13,38	-12,27
	Maksimum	7,58	7,42	6,95	8,11	8,76	7,56	6,56	9,97	11,63	9,02
	Średnia	-0,02	0,05	0,04	-0,02	0,16	-0,09	-0,04	-0,01	0,14	-0,14
	Odchylenie standardowe	1,71	2,53	2,04	1,70	2,17	2,21	1,84	2,34	2,46	2,55
	Skośność	-0,17	-1,51	-0,16	-0,43	-0,15	-5,31	-0,25	0,10	-0,42	-0,21
	Kurtoza	2,13	10,10	2,63	4,39	2,13	68,91	2,06	1,49	4,17	2,46

Źródło: obliczenia własne.

Parametry kopuli znajdują się w tabeli 2. W celu oszacowania VaR dla pozycji krótkiej odwracano znaki stóp zwrotu, w efekcie czego ogon górny był modelowany w ten sam sposób, co ogon dolny. Zmienne połączone kopułami archimedesowymi dążą do komonotoniczności, gdy $\theta \rightarrow \infty$. Zmienne dążą do niezależności, gdy $\theta \rightarrow 0$ dla kopuli Claytona i Franka oraz $\theta \rightarrow 1$ dla kopuli Gumbela [Franke, Härdle, Hafner, 2011]. Zależność w górnym ogonie kopuli Gumbela oraz w dolnym ogonie kopuli Claytona wzrasta wraz z parametrem θ . W przypadku kopuli eliptycznych zależność pomiędzy zmiennymi wzrasta wraz z współczynnikiem korelacji ρ . Oszacowania parametrów kopuli są niemal dwukrotnie wyższe w okresie spadków (II rok) niż w okresie wzrostów (I rok) dla kopuli: Claytona, Franka, Gaussa i t-Studenta, co świadczy o rosnącej dodatniej współzależności stóp zwrotu podczas bessy. W ramach tych samych okresów parametry kopuli oszacowane dla pozycji krótkiej i długiej niemal się nie różnią.

Na podstawie oszacowanych powyżej kopuli oraz rozkładów empirycznych pojedynczych walorów utworzono 40 rozkładów wielowymiarowych (5 kopuli x 4 okresy x 2 pozycje). Z każdego rozkładu wylosowano po 10000 dziesięciowymiarowych wek-

torów. W celu wykorzystania zależności w górnym ogonie kopuli Gumbela odwrócono znaki symulowanych stóp zwrotu. W ten sposób uzyskano dodatkowo 8 zestawów danych (1 kopula x 4 okresy x 2 pozycje). Na każdym zestawie danych rozwiązano zadanie minimalizacji wartości zagrożonej dla dwóch poziomów istotności (5% oraz 1%). Jakość wyliczonych miar ryzyka oceniono za pomocą testu Kupca, porównując je z rzeczywście osiągniętymi stopami zwrotu w badanych okresach.

TABELA 2.

Oszacowania parametrów kopuli

Parametr	Kopula	I rok		II rok		III rok		I-III rok	
		Pozycja długa	Pozycja krótka	Pozycja długa	Pozycja krótka	Pozycja długa	Pozycja krótka	Pozycja długa	Pozycja krótka
θ	Claytona	0,2177	0,2399	0,4319	0,4235	0,1603	0,1988	0,2667	0,2772
θ	Franka	1,0258	1,1376	1,8749	1,8833	0,7305	0,9009	1,2313	1,3347
θ	Gumbela	1,1261	1,1388	1,2309	1,2328	1,0912	1,1092	1,1623	1,1703
ϱ	Gaussa	0,2128	0,2123	0,3643	0,3670	0,1734	0,1717	0,2692	0,2701
ϱ	t-Studenta	0,2192	0,2192	0,3637	0,3636	0,1738	0,1732	0,2650	0,2649
ν	t-Studenta	27,5	27,3	11,4	14,9	42,4	50,9	14,5	14,7

Źródło: opracowanie własne.

TABELA 3.

Wyniki testu Kupca dla oszacowań VaR portfela w dolnych ogonach rozkładów (poziom istotności 5%)

Kopula	Okres	-VaR	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka testowa Kupca	p-wartość*
Claytona	I rok	-0,0145	12	0,048	0,031	0,8613
	II rok	-0,0296	10	0,040	0,606	0,4363
	III rok	-0,0163	15	0,061	0,562	0,4535
	I-III rok	-0,0208	37	0,049	0,009	0,9265
Franka	I rok	-0,0118	19	0,075	2,981	0,0843
	II rok	-0,0238	22	0,087	6,097	0,0135
	III rok	-0,0135	24	0,097	9,179	0,0024
	I-III rok	-0,0164	57	0,076	9,216	0,0024
Gumbela	I rok	-0,0116	21	0,083	4,953	0,0260
	II rok	-0,0231	23	0,091	7,341	0,0067
	III rok	-0,0134	27	0,109	13,872	0,0002
	I-III rok	-0,0164	59	0,079	11,071	0,0009
Gumbela odwrócona	I rok	-0,0150	10	0,040	0,606	0,4363
	II rok	-0,0283	13	0,052	0,013	0,9084
	III rok	-0,0167	14	0,057	0,223	0,6369
	I-III rok	-0,0206	38	0,051	0,006	0,9401
Gaussa	I rok	-0,0143	12	0,048	0,031	0,8613
	II rok	-0,0286	13	0,052	0,013	0,9084
	III rok	-0,0169	14	0,057	0,223	0,6369
	I-III rok	-0,0206	36	0,048	0,068	0,7939
t-Studenta	I rok	-0,0143	12	0,048	0,031	0,8613
	II rok	-0,0283	13	0,052	0,013	0,9084
	III rok	-0,0166	15	0,061	0,562	0,4535
	I-III rok	-0,0199	40	0,053	0,165	0,6847

* Pogrubioną czcionką zaznaczono przypadki, dla których nie można odrzucić H_0 .

Źródło: obliczenia własne.

Hipotezy zerowej, zgodnie z którą udział przekroczeń wartości zagrożonej równa się przyjętemu poziomowi istotności, nie można odrzucić dla rozkładów utworzonych za pomocą: dwóch kopuli archimedesowych uwzględniających zależność w dolnym ogonie (Claytona i odwróconej Gumbela), jednej kopuli z symetryczną zależnością w ogonach (t-Studenta) oraz jednej kopuli nie mającej zależności w ogonach (Gaussa). Oszacowania liczby stopni swobody dla kopuli t-Studenta wynoszą od 11 do 51, a im większa liczba stopni swobody, tym mniejsza zależność w ogonach i tym większe podobieństwo do kopuli Gaussa.

Wyniki testu Kupca dla dolnych ogonów rozkładów zawarto w tabelach: 3. i 4. W przypadku ogona dolnego, we wszystkich badanych okresach zmniejszenie poziomu istotności z 5% do 1% spowodowało spadek p -wartości dla kopuli eliptycznych. Jest to szczególnie widoczne w okresie spadków (II rok), dla kopuli Gaussa i t-Studenta p -wartość zmniejsza się wówczas z 0,91 do 0,06. Ponadto na 1% poziomie istotności, we wszystkich badanych okresach, wartość zagrożona wyznaczona przez kopule archimedesowe uwzględniające silne zależności w dolnych ogonach rozkładów (tzn. Claytona i odwróconą Gumbela) jest wyższa niż wartość zagrożona wyznaczona przez kopule eliptyczne. Stanowi to zaletę w okresach spadków i jednocześnie wadę w okresach wzrostów. Podczas trendu spadkowego p -wartości dla kopuli Claytona i odwróconej Gumbela są wyższe niż p -wartości kopuli eliptycznych, natomiast podczas trendu wzrostowego jest odwrotnie.

TABELA 4.

Wyniki testu Kupca dla oszacowań VaR portfela w dolnych ogonach rozkładów (poziom istotności 1%)

Kopula	Okres	-VaR	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka testowa Kupca	p -wartość*
Claytona	I rok	-0,0236	1	0,004	1,201	0,2732
	II rok	-0,0538	3	0,012	0,087	0,7680
	III rok	-0,0297	3	0,012	0,108	0,7430
	I-III rok	-0,0368	8	0,011	0,032	0,8589
Franka	I rok	-0,0166	9	0,036	10,123	0,0015
	II rok	-0,0324	8	0,032	7,644	0,0057
	III rok	-0,0211	7	0,028	5,608	0,0179
	I-III rok	-0,0244	27	0,036	30,634	0,0000
Gumbela	I rok	-0,0162	10	0,040	12,833	0,0003
	II rok	-0,0325	8	0,032	7,644	0,0057
	III rok	-0,0203	6	0,024	3,642	0,0563
	I-III rok	-0,0242	28	0,037	33,284	0,0000
Gumbela odwrócona	I rok	-0,0290	0	0,000	5,065	0,0244
	II rok	-0,0556	2	0,008	0,117	0,7327
	III rok	-0,0359	1	0,004	1,140	0,2856
	I-III rok	-0,0421	7	0,009	0,036	0,8499
Gaussa	I rok	-0,0215	2	0,008	0,117	0,7327
	II rok	-0,0447	6	0,024	3,499	0,0614
	III rok	-0,0272	4	0,016	0,806	0,3692
	I-III rok	-0,0324	10	0,013	0,755	0,3848
t-Studenta	I rok	-0,0223	2	0,008	0,117	0,7327
	II rok	-0,0449	6	0,024	3,499	0,0614
	III rok	-0,0277	4	0,016	0,806	0,3692
	I-III rok	-0,0331	10	0,013	0,755	0,3848

* Pogrubioną czcionką zaznaczono przypadki, dla których nie można odrzucić H_0 .

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki testu Kupca dla górnych ogonów rozkładów zawarto w tabelach: 5. i 6. Również w ogonie górnym na 1% poziomie istotności, we wszystkich badanych okresach wartość zagrożona wyznaczona przez kopule archimedesowe uwzględniające silne zależności w lewym ogonie rozkładu (Claytona i odwróconą Gumbela) jest wyższa niż wartość zagrożona wyznaczona przez kopule eliptyczne. W okresach wzrostów, na 1% poziomie istotności, kopule Claytona i odwrócona Gumbela nie odnotowują żadnych przekroczeń.

TABELA 5.
Wyniki testu Kupca dla oszacowań VaR portfela w górnych ogonach rozkładów (poziom istotności 5%)

Kopula	Okres	VaR	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka testowa Kupca	<i>p</i> -wartość*
Claytona	I rok	0,0180	7	0,028	3,101	0,0782
	II rok	0,0255	13	0,052	0,013	0,9084
	III rok	0,0177	11	0,045	0,161	0,6882
	I-III rok	0,0207	32	0,043	0,907	0,3409
Franka	I rok	0,0148	19	0,075	2,981	0,0843
	II rok	0,0204	20	0,079	3,913	0,0479
	III rok	0,0145	19	0,077	3,260	0,0710
	I-III rok	0,0166	47	0,063	2,326	0,1272
Gumbela	I rok	0,0144	21	0,083	4,953	0,0260
	II rok	0,0196	21	0,083	4,953	0,0260
	III rok	0,0139	22	0,089	6,507	0,0107
	I-III rok	0,0164	45	0,060	1,467	0,2258
Gumbela odwrócona	I rok	0,0172	8	0,032	2,020	0,1553
	II rok	0,0252	13	0,052	0,013	0,9084
	III rok	0,0164	14	0,057	0,223	0,6369
	I-III rok	0,0202	33	0,044	0,604	0,4371
Gaussa	I rok	0,0173	8	0,032	2,020	0,1553
	II rok	0,0249	13	0,052	0,013	0,9084
	III rok	0,0169	12	0,049	0,011	0,9182
	I-III rok	0,0202	32	0,043	0,907	0,3409
t-Studenta	I rok	0,0174	7	0,028	3,101	0,0782
	II rok	0,0247	14	0,056	0,158	0,6907
	III rok	0,0170	12	0,049	0,011	0,9182
	I-III rok	0,0195	35	0,047	0,186	0,6660

* Pogrubioną czcionką zaznaczono przypadki, dla których nie można odrzucić H_0 .

Źródło: obliczenia własne.

TABELA 6.

Wyniki testu Kupca dla oszacowań VaR portfela w górnych ogonach rozkładów (poziom istotności 1%)

Kopula	Okres	VaR	Liczba przekroczeń	Udział przekroczeń	Statystyka testowa Kupca	p -wartość*
Claytona	I rok	0,0295	0	0,000	5,065	0,0244
	II rok	0,0448	2	0,008	0,117	0,7327
	III rok	0,0285	1	0,004	1,140	0,2856
	I-III rok	0,0354	5	0,007	0,960	0,3271
Franka	I rok	0,0202	5	0,020	1,917	0,1662
	II rok	0,0274	12	0,048	18,860	0,0000
	III rok	0,0200	9	0,036	10,390	0,0013
	I-III rok	0,0227	26	0,035	28,060	0,0000
Gumbela	I rok	0,0199	5	0,020	1,917	0,1662
	II rok	0,0267	12	0,048	18,860	0,0000
	III rok	0,0196	9	0,036	10,390	0,0013
	I-III rok	0,0226	26	0,035	28,060	0,0000
Gumbela odwrócona	I rok	0,0335	0	0,000	5,065	0,0244
	II rok	0,0472	1	0,004	1,201	0,2732
	III rok	0,0317	0	0,000	4,965	0,0259
	I-III rok	0,0392	4	0,005	1,997	0,1576
Gaussa	I rok	0,0249	2	0,008	0,117	0,7327
	II rok	0,0374	4	0,016	0,745	0,3880
	III rok	0,0240	5	0,020	2,018	0,1554
	I-III rok	0,0297	9	0,012	0,281	0,5962
t-Studenta	I rok	0,0268	1	0,004	1,201	0,2732
	II rok	0,0392	4	0,016	0,745	0,3880
	III rok	0,0243	4	0,016	0,806	0,3692
	I-III rok	0,0305	12	0,016	2,295	0,1298

* Pogrubioną czcionką zaznaczono przypadki, dla których nie można odrzucić H_0 .

Źródło: obliczenia własne.

Na wykresie 2. przedstawiono skład wybranych portfeli minimalizujących VaR dla ogona dolnego w okresie spadków (II rok) dla 1% poziomu istotności. Różnice pomiędzy portfelami zbudowanymi na podstawie stóp zwrotu symulowanych z kopuli, które uzyskały największe p -wartości, są niewielkie i zmniejszają się wraz ze wzrostem poziomu istotności. Jednak są one znaczące w porównaniu z portfelem wyliczonym dla rzeczywistych stóp zwrotu. Podobne wyniki w swoich badaniach osiągnął Patton [Patton, 2004, s. 152]. Wyznaczając dwuskładnikowe portfele dla inwestorów o niskiej skłonności do ryzyka, autor stwierdził, że wagi portfela wyznaczonego na podstawie odwróconej kopuli Gumbela i kopuli normalnej są w 95% przypadków takie same. Wyniki te są umotywowane narzuconym ograniczeniem w postaci braku krótkiej sprzedaży, co nie pozwala na wykorzystanie w pełni zalet rozkładów modelowanych za pomocą kopuli.

Kopulą z największą p -wartością w okresie spadków dla 1% poziomu istotności, dla ogona dolnego była kopula Claytona. Na wykresie 3. znajduje się skład portfeli wyznaczonych na podstawie tej kopuli dla wszystkich okresów. Uderzające jest podobieństwo wszystkich portfeli za wyjątkiem I roku. Jednakże wyjaśnienie przyczyn takiego składu portfeli wymagałoby wykorzystania dodatkowych narzędzi, co przekracza zakres niniejszego artykułu.

strona pozioma x 2

strona pozioma x 2

9. Podsumowanie

W badaniu połączono dwa walory aplikacyjne kopuli: do wyznaczania wartości zagrożonej i do optymalizacji portfela. Wartość zagrożona została poprawnie wyznaczona dla rozkładów utworzonych za pomocą kopuli archimedesowych z zależnością w dolnych ogonach (Claytona i odwróconej Gumbela) oraz kopuli eliptycznych (Gaussa bez zależności w ogonach i t-Studenta z symetryczną zależnością w ogonach). W przeprowadzonych badaniach kopule archimedesowe z zależnościami w dolnych ogonach określały poziomy VaR wyższe niż kopule eliptyczne, a różnice pomiędzy wartościami zagrożonymi wzrastały wraz ze spadkiem poziomu istotności. Inwestor, który chce uniknąć niedoszacowania ryzyka w okresach bessy, będzie zatem preferował użycie kopul archimedesowych do modelowania zależności stóp zwrotu. W zakresie optymalizacji portfela otrzymane rezultaty wskazują na znaczne podobieństwa udziałów spółek. Dalsze badania powinny uwzględnić rozwinięcie narzędzi umożliwiających analizę składu portfeli, wzbogacenie rozkładów o parametryczne rozkłady brzegowe, a także ekstrapolację wyliczonej wartości zagrożonej na przyszłe okresy.

Literatura

- Ang A., Chen J. 2002 *Asymmetric Correlations of Equity Portfolios*, „Journal of Financial Economics”, vol. 63, no. 3.
- Braun V., Grziska M. 2011 *Modeling Asymmetric Dependence of Financial Returns with Multivariate Dynamic Copulas*, dokument elektroniczny, tryb dostępu: [<http://ssrn.com/abstract=1826287>, data wejścia: 15.05.2014].
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. 2004 *Copula Methods in Finance*, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- Christoffersen P., Langlois H. 2011 *The Joint Dynamics of Equity Market Factors*, CREATES Research Paper 2011-45, Aarhus.
- Doman R. 2011 *Zastosowania kopuli w modelowaniu dynamiki zależności na rynkach finansowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Embrechts P., Höing A. 2006 *Extreme VaR Scenarios in Higher Dimensions*, „Extremes”, vol. 9, no. 3-4.
- Embrechts P., Höing A., Juri A. 2003 *Using Copulae to Bound the Value-at-Risk for Functions of Dependent Risks*, „Finance and Stochastics”, vol. 7, no. 2.
- Franke J., Härdle W. K., Hafner C. M. 2011 *Statistics of Financial Markets*, Springer Science & Business Media, Berlin.
- Gubian S., Hoeng J., Suomela B., Xiang Y. 2013 *Generalized Simulated Annealing for Global Optimization: the GenSA Package*, „The R Journal”, vol. 5, no. 1.
- Heilpern S. 2007 *Funkcje łączące*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego, Wrocław.
- Hong Y., Tu J., Zhou G. 2007 *Asymmetries in Stock Returns: Statistical Tests and Economic Evaluation*, „Review of Financial Studies”, vol. 20, no. 5.

- Jun Y. 2007 *Enjoy the Joy of Copulas: With a Package Copula*, „Journal of Statistical Software”, vol. 21, no. 4.
- Longin F., Solnik, B. 2001 *Extreme Correlation of International Equity Markets*, „Journal of Finance”, vol. 56, no. 2.
- Papla D., Piontek K. 2003 *Zastosowanie rozkładów α -stabilnych i funkcji powiązań (copula) w obliczaniu wartości zagrożonej (VaR)*, dokument elektroniczny, tryb dostępu: [www.kpiontek.ae.wroc.pl/DP_KP_VaR_copula.pdf, data wejścia: 15.05.2014].
- Patton A. 2004 *On the Out-of-Sample Importance of Skewness and Asymmetric Dependence for Asset Allocation*, „Journal of Financial Econometrics”, vol. 2, no. 1.
- Patton A. 2012 *Copula Methods for Forecasting Multivariate Time Series*, [in:] *Handbook of Economic Forecasting, vol. 2*, G. Elliott, A. Timmermann (eds.), Elsevier B.V., Amsterdam.
- Yollin G. 2009 *R Tools for Portfolio Optimization*, dokument elektroniczny, tryb dostępu: [https://4310b1a9-a-a8fb2076-s-sites.googlegroups.com/a/r-programming.org/home/files/RFinance2009.pdf, data wejścia: 15.05.2014].