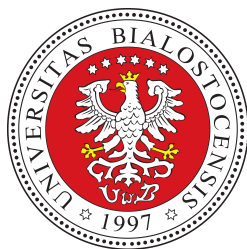


Faza supersolid w dipolowym kondensacie Bosego-Einsteina indukowana fermionami

Maciej Lewkowicz

Praca doktorska przygotowana pod kierunkiem

dr hab. Tomasza Karpiuka, prof. UWB



Wydział Fizyki
Uniwersytet w Białymstoku

Białystok AD 2025

Podziękowania

Dziękuję mojemu promotorowi, dr hab. Tomaszowi Karpiukowi, za nieocenione wsparcie, cierpliwość i zaufanie okazywane mi na każdym etapie tej pracy. Jestem szczególnie wdzięczny za wprowadzenie mnie w świat programowania w sposób jasny i przystępny dla kogoś, kto na początku nie miał o nim żadnego pojęcia. Pańska umiejętność tłumaczenia złożonych zagadnień w prosty sposób oraz gotowość do poświęcania mi czasu były dla mnie bezcenne.

Profesorowi Mirosławowi Brewczykowi pragnę podziękować za ogrom wiedzy, jaką mi przekazał, za cierpliwość oraz za pomoc w rozwiązywaniu problemów analitycznych, które pojawiały się w trakcie tej pracy. Jego uwagi, sugestie i wysoka poprzeczka, którą przede mną stawiał, motywowały mnie do ciągłego rozwoju i głębszego zrozumienia badanych zjawisk.

Najgłębsze podziękowania kieruję do Justyny Lewkowicz - mojej wspaniałej Żony - za niewyczerpaną cierpliwość, wyrozumiałość i wsparcie we wszystkich trudnych momentach. Dziękuję za codzienną pomoc, dodawanie mi otuchy oraz za przejęcie na siebie większości obowiązków związanych z opieką nad naszym Synem, dzięki czemu mogłem skupić się na pracy. Bez Twojej miłości i wsparcia ta praca nigdy nie przybrałaby obecnego kształtu.

Spis treści

Podziękowania	1
1 Wstęp	4
2 Tło historyczne	6
3 Faza supersolid: własności, realizacje eksperymentalne i opis teoretyczny	9
3.1 Co to jest faza supersolid	9
3.2 Eksperymenty dotyczące fazy supersolid	10
3.2.1 Poszukiwania w helu w fazie stałej (^4He)	10
3.2.2 Supersolid w kondensatach z oddziaływaniami kontaktowymi . . .	12
3.2.3 Realizacja w kondensatach dipolowych (dysproz)	13
3.3 Teoretyczne modele	15
3.3.1 Równania Bogoliubova-de Gennesa (BdG)	15
3.3.2 Metody Monte Carlo	18
3.3.3 Mieszanki bozonowo-fermionowe i rola fermionów	18
4 Różne formalizmy, ta sama fizyka: mody Goldstone’a przy spontanicznym łamaniu symetrii	20
4.1 Podstawowe aspekty fazy supersolid	20
4.2 Teoria Ginzburga-Landaua i mody Goldstone’a	21
4.2.1 Coarse graining	21
4.2.2 Teoria Ginzburga-Landaua (GL)	23
4.2.3 Nadciekłość w ujęciu teorii Ginzburga-Landaua	24
4.2.4 Spontaniczne złamanie symetrii i pojawienie się modów Goldstone’a w nadcieczy	26
4.3 Złamanie symetrii w formalizmie Lagrange’a i przykład pola Schrödingera	27
4.3.1 Twierdzenie Noether a generatory symetrii	27
4.3.2 Spontaniczne złamanie symetrii: kryterium i parametr porządku .	28
4.3.3 Przykład: pole Schrödingera i spontaniczne złamanie symetrii $U(1)$	29
4.3.4 Pojawienie się modu Goldstona	31

Podsumowanie: Różne podejścia, ta sama fizyka	33
5 Faza supersolid indukowana przez fermiony w kondensacie Bosego-Einsteina z oddziaływaniami dipolowymi	34
5.1 Od geometrii 3D do geometrii kwazi-1D	35
5.2 Poszukiwanie stanu podstawowego w geometrii kwazi-1D	39
5.2.1 Wyniki numeryczne dla stanu podstawowego	41
5.3 Analityczna metoda eliminacji fermionowych stopni swobody - rotonowa niestabilność	43
5.3.1 Widmo energetyczne i niestabilność rotonowa	44
5.4 Niskoenergetyczne wzbudzenia - mody Goldstone'a i Higgsa	46
5.4.1 Widmo energetyczne, mod Goldstone'a i Higgsa	48
5.4.2 Fermionowe wzbudzenia niskoenergetyczne	52
5.5 Kryterium Leggetta	54
5.6 Argument skalowania	55
5.7 Badanie przypadku $\tilde{\mu}_d = 0.02$	57
5.8 Podsumowanie rozdziału	58
6 Wzbudzenie fazy supersolid metodą quenchu	60
7 Podsumowanie i wnioski	65
Dodatek	67
A Redukcja potencjału dipolowego z 3D do 1D	67
B Efektywny potencjał	71
C Energia Bogolubowa	73
Bibliografia	80

Rozdział 1

Wstęp

W niniejszej pracy badamy układ mieszaniny bozonowo-fermionowej w jednowymiarowej (1D) konfiguracji, gdzie fermiony są spolaryzowane, a bozony posiadają niezerowy moment magnetyczny. W tej pracy skupimy się na odnalezieniu fazy supersolid w komponencie bozonowym. Tradycyjnie supersolid to stan materii łączący uporządkowanie krystaliczne z właściwościami nadciekłymi [1]. Eksperymentalnie został on osiągnięty we wnękach rezonansowych przy oddziaływaniach kontaktowych, natomiast w optycznych pułapkach o różnych geometriach - jedynie przy użyciu pierwiastków o bardzo dużym momencie magnetycznym, takich jak dysproz (Dy). W naszej pracy przedstawiamy teoretyczne i numeryczne dowody na to, że przy wprowadzeniu fermionów, supersolid może być osiągnięty również w układach z bozonami o stosunkowo niewielkim momencie magnetycznym, takich jak rubid.

Głównym celem pracy jest zademonstrowanie, że faza supersolid w mieszaninie bozonowo-fermionowej może być uzyskana w układzie 1D poprzez wykazanie obecności niestabilności rotonowej oraz detekcję modów kolektywnych, w szczególności modów Goldstone'a (szczególnie out-of-phase) oraz modu Higgsa. Aby rozpocząć realizację zadania, przechodzimy od pełnych równań 3D do modelu kwazi-jednowymiarowego poprzez wycałkowanie dwóch przestrzennych stopni swobody. Funkcja użyta do wycałkowania dwóch przestrzennych stopni swobody to funkcja gaussowska, która odpowiada stanowi podstawowemu rozwiązania równania Schrödingera w pułapce harmoniczej, opisującego kondensat Bosego-Einsteina bez uwzględnienia oddziaływań kontaktowych, czyli oscylator harmoniczny. Następnie szukamy stanu podstawowego mieszaniny: dla bozonów stosujemy metodę ewolucji w czasie urojonym, natomiast fermiony - opisywane jako orbite - uzyskujemy poprzez diagonalizację jednocząstkowego hamiltonianu fermionowego. Po uzyskaniu samo uzgodnionego stanu podstawowego w pułapce harmoniczej, wprowadzamy symetryczne oraz antysymetryczne zaburzenia geometrii pułapki, a następnie analizujemy ewolucję układu w czasie rzeczywistym. Po wykonanej ewolucji, gęstość analizujemy za pomocą transformaty Fouriera, co umożliwia wyodrębnienie modów o określonych częstościach. W ten sposób możliwa jest identyfikacja dynamiki wzbudzeń, gdzie

rozdzielamy mody typu in-phase (część nadciekła porusza się zgodnie z częścią krystaliczną) oraz out-of-phase (w których część nadciekła porusza się w przeciwną stronę do części krystalicznej), a także mod Higgsa związany z oscylacjami amplitudy. Jednoczesna obecność tych modów wskazuje, że układ złamał symetrię i jest w fazie supersolid.

Praca została ułożona następująco:

Rozdział 2: Przedstawiono tło historyczne badań nad kondensacją Bosego-Einsteina, nadciekłością oraz drogę do fazy supersolid - od eksperymentów w stałym helu po realizację w ultrazimnych gazach.

Rozdział 3: Omówiono, czym jest faza supersolid oraz przedstawiono przegląd badań eksperymentalnych (oscylatory torsyjne w ^4He , realizacje we wnękach optycznych i w kondensatach dipolowych Dy/Er) oraz teoretycznych (równania Bogoliubova-de Gennesa, metody Monte Carlo, mieszanie bozonowo-fermionowe).

Rozdział 4: Przedstawiono formalizmy Ginzburga-Landaua oraz Lagrange'a, z których wynikają mody Goldstone'a i Higgsa, fundamentalne dla opisu łamania symetrii.

Rozdział 5: Prezentuje główne wyniki pracy: przejście z geometrii 3D do kwazi-1D, wyznaczenie stanu podstawowego mieszaniny, analityczną eliminację fermionowych stopni swobody, analizę niestabilności rotonowej, charakterystykę niskoenergetycznych wzbudzeń (mody Goldstone'a i Higgsa), kryterium Leggetta oraz argument skalowania.

Rozdział 6: Badane jest wzbudzenie fazy supersolid metodą *quenchu* oraz wynikająca z niego dynamika układu.

Rozdział 7: Zawiera podsumowanie i wnioski.

Dodatek A: Przedstawiono szczegółową redukcję potencjału dipolowego z 3D do 1D, wyznaczono widmo Bogoliubova dla oddziaływania kontaktowego z poprawką dipolową oraz obliczono efektywny potencjał oddziaływania bozon-bozon.

W niniejszej pracy wykorzystano narzędzia sztucznej inteligencji w celu korekty językowej i stylistycznej tekstu.

Rozdział 2

Tło historyczne

Rozdział ten przedstawia historyczny kontekst badań nad egzotycznymi stanami materii, ze szczególnym uwzględnieniem kondensacji Bosego-Einsteina oraz nadciekłości - zjawisk, które stworzyły podstawy do koncepcji fazy supersolid. Ukazano zarówno podejście teoretyczne, jak i kolejne etapy eksperymentalnego dążenia do realizacji tego niezwykłego stanu, w którym nadciekłość współistnieje z uporządkowaniem przestrzennym. Przegląd obejmuje klasyczne badania z wykorzystaniem helu w fazie stałej oraz najnowsze osiągnięcia w dziedzinie ultrazimnych gazów atomowych. Badania nad nowymi stanami materii, których kwantowe efekty manifestują się w skali makroskopowej, sięgają początków XX wieku. Jednym z fundamentalnych odkryć była kondensacja Bosego-Einsteina (BEC), przewidziana przez S. N. Bosego w 1924 roku [2] oraz rozwinięta przez Alberta Einsteina w 1925 roku [3]. Prace teoretyczne wykazały, że w bardzo niskich temperaturach duża liczba bozonów może skondensować do jednego stanu własnego, prowadząc do powstania spójnego stanu makroskopowego.

Eksperymentalnie dopiero w 1995 roku udało się uzyskać kondensat w rozrzedzonym gazie atomowym. Przełomowy eksperyment E. A. Andersona i współpracowników, opublikowany w 1995 roku w czasopiśmie *Science* [4], dotyczył atomów rubidu-87, a w tym samym czasie Ketterle i jego zespół uzyskali kondensat, używając atomów sodu-23 [5]. To odkrycie otworzyło nową erę badań nad ultrazimnymi gazami, umożliwiając szczegółowe badania zjawisk kwantowych, takich jak kwantowe wiry, krople w kondensatach, a następnie fazę supersolid.

Równolegle rozwijano badania nad zdegenerowanym gazie fermionów. Fermiony, które nie mogą zajmować tego samego stanu kwantowego, nie kondensują bezpośrednio, lecz tworzą pary (analogiczne do par Coopera w nadprzewodnikach). W 1999 roku osiągnięto zdegenerowany gaz fermionowy [6], a w latach 2003-2004, przy użyciu rezonansu Feshbacha, udało się połączyć fermiony w pary, które następnie kondensowały, tworząc kondensat fermionowy [7]. Realizacja tzw. crossover BCS-BEC stała się istotnym krokiem w zrozumieniu nadciekłości w układach fermionowych oraz miała znaczenie dla badań nad nadprzewodnictwem wysokotemperaturowym.

Od dawna pojawiało się pytanie, czy możliwe jest uzyskanie stanu, w którym jednocześnie występuje uporządkowanie krystaliczne (typowe dla ciał stałych) oraz nadciekłość (charakterystyczna dla kondensatów Bosego-Einsteina) - tzw. faza *supersolid*. Pierwsze teoretyczne przewidywania dotyczące fazy supersolid pojawiły się już pod koniec lat 60. XX wieku, gdy A. F. Andreev oraz I. M. Lifshitz [8] rozważyli możliwość kondensacji luk sieciowych (czyli nieobsadzonych miejsc w sieci krystalicznej) w kryształach helu jako mechanizmu generującego nadciekłość w ciele stałym. Następnie G. V. Chester oraz A. J. Leggett w 1970 roku [1] sformułowali hipotezę, że ciało stałe może być nadciekłe. Przez kolejne dekady poszukiwania fazy supersolid skupiały się głównie na ^4He w fazie stałej, ponieważ jest to lekki bozon o silnych fluktuacjach zeropunktowych (zero-point fluctuations), wynikających z płytkiego i szerokiego potencjału He-He, co prowadzi do dużej amplitudy wzbudzeń nawet w stanie podstawowym. W połączeniu ze stosunkowo słabymi oddziaływaniami międzyatomowymi sugerowało to, że nawet w uporządkowanej sieci krystalicznej możliwa jest delokalizacja atomów i pojawienie się nadciekłości. W 2004 roku Kim i Chan [9] opublikowali doniesienia o obserwacji nieklasycznego momentu bezwładności (NCRI, ang. Non-Classical Rotational Inertia) w helu w fazie stałej w oscylatorach torsyjnych, co mogło sugerować pojawienie się nadciekłego składnika. Zjawisko NCRI polega na tym, że część masy układu nie uczestniczy w ruchu obrotowym, co wskazuje na obecność komponentu o właściwościach nadciekłych. Jednak wyniki te były kontrowersyjne: kolejne badania, w tym pomiary właściwości sprężystych, wykonane przez Day'a i Beamisha [10] oraz eksperymenty przepływowe Ray'a i Hallocka [11], wykazały, że obserwowane efekty można tłumaczyć zmianami własności mechanicznych i defektami topologicznymi. W efekcie, mimo początkowych entuzjastycznych doniesień, eksperymenty z wykorzystaniem helu w fazie stałej nie dały jednoznacznego potwierdzenia odkrycia fazy supersolid.

Odejście od prób z helem skierowało uwagę na ultrazimne gazy atomowe, w których oddziaływaniami można precyzyjnie sterować za pomocą rezonansu Feshbacha. W 2017 roku eksperymenty z kondensatami bozonowymi z sprzężeniem spin-orbita oraz kondensatami w rezonatorach optycznych doniosły o pojawieniu się struktur o cechach fazy supersolid, jednakże struktury te były wymuszone przez zewnętrzne pola, co nie w pełni odzwierciedlało autentyczny charakter fazy supersolid. Prawdziwy przełom nastąpił w 2019 roku, gdy trzy niezależne grupy badawcze - w Pizie, Stuttgarcie oraz Innsbrucku - ogłosiły obserwację metastabilnego stanu - *fazy supersolid* - w kondensatach dipolowych [12,13,14]. W tych układach spontanicznie pojawiające się maksima gęstości ułożyły się w regularną sieć przy zachowaniu nadciekłości układu, co wskazywało na współistnienie obu faz.

W ostatnich latach intensywnie rozwijały się również badania nad mieszaninami składającymi się z bozonów i fermionów, w których fermiony mogą mediować oddziaływania między bozonami, sprzyjając stabilizacji układu. Prace teoretyczne autorstwa Büchlera i

Blattera [15] oraz Titvinidze, Snoek i Hofstettera [16] analizowały takie mieszaniny głównie w dwuwymiarowych sieciach optycznych, o geometrii kwadratowej lub trójkątnej. Ich celem było badanie mechanizmów pośrednich oddziaływań bozon-bozon indukowanych przez składnik fermionowy, a nie bezpośrednio uzyskanie fazy supersolid. Niemniej jednak wyniki tych badań wskazały na możliwość powstania faz o uporządkowanej strukturze przestrzennej.

W tych pracach koncentrowano się na mieszaninach dobrze znanych z eksperymentów ultrazimnych gazów, takich jak rubid (^{87}Rb) i potas (^{40}K) oraz sód (^{23}Na) i lit (^6Li). Są to układy, które można efektywnie schładzać do temperatur bliskich zera bezwzględnego, a ich oddziaływania można kontrolować przy pomocy rezonansów Feshbacha, co czyni je atrakcyjnymi kandydatami do realizacji fazy supersolid. Praca Ortha i współpracowników [17] wykazała teoretycznie możliwość powstania fazy supersolid w dwuwymiarowym układzie o geometrii trójkątnej z fermionami mediującymi oddziaływania bozonów, jednak jak dotąd nie uzyskano eksperymentalnej obserwacji tej fazy w takich układach.

Podsumowując, rozwój badań nad BEC i nadciekłością rozpoczął się od teoretycznych przewidywań Bosego i Einsteina, przeistoczył się w pierwsze eksperymentalne realizacje kondensatu w 1995 roku, a następnie rozszerzył się na gazy fermionowe. Historia poszukiwań fazy supersolid, począwszy od teoretycznych rozważań w latach 60, poprzez eksperymenty z wykorzystaniem ^4He , aż po przełomowe badania w ultrazimnych gazach dipolowych oraz mieszaninach bozonowo-fermionowych w latach 2017-2019 ukazuje, jak długo trwało dążenie do osiągnięcia stanu materii łączącego cechy ciał stałych z właściwościami nadciekłymi. Odkrycia te nie tylko przyniosły odpowiedzi na pytania formułowane od dekad, ale również otworzyły nowe perspektywy badań zjawisk kwantowych, mających potencjalne zastosowania od fizyki fazy skondensowanej po astrofizykę.

Rozdział 3

Faza supersolid: własności, realizacje eksperymentalne i opis teoretyczny

Celem niniejszego rozdziału jest wyjaśnienie, czym jest faza supersolid oraz przedstawienie najważniejszych wyników badań eksperymentalnych i teoretycznych nad tym stanem materii. Przeanalizowane zostaną zarówno historyczne próby realizacji tego egzotycznego stanu materii, jak i współczesne eksperymenty z udziałem ultrazimnych gazów atomowych. Szczególny nacisk położono na fizykę kondensatów dipolowych oraz na teoretyczne modele, opisujące mechanizmy powstawania fazy supersolid, w tym analizę widma wzbudzeń, metody numeryczne oraz przegląd układów bozonowo-fermionowych. Rozdział został podzielony na część eksperymentalną i teoretyczną.

3.1 Co to jest faza supersolid

Faza supersolid to unikalny stan materii, w którym współistnieją dwa - pozornie sprzeczne - porządki: przestrzenny, typowy dla ciał stałych oraz nadciekły, odpowiedzialny za przepływ bez oporu. Innymi słowy, materia zachowuje periodyczną strukturę, czyli długi zasięgowy porządek (ang. *long-range order*, LRO), a jednocześnie wykazuje cechy nadciekłości, co potwierdza istnienie pozadiagonalnego długi zasięgowego porządku (ang. *off-diagonal long-range order*, ODLRO). Obecność ODLRO, wyrażona poprzez niezanikające pozadiagonalne elementy jednocząstkowej macierzy gęstości dla dużych odległości, świadczy o koherencji układu, dzięki której możliwa jest kondensacja Bosego-Einsteina. Takie współistnienie porządku krystalicznego i nadciekłości stanowi wyzwanie zarówno teoretyczne, jak i eksperymentalne.

W klasycznym ujęciu ciała stałe opisuje się jako układy, w których atomy są silnie zlokalizowane w punktach sieci krystalicznej i wykonują jedynie niewielkie drgania wokół swoich położenia równowagi, co skutecznie uniemożliwia wystąpienie kondensacji Bosego-Einsteina. Z kolei w nadciekłych układach, takich jak ciekły ^4He , atomy nie zachowują

się jak niezależne, lokalizowalne cząstki jak w kryształach, lecz tworzą kolektywny stan kwantowy, w którym możliwe są długozasięgowe korelacje między atomami - to właśnie długozasięgowy porządek odpowiada za występowanie nadciekłości. Tego typu zjawiska można bezpośrednio obserwować w symulacjach metodą Monte Carlo [18] [19]. Typowym przejawem nadciekłości jest efekt nieklasycznej bezwładności obrotowej (NCRI), w którym część masy układu nie uczestniczy w ruchu obrotowym - skutkując zmniejszeniem efektywnego momentu bezwładności względem wartości klasycznej.

Faza supersolid łączy te dwa obrazy cieczy i kryształu: z jednej strony ma regularną strukturę sieci, z drugiej zaś umożliwia swobodny, bezporowy przepływ masy, typowy dla faz nadciekłych. To połączenie delokalizacji i uporządkowania przestrzennego czyni ją szczególnie interesującym stanem materii, którego istnienie przez wiele lat pozostawało wyłącznie w sferze spekulacji teoretycznych. Z punktu widzenia symetrii faza supersolid jest stanem, w którym jednocześnie spontanicznie złamane są dwie symetrie ciągłe: translacyjna (odpowiadająca za uporządkowanie krystaliczne) oraz $U(1)$ (związana z fazą cząstek). Zgodnie z twierdzeniem Goldstone'a, każde takie spontaniczne złamanie ciągłej symetrii prowadzi do pojawienia się niskoenergetycznych modów kolektywnych - modów Goldstone'a - które są bezpośrednią manifestacją złamania symetrii. W fazie supersolid te dwa mody Goldstone'a odpowiadają wzbudzeniom kryształu i części nadciekłej.

3.2 Eksperymenty dotyczące fazy supersolid

W tej części przedstawione zostaną kluczowe eksperymenty, prowadzące do potwierdzenia istnienia fazy supersolid. Zostaną omówione zarówno historyczne badania prowadzone na ^4He w fazie stałej, które zapoczątkowały eksperymentalne poszukiwania fazy supersolid, jak i przełomowe wyniki, uzyskane w ostatnich latach w układach ultrazimnych gazów atomowych. Szczególną uwagę poświęcono eksperymentom z udziałem silnie magnetycznych atomów, takich jak dysproz, które umożliwiły jednoznaczną obserwację fazy supersolid oraz jego kluczowych cech - nadciekłości i uporządkowania przestrzennego.

3.2.1 Poszukiwania w helu w fazie stałej (^4He)

Pierwsze doniesienia sugerujące istnienie fazy supersolid w ^4He w fazie stałej pochodziły z doświadczeń oscylatora toroidalnego (oscylatora w kształcie torusa). Kim i Chan [9] umieścili stały hel (^4He) w oscylatorze toroidalnym i badali zmiany okresu drgań w funkcji temperatury. Poniżej około $T_c \approx 0.2$ K zaobserwowali oni wyraźny spadek okresu drgań oscylatora, co odpowiada temu, że pewna część masy stałego helu przestała uczestniczyć w ruchu obrotowym układu (efekt tzw. nieklasycznej bezwładności obrotowej, NCRI). Mierzony efekt występował we wszystkich zbadanych próbkach krystalicznego ^4He w zakresie ciśnień od ok. 26 do 66 bar, co pozwoliło wyznaczyć przybliżony obszar fazowy

powstawania fazy supersolid w układzie stałego helu [9]. Pozorny ułamek masy odsprężonej od ruchu oscylatora wynosił mniej niż 1% i malał wraz ze wzrostem amplitudy oscylacji [9]. Tłumaczono to analogią do krytycznej prędkości nadciekłości - powyżej pewnej częstości oscylacji efekt NCRI zanikał. Wyniki Kim i Chana stanowiły pierwszą eksperymentalną przesłankę istnienia fazy supersolid w ^4He , jednak interpretacja ta w kolejnych latach została poddana w wątpliwość przez dalsze badania. Kluczowy okazał się pomiar właściwości sprężystych stałego helu dokonany przez Day'a i Beamisha [10]. Zmierzyli oni moduł sprężystości krystalicznego ^4He w niskich temperaturach, stosując małe odkształcenia oscylacyjne (czyli niewielkie, cyklicznie zmienne naprężenia mechaniczne, które nie powodują trwałych deformacji próbki). Stwierdzono, że moduł sprężystości rośnie znacząco (o kilkanaście do kilkudziesięciu procent), gdy temperatura spada poniżej ok. 0.2 K [10]. Co istotne, sztywnienie stałego helu wykazywało taką samą zależność od warunków eksperymentu, jaką obserwowano dla efektu NCRI w oscylatorze toroidalnym. Zarówno zmiany amplitudy wzbudzeń, stężenie domieszki ^3He w próbce, jak i wcześniejsze wyżarzanie kryształu wpływały na moduł sprężystości w sposób analogiczny do wpływu na wielkość efektu NCRI [10]. Sugeruje to, że anomalia odkryta w okresie oscylatora może wynikać ze zmian własności mechanicznych stałego helu (np. z unieruchamiania i uwalniania dyslokacji (defektów sieci krystalicznej) przez domieszki ^3He przy zmianie temperatury, czyli zjawisk polegających na tym, że domieszki te mogą tymczasowo unieruchamiać linie dyslokacyjne, ograniczając ich ruch, a zmiany temperatury wpływają na mobilność tych domieszek i mogą prowadzić do uwolnienia dyslokacji, co z kolei wpływa na właściwości mechaniczne kryształu), a nie z powstania rzeczywistej fazy supersolid. W konsekwencji, wyniki te podważyły interpretację efektu Kim-Chana jako dowodu na supersolid, wskazując alternatywne wyjaśnienie związane z elastycznością kryształu.

Innym podejściem do weryfikacji istnienia fazy supersolid w helu były eksperymenty przepływowe. Ray i Hallock [11] zaprojektowali układ, w którym kryształ ^4He w postaci fazy hcp (hexagonal close-packed), przy ciśnieniu poniżej linii topnienia (czyli poniżej wartości ciśnienia, przy której hel w danej temperaturze przechodzi ze stanu stałego w ciekły), znajdował się w kontakcie z rezerwuarem ciekłego helu, który w tym stanie jest nadciekły. Umożliwiło to wywieranie kontrolowanej różnicy ciśnień między dwiema stronami próbki stałego helu. W takich warunkach został zaobserwowany transport masy przez stały hel w temperaturach rzędu dziesiątek mK [11]. Mierzony przepływ masy - analogiczny do prądu stałego (direct current), gdzie wartość przepływu pozostaje niezmienną w czasie - został zaobserwowany zarówno w kryształach, które formowały się stopniowo (co prowadziło do bardziej uporządkowanej struktury), jak i w kryształach powstających w wyniku szybkiego schładzania (gdzie tworzy się wiele defektów, takich jak mikrokanaliki lub granice ziaren, czyli miejsca styku regionów o różnych orientacjach struktury krystalicznej). Fakt, że przepływ masy był podobny, niezależnie od metody przygotowania, sugeruje, iż nie wynikał on wyłącznie z obecności defektów w strukturze

kryształu. Przepływ masy wykazywał silną zależność od temperatury i ciśnienia - poniżej pewnej temperatury, zwanej temperaturą progową, zaczynała się pojawiać nadciekła część stałego helu, czyli masa zaczynała swobodnie przepływać przez kryształ. Co więcej, przy zmianach temperatury układ reagował inaczej w zależności od tego, czy był podgrzewany, czy schładzany (zjawisko histerezy, czyli sytuacja, w której układ podąża różnymi ścieżkami przy zmianie parametru zewnętrznego, np. podgrzewaniu i schładzaniu - czego przejawem mogą być różne wartości krytyczne przejścia fazowego) [11]. Charakterystyki te są zgodne z nadciekłym transportem w ^4He . Niemniej jednak wyniki te były ostrożnie interpretowane, gdyż nadal możliwe były alternatywne drogi przepływu (np. wzdłuż defektów struktury krystalicznej).

Mimo licznych badań doświadczalnych - od pomiarów oscylatorowych po próby wykrycia stałego przepływu - istnienie egzotycznej fazy supersolid w stałym ^4He , nie zostało jednoznacznie potwierdzone.

3.2.2 Supersolid w kondensatach z oddziaływaniami kontaktowymi

Przełomowe eksperymenty z lat 2017-2018 pokazały, że fazę supersolid można uzyskać w kondensatach z czysto kontaktowymi oddziaływaniami, bez udziału długozasięgowych sił dipolowych. W szczególności, kluczowe okazały się prace wykorzystujące kondensaty Bosego-Einsteina w układach dwóch sprzężonych wnęk optycznych, umożliwiających powstanie długozasięgowych oddziaływań między atomami poprzez wymianę fotonów we wnęcie optycznej.

Pierwszą bezpośrednią realizację fazy supersolid zaobserwowano w eksperymencie Léonarda i współpracowników [20], w którym kondensat zawierający atomy rubidu (^{87}Rb) umieszczono w skrzyżowanych wnękach optycznych, sprzężonych z jednym polem laserowym. Układ ten pozwalał na rozpraszanie fotonów między dwiema wnękami przez atomy, co prowadziło do powstania długozasięgowego efektywnego oddziaływania między nimi. Wraz ze wzrostem mocy promieniowania laserowego przekroczony został próg krytyczny, powyżej którego układ samorzutnie przeszedł do stanu z modulowaną gęstością - wyraźnie widocznej w świetle wychodzącym z wnęk rezonansowych. Jednocześnie wciąż zachowana była globalna koherencja fazowa kondensatu, co potwierdzało obecność nadciekłości. Zaobserwowano zatem współistnienie złamania symetrii translacyjnej oraz symetrii $U(1)$, co stanowi charakterystyczną sygnaturę fazy supersolid [20].

W kolejnym badaniu Léonarda i współpracowników [21], został zidentyfikowany krytyczny punkt przejścia do fazy supersolid. Analizując rozkład fluktuacji fotonów wychodzących z wnęk oraz korelacje pomiędzy nimi, autorzy wykazali istnienie krytycznego punktu związanego z samorzutnym złamaniem symetrii w tym układzie - czyli punktu granicznego, w którym układ przechodzi z jednej fazy w drugą - w tym przypadku z

kondensatu do fazy supersolid - a obserwowane fluktuacje stają się silnie skorelowane przestrzennie. Oznacza to, że zmiany zachodzące w jednej części układu wpływają na inne, nawet te daleko odległe obszary. Takie zachowanie jest typowe dla przejść fazowych drugiego rzędu i wskazuje na pojawienie się długozasięgowego porządku. Wykazano również, że faza ta jest stabilna przez długi czas i można ją precyzyjnie kontrolować poprzez parametry światła lasera i geometrię wnęk, co czyni ten układ bardzo atrakcyjnym do badania fundamentalnych właściwości faz kwantowych.

Ponadto w tej samej pracy [21], przeprowadzono bezpośrednie pomiary ewolucji modów kolektywnych w fazie supersolid. Udało się zidentyfikować zarówno *mod Goldstone'a* - związany z oscylacjami fazy (wynikający ze złamania symetrii $U(1)$), jak i *mod Higgsa* - odpowiadający oscylacjom amplitudy. Detekcja tych modów została zrealizowana poprzez analizę ewolucji światła, emitowanego z wnęk po gwałtownych zmianach parametrów układu. Eksperymentalna identyfikacja obu modów - Goldstone'a i Higgsa - jednoznacznie potwierdza osiągnięcie fazy supersolid w badanym układzie.

Trzecia praca, autorstwa Mivehvara i współpracowników [22], dostarczyła teoretycznego opisu eksperymentów Léonarda i współpracowników, interpretując powstały układ jako realizację fazy supersolid w systemie z oddziaływaniem mediowanym przez wnęki rezonansowe. W pracy tej przeanalizowano szczegółowo strukturę stanów wzbudzonych i sposób, w jaki fotony i atomy wspólnie determinują właściwości układu. Przewidziano również istnienie modów kolektywnych oraz warunki, w których mogą być one eksperymentalnie obserwowane.

Uzupełnieniem realizacji fazy supersolid w tej klasie są także układy kondensatów z sprzężeniem spin-orbita. W pracy Li i współpracowników [23], wykazano istnienie fazy pasmowej (stripe phase) w kondensacie rubidu z dwoma sprzężonymi stanami spinowymi. Modulacja gęstości wynikała z interferencji komponentów spinowych, przesuniętych względem siebie w przestrzeni pędów, a obecność globalnej koherencji fazowej potwierdzała nadciekłość układu. Choć amplituda modulacji była niewielka i trudna do zaobserwowania bezpośrednio, praca ta dostarczyła istotnych dowodów teoretycznych i pośrednich eksperymentalnych na istnienie fazy supersolid, bez udziału oddziaływań długozasięgowych, jedynie dzięki inżynierii sprzężenia spin-orbita.

Eksperymenty te pokazały nową drogę do inżynierii egzotycznych faz kwantowych, kontrolowanych za pomocą pola elektromagnetycznego, bez konieczności stosowania naturalnych oddziaływań długozasięgowych.

3.2.3 Realizacja w kondensatach dipolowych (dysproz)

W przeciwieństwie do przypadku helu, w układach ultrazimnych atomów z oddziaływaniami dipolowymi, udało się uzyskać fazę supersolid w sposób powtarzalny i jednoznaczny. Przełom nastąpił w 2019 roku, kiedy dwie niezależne grupy doświadczalne do-

niosły o obserwacji tej fazy w kondensatach Bosego-Einsteina, z silnie magnetycznymi atomami dysprozu (^{162}Dy). W takich układach, dzięki dużym momentom magnetycznym atomów, występują długozasięgowe oddziaływania dipolowe, które nie pojawiają się w eksperymentach ze stałym ^4He . Tanzi i współpracownicy [12] wykorzystali kondensat dysprozu uwięziony w wydłużonej pułapce, gdzie kluczowym elementem było dostrojenie oddziaływań międzyatomowych za pomocą rezonansu Feshbacha - metoda ta stopniowo zmniejszała oddziaływanie kontaktowe, zbliżając układ do granicy niestabilności rotonowej (czyli stanu, w którym energia wzbudzenia rotonowego spada do bardzo niskich wartości, co sprzyja spontanicznej modulacji gęstości), układ staje się niestabilny, co jest uważane za sygnał przejścia do fazy supersolid [24]. Eksperymentalnie zaobserwowano, że poniżej pewnej krytycznej wartości oddziaływania, jednorodny początkowo kondensat spontanicznie uległ modulacji - wzdłuż dłuższej osi pułapki pojawił się szereg zagęszczonych obszarów materii, rozmieszczonych periodycznie [12], co potwierdzono poprzez obserwację wyraźnych obrazów interferencyjnych podczas otwarcia pułapki i wzmocnienia gęstości w maksimum [12]. Innymi słowy, powstała faza posiadała jednocześnie uporządkowanie przestrzenne (regularne odstępstwa pomiędzy maksimami gęstości) oraz nadciekłość - cechy definiujące supersolid. Zaobserwowany stan fazy supersolid okazał się metastabilny: utrzymywał się przez kilkadziesiąt milisekund, po czym stopniowo zanikał wskutek strat atomów (wynikających z zderzeń trójciałowych). Mimo ograniczonego czasu życia, była to pierwsza realizacja fazy supersolid w układzie doświadczalnym z atomami dysprozu.

Niezależnie, Böttcher i współpracownicy [13] przeprowadzili zbliżony eksperyment z kondensatem dysprozu, również obserwując przejście od fazy jednorodnego BEC do fazy supersolid. W ich układzie powstawała analogicznie sieć równoodległych maximów (o rozmiarach rzędu kilku mikrometrów), rozłożonych periodycznie w chmurze atomowej. Grupa ta szczegółowo zbadała właściwości powstałej struktury fazy supersolid: wyznaczyła warunki graniczne pojawienia się fazy supersolid, w zależności od liczby atomów w kondensacie i wartości długości rozpraszania [13]. Stwierdzono, że krytyczna wartość długości rozpraszania, potrzebna do wytworzenia koherentnych maximów, przesuwana się na większe wartości przy wzroście liczby atomów [13]. Zaobserwowana faza supersolid miała charakter nietrwały - utrzymywała się tylko w pewnym zakresie parametrów i zwykle po pewnym czasie ewoluowała w układ niekoherentnych maximów albo wracała do fazy jednorodnej.

Kolejnym, istotnym dowodem na istnienie fazy supersolid, była obserwacja dwóch niezależnych modów oscylacji w kondensacie dysprozu. W eksperymentach przeprowadzonych przez Tanziego i innych [25] oraz Böttchera i innych [13], wzbudzano oscylacje gęstości metodą „quenchu”. Początkowo obserwowano jedną częstość oscylacji, tzw. mod oddychający (breathing mode), w którym kondensat cyklicznie zmienia swój rozmiar - jakby „oddychał”. Taka dynamika wskazywała, że układ znajduje się w stanie jednorod-

nego BEC. Po zmianie oddziaływań kontaktowych zaobserwowano jednak rozdzielenie tej pojedynczej częstości na dwie wyraźnie odrębne: niższą częstość przypisano ruchowi nadciekłemu, natomiast wyższą częstość - lokalnym oscylacjom przestrzennej struktury gęstości, czyli ruchowi kryształu. Jednoczesna obecność tych dwóch modów została zinterpretowana jako przejaw złamania symetrii ciągłej translacyjnej (związanej z uporządkowaniem przestrzennym) i $U(1)$ (związanej z nadciekłością) [26]. Oznaczało to, że układ przeszedł do fazy supersolid. Eksperymentalna detekcja obu modów, dokonana poprzez uwolnienie atomów z pułapki i analizę rozkładu pędów, potwierdziła obecność dwóch charakterystycznych częstości. Obserwacja ta dostarczyła jednoznacznego dowodu na współistnienie globalnej koherencji fazowej oraz uporządkowania krystalicznego - kluczowych cech fazy supersolid.

Warto również wspomnieć, że oprócz eksperymentów z dysprozem, badania z użyciem atomów erbu również dostarczyły dowodów na istnienie fazy supersolid. Prace Trautmann i współpracowników [27] (oraz inne, dotyczące mieszanin erb-dysproz) wykazały, że przy odpowiednim dostrojeniu oddziaływań kontaktowych i dipolowych, kondensaty erbu przechodzą do fazy supersolid, charakteryzującej się zarówno regularną modulacją gęstości, jak i globalną koherencją fazową. Dotychczasowe wyniki eksperymentalne wskazują, że supersolid można uzyskać w układach dipolowych, jednak sukces ten został osiągnięty głównie w pierwiastkach o bardzo silnym momencie magnetycznym, takich jak dysproz i erb, co sugeruje, że odpowiednio duża siła oddziaływań dipolowych jest kluczowa dla stabilizacji tej fazy.

3.3 Teoretyczne modele

Teoretyczne badania nad fazą supersolid odgrywają kluczową rolę w zrozumieniu mechanizmów, prowadzących do jej powstania oraz interpretacji wyników eksperymentalnych. W tej części przedstawione zostaną główne narzędzia i podejścia teoretyczne, stosowane w opisie układów nadciekłych z jednoczesnym uporządkowaniem przestrzennym. Omówione zostaną zarówno analiza widna wzbudzeń na podstawie równań Bogoliubova-de Gennesa, jak i metody obliczeniowe, oparte na technikach Monte Carlo. Osobna podsekcja poświęcona zostanie modelom mieszanin bozonowo-fermionowych, w których składnik fermionowy odgrywa kluczową rolę w powstawaniu uporządkowanych struktur przestrzennych.

3.3.1 Równania Bogoliubova-de Gennesa (BdG)

Analiza wzbudzeń w fazie supersolid, przeprowadzana metodą liniaryzacji uogólnionego równania Grossa-Pitaevskiego (tzw. *extended Gross-Pitaevskii equation*, eGPE, które uwzględnia m.in. oddziaływania dipolowe oraz kwantowe poprawki typu Lee-Huang-

Yang), prowadzi do równań Bogoliubova-de Gennesa (BdG) [28]. Kluczowym krokiem w tej metodzie jest przyjęcie ansatzu dla funkcji falowej, który zakłada niewielkie zaburzenie stanu podstawowego. Przykładowo, funkcję falową zapisuje się jako:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}) + \lambda \left[u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + v^*(\mathbf{r})e^{i\omega t} \right],$$

gdzie $\psi_0(\mathbf{r})$ to stan podstawowy (uzyskany np. metodą ewolucji w czasie urojonym), $u(\mathbf{r})$ i $v(\mathbf{r})$ to amplitudy zaburzeń, λ jest małą stałą kontrolującą wielkość zaburzenia, a ω to częstość wzbudzenia. Po podstawieniu tego ansatzu do eGPE i pozostawieniu tylko wyrazów liniowych względem λ , otrzymujemy układ równań liniowych, który można zapisać w postaci macierzowej:

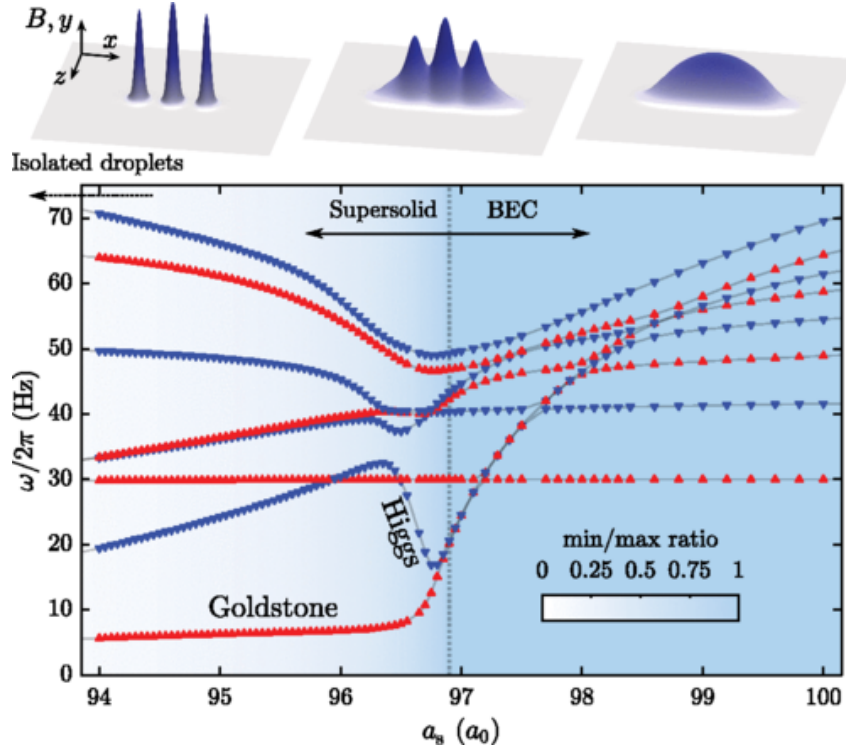
$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} u(\mathbf{r}) \\ v(\mathbf{r}) \end{pmatrix}.$$

Operator $\mathcal{L}$ zawiera m.in. część kinetyczną, potencjał zewnętrzny oraz oddziaływania kontaktowe i dipolowe, natomiast $\mathcal{M}$ odpowiada za elementy pozadiagonalne, które sprzęgają amplitudy u i v . Rozwiązanie równania macierzowego pozwala uzyskać widmo wzbudzeń układu, które w fazie supersolid wykazuje dwie charakterystyczne gałęzie:

- **Mody Goldstone’a** - wynikający ze złamania ciągłej symetrii $U(1)$ oraz symetrii translacyjnej. W idealnym, nieskończonym układzie ta gałąź nie ma przerwy energetycznej, natomiast w układach, które łamią symetrię translacyjną jawnie (jeden wyraz w hamiltonianie nie zachowuje symetrii reszty wyrazów - np. pułapka harmoniczna), uzyskuje się niewielką przerwę energetyczną. Obserwacje te zostały potwierdzone eksperymentalnie, wskazując na obecność wzbudzeń, odpowiadających złamanym symetriom charakterystycznym dla fazy supersolid [29].
- **Mod Higgsa** - oscylację amplitudy parametru porządku, która w nieskończonym układzie powinna mieć przerwę energetyczną. W praktyce, w układach pułapkovalnych, energia wzbudzenia modu Higgsa jest większa z powodu ograniczonych rozmiarów układu, a jego oddziaływanie z wyżej położonymi wzbudzeniami prowadzi do hybrydyzacji z innymi modami [30].

Widmo takich wzbudzeń zostało uzyskane i opisane w pracy Hertkorna i współpracowników [31], gdzie zaobserwowano rozdzielenie jednej gałęzi na dwa niezależne mody w funkcji zmiennego oddziaływania kontaktowego - co zilustrowano na rysunku 3.1. Ta praca pokazała, że zmiękczenie modu rotonowego przy przejściu z fazy BEC do fazy supersolid, prowadzi do zniesienia degeneracji i mod rozpada się na dwa opisane powyżej - co jest kluczowym teoretycznym dowodem na istnienie fazy supersolid. Dzięki analizie $u(\mathbf{r})$ i $v(\mathbf{r})$, można także wyznaczyć lokalne fluktuacje gęstości i fazy, co umożliwia identyfikację modów kolektywnych: modu "in-phase", odpowiadającego oscylacji całego układu

w fazie oraz modu "out-of-phase", oscylującego w przeciwfazie, gdzie część nadciekła porusza się w jedną stronę, a część krystaliczna w drugą. Tego rodzaju analiza pozwala także na rozróżnienie modu Higgsa, którego obecność została potwierdzona zarówno w obliczeniach teoretycznych, jak i w badaniach eksperymentalnych.



Rysunek 3.1: Widmo wzbudzeń w kondensacie dipolowym przy zmiennym oddziaływaniu kontaktowym. Wyraźnie widoczne rozdzielenie na dwa niezależne mody: Goldstone'a i Higgsa. Rysunek pochodzi z pracy [31].

3.3.2 Metody Monte Carlo

Metody Monte Carlo, takie jak Path Integral Monte Carlo (PIMC) i Diffusion Monte Carlo (DMC), pozwalają badać układy kwantowe z pierwszych zasad (czyli przyjmując fundamentalne równania kwantowe bez dodatkowych przybliżeń), uwzględniając fluktuacje kwantowe oraz oddziaływania wielu cząstek.

Path Integral Monte Carlo (PIMC): PIMC opiera się na reprezentacji funkcji falowej układu kwantowego w postaci sumy po trajektoriach w przestrzeni konfiguracji. Dzięki tej metodzie możliwe jest bezpośrednie uwzględnienie fluktuacji kwantowych oraz statystycznych efektów temperatury. Główne cechy PIMC to:

- Umożliwia badanie właściwości termodynamicznych układu w temperaturach skończonych [32].
- Pozwala na symulację dynamicznych trajektorii cząstek i ocenę wielocząstkowych korelacji [32].
- Stosowana jest m.in. do badania układów bozonowych [32].

Diffusion Monte Carlo (DMC): DMC to metoda oparta na symulacji ewolucji funkcji falowej w czasie urojonym, która umożliwia wyznaczenie stanu podstawowego układu. Główne cechy DMC to:

- Zapewnia wysoką dokładność przy obliczaniu energii stanu podstawowego [32].
- Redukuje wpływ stanów wzbudzonych poprzez ewolucję w czasie urojonym, co umożliwia uzyskanie stabilnych wyników dla układów wielu cząstek [32].
- Metoda ta jest szczególnie użyteczna w układach, gdzie oddziaływania cząstek są silne i wymagają uwzględnienia fluktuacji kwantowych [32].

W kontekście helu-4 symulacje te wykazały, że idealny, perfekcyjny kryształ (bez defektów) nie generuje nadciekłości, ponieważ w takim układzie każdy atom jest ściśle związany z regularną siecią krystaliczną. Natomiast jedynie obecność defektów topologicznych (np. granic ziaren - czyli miejsc, gdzie spotykają się regiony o różnych orientacjach krystalicznej struktury, lub dyslokacji - liniowych nieciągłości w sieci krystalicznej) może stworzyć lokalne kanały przepływu nadciekłego. Prace przeglądowe [32], dostarczają kompleksowego opisu tego zagadnienia, wyjaśniając, dlaczego obserwacje eksperymentalne w stałym ^4He pozostają niejednoznaczne.

3.3.3 Mieszaniny bozonowo-fermionowe i rola fermionów

Oprócz eksperymentów prowadzonych z kondensatami dipolowymi, liczne analizy teoretyczne przewidują możliwość wystąpienia fazy supersolid również w mieszaninach bozonowo-fermionowych, umieszczonych w sieciach optycznych. W tego typu układach fermiony

(np. atomy potasu-40 lub inne, w zależności od realizacji) mogą efektywnie mediować oddziaływania pomiędzy bozonami (np. rubidu-87 lub sodu-23), co prowadzi do stabilizacji fazy supersolid nawet przy oddziaływaniach czysto lokalnych, on-site (czyli ograniczonych do jednego węzła sieci, co jest charakterystyczne dla modeli, takich jak model Bosego-Hubbarda, gdzie oddziaływanie zachodzi wyłącznie na jednym węźle). W analizach teoretycznych wykorzystuje się model Bosego-Fermiego-Hubbarda, przy czym fermionowe stopnie swobody są eliminowane w celu uzyskania efektywnego opisu. W takim ujęciu fermiony wpływają na bozony poprzez modyfikację ich wzajemnych oddziaływań. Dzięki temu, nawet przy oddziaływaniach ograniczonych do jednego węzła sieci (on-site), układ może przejść do fazy supersolid, ponieważ oddziaływania między bozonami, mediowane przez fermiony, rozchodzą się na całą sieć, uzyskując charakter długozasięgowy [17].

W pracach teoretycznych, takich jak te autorstwa Büchlera i Blattera [15] oraz Titvinidze, Snoeka i Hofstettera [16], modele mieszanin bozonowo-fermionowych były analizowane głównie w kontekście sieci optycznych o geometrii dwuwymiarowej, takich jak sieci kwadratowe czy trójkątne. W eksperymentach wykorzystuje się zazwyczaj optyczne sieci laserowe, które pozwalają na realizację zarówno struktur 2D, jak i 3D, w zależności od konfiguracji wiązek i parametrów pułapki. Typowymi kandydatami eksperymentalnymi są mieszaniny, w których bozony to np. Rb-87 lub Na-23, a fermiony to K-40 lub Li-6. Są to pierwiastki, które można efektywnie chłodzić i kontrolować ich oddziaływania przy pomocy rezonansów Feshbacha. Ich wybór wynika zarówno z dostępnych technologii, jak i korzystnych właściwości atomowych, takich jak masa i struktura stanów nadsubtelnych, które wpływają na stabilność mieszaniny. Szczególną rolę odegrała praca Orth, Bergmana i Le Hura [17], w której wykazano, że w układzie o trójkątnej geometrii sieci, fermiony mogą efektywnie indukować uporządkowanie przestrzenne i umożliwiać powstanie fazy supersolid nawet, bez oddziaływań długozasięgowych w wyjściowym hamiltonianie.

Pomimo zachęcających wyników teoretycznych, jak dotąd nie udało się jednoznacznie potwierdzić eksperymentalnie istnienia fazy supersolid w mieszaninach bozonowo-fermionowych. Główne wyzwania obejmują trudności w osiągnięciu odpowiednio niskich temperatur, kontrolowaniu stabilności mieszaniny oraz precyzyjnym dostrojeniu oddziaływań pomiędzy składnikami mieszaniny. Niemniej jednak, badania te pozostają aktywnym i obiecującym kierunkiem w poszukiwaniu nowych realizacji fazy supersolid.

Rozdział 4

Różne formalizmy, ta sama fizyka: mody Goldstone’a przy spontanycznym łamaniu symetrii

W niniejszym rozdziale analizowane jest zjawisko spontanicznego łamania symetrii w układach z fazą nadciekłą oraz związane z nimiskoenergetyczne wzbudzenia kolektywne, czyli mody Goldstone’a. W dalszej części rozdziału przedstawione zostaną dwa formalizmy opisu spontanicznego łamania symetrii. Najpierw, w języku teorii Ginzburga-Landaua, omówiona zostanie konstrukcja efektywnej teorii pola na poziomie coarse graining oraz rola parametru porządku w opisie nadciekłości. Następnie, w formalizmie Lagrange’a, zostanie wprowadzone twierdzenie Noether, prąd i ładunek Noether oraz kryterium spontanicznego złamania symetrii sformułowane w terminach komutatorów z generatorami symetrii. Jako konkretny przykład zostanie rozważone pole Schrödingera z globalną symetrią $U(1)$, na którym można w sposób przejrzysty prześledzić związek pomiędzy parametrem porządku a pojawieniem się modów Goldstone’a. Rozdział kończy krótkie podsumowanie, w którym podkreślona zostaje równoważność omawianych formalizmów oraz znaczenie modów Goldstone’a w opisie spontanicznego łamania symetrii.

4.1 Podstawowe aspekty fazy supersolid

W fazie supersolid obserwuje się uporządkowaną, okresową modulację gęstości, jednak samo pojawienie się takiej modulacji nie jest jednoznacznym dowodem na istnienie tej fazy. Wiele układów może wykazywać gęstość zmienną przestrzennie - na przykład bozony umieszczone w sieciach optycznych lub silnie oddziałujące układy jednowymiarowe, takie jak gaz w reżimie Tonksa-Girardeau - gdzie modulacja gęstości wynika z narzuconych warunków zewnętrznych, takich jak potencjał pułapki, a nie ze spontanicznego złamania symetrii translacyjnej. Aby układ mógł być uznany za supersolid, oprócz modulacji gęsto-

ści musi również zachować globalną koherencję fazową. Typowym mechanizmem prowadzącym do powstania tej fazy jest niestabilność rotonowa, która sprzyja spontanicznemu złamaniu symetrii translacyjnej. Jej obecność potwierdzają charakterystyczne mody kolektywne, takie jak mody Goldstone’a, związane jednocześnie z nadciekłością i uporządkowaniem przestrzennym. W pracach przeglądowych, np. Boninsegni i Prokof’ev [32], podkreśla się, że spontaniczna modulacja gęstości powinna wynikać ze złamania ciągłej symetrii translacyjnej, a nie być jedynie efektem zewnętrznych warunków.

4.2 Teoria Ginzburga-Landaua i mody Goldstone’a

W tej części zaprezentowano fenomenologiczną teorię Ginzburga-Landaua, służącą do opisu przejść fazowych, w szczególności przejścia do fazy nadciekłej. Omówiono rolę modów Goldstone’a jako konsekwencję spontanicznego złamania globalnej symetrii $U(1)$ w gazie Bosego.

4.2.1 Coarse graining

Aby przejść od mikroskopowego opisu kryształu do efektywnej teorii pola, stosuje się tzw. *coarse graining* [33]. Polega ono na uśrednianiu mikroskopowych stopni swobody poprzez eliminację wysokoenergetycznych wzbudzeń, co prowadzi do opisu układu w kategoriach ciągłych pól, zamiast dyskretnych współrzędnych atomów. W celu zilustrowania idei, rozważmy jednowymiarowy łańcuch atomów o stałej sieci a . Typowe wzbudzenia w niskich temperaturach charakteryzują się długościami fali

$$\lambda > \lambda(T) \approx \frac{v}{\nu_T} \approx \frac{\hbar v}{k_B T} \gg a,$$

gdzie v to prędkość propagacji zaburzenia, a ν_T to typowa częstość, odpowiadająca energii termicznej kT . Oznacza to, że zmiany zachodzą na skalach znacznie większych niż odległości międzyatomowe. W takim przypadku można zdefiniować funkcję $u(x)$, opisującą przemieszczenie elementu łańcucha względem jego równowagowej pozycji, jako funkcję ciągłą w przestrzeni x , uśrednioną w przedziale dx , spełniającym warunek

$$a \ll dx \ll \lambda(T).$$

Przedział dx zawiera wiele atomów, co pozwala na uśrednienie mikroskopowych stopni swobody i uniknięcie wpływu dyskretnej struktury atomowej. Jednocześnie przedział ten musi być wystarczająco mały względem długości fali wzbudzenia $\lambda(T)$, aby uchwycić lokalne, łagodne zmiany pola $u(x)$. Taki wybór przedziału zapewnia, że funkcja $u(x)$ i jej pochodne pozostają ciągłe i różniczkowalne, pozbawione skoków lub oscylacji, wynikających ze struktury atomowej. Energia kinetyczna układu opisywana jest przez gęstość

masy $\rho = m/a$, gdzie m to masa pojedynczego atomu i wyraża się wzorem

$$T[u] = \frac{\rho}{2} \int dx \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2.$$

Ponieważ na skalach mniejszych niż a , zmiany pola $\dot{u}$ są nieistotne, pole $\dot{u}$ można traktować jako funkcję gładką i ciągłą. W ten sposób całkowita energia układu może być opisywana jako funkcjonal pola $u(x, t)$. Proces konstrukcji efektywnego potencjału energii $V[u]$, opiera się na kilku fundamentalnych zasadach:

- **Lokalność:** Zakłada się, że oddziaływania w układzie są krótkozasięgowe. W efekcie, całkowitą energię potencjalną można zapisać jako całkę z gęstości energii Φ , zależną od pola $u(x)$ oraz jego pochodnych:

$$V[u] = \int dx \Phi \left(u(x), \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \dots \right).$$

Wyższe pochodne odpowiadają oddziaływaniom o coraz dłuższym zasięgu, które w efektywnym opisie są coraz mniej istotne.

- **Symetria translacyjna:** Energia wewnętrzna układu nie może zmieniać się przy jednostajnym przesunięciu pola, czyli przy transformacji $u(x) \rightarrow u(x) + c$. Z tego wynika, że Φ nie może zależeć bezpośrednio od $u(x)$, a jedynie od jego gradientów, np. $\frac{du}{dx}$ czy $\frac{d^2u}{dx^2}$.
- **Stabilność:** Skoro układ znajduje się w pobliżu minimum potencjału, to w konsekwencji ani wyraz liniowy względem $u(x)$, ani zależność liniowa od pierwszej pochodnej, nie mogą pojawiać się w efektywnym potencjale. Dodatkowo, wyraz kwadratowy musi być dodatnio określony, co zapewnia stabilność tego minimum.

Na tej podstawie, najbardziej ogólny, efektywny potencjał energii w przybliżeniu coarse graining, można zapisać jako:

$$V[u] = \int dx \left[\frac{K}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{L}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 + \dots + M \left(\frac{du}{dx} \right)^3 + \dots \right], \quad (4.1)$$

a po przejściu do przestrzeni Fouriera przyjmuje postać

$$\begin{aligned} V[u] = \int \frac{dk}{2\pi} \left[\frac{K}{2} k^2 + \frac{L}{2} k^4 + \dots \right] |u(k)|^2 \\ - iM \int \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} k_1 k_2 (k_1 + k_2) u(k_1) u(k_2) u(-k_1 - k_2) + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

W granicy $k \rightarrow 0$ wyższe rzędy gradientów (np. wyraz z L) stają się nieistotne, a przy małych deformacjach można pominąć wyrazy wyższe niż drugiego rzędu (takie jak wyraz

z M). Po dodaniu energii kinetycznej otrzymujemy prostą, jednowymiarową teorię pola, której Hamiltonian ma postać [33]

$$H = \frac{\rho}{2} \int dx \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (4.3)$$

Jest to jednowymiarowa teoria z parametrami zależnymi od materiału, gdzie ρ to gęstość masy, a $v = \sqrt{K/\rho}$ oznacza prędkość propagacji fali w układzie.

4.2.2 Teoria Ginzburga-Landaua (GL)

W ujęciu fenomenologicznym, zamiast rozpatrywać pełny, mikroskopowy Hamiltonian opisujący oddziaływania między wszystkimi atomami, stosuje się uśrednione pole porządku $\psi(\mathbf{r})$ (w przypadku nadciekłości) - analogicznie do techniki uśredniania *coarse graining*. W ten sposób wyjściowy Hamiltonian, obejmujący wszystkie mikroskopowe stopnie swobody, zastępuje się efektywnym Hamiltonianem, który uwzględnia wszystkie możliwe konfiguracje tego uśrednionego pola. Efektywny Hamiltonian powinien być skonstruowany tak, aby żaden z jego wyrazów nie łamał fundamentalnych symetrii układu [34]:

$$\beta H[\psi] = \int d^d r \left[\frac{K}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{t}{2} |\psi|^2 + \frac{u}{4} |\psi|^4 + \dots \right], \quad (4.4)$$

gdzie $\beta = 1/(k_B T)$. W tej części d oznacza wymiar przestrzeni (w dalszej części rozdziału w przykładzie Schrödingera używamy równoważnie oznaczenia D). Równanie (4.4) zostało skonstruowane wyłącznie z wymogami zgodności z symetriami układu i zależy od fenomenologicznych parametrów $\{K, t, u, \dots\}$, które w ogólności zależą od temperatury. Prawdopodobieństwo wystąpienia danej konfiguracji pola określa waga Boltzmanna, $\exp\{-\beta H[\psi(x)]\}$. Hamiltonian GL traktowany jest jako efektywna energia swobodna, uzyskana przez wycalkowanie (coarse graining) mikroskopowych stopni swobody. Postulujemy formę efektywnej energii swobodnej wyłącznie na podstawie symetrii, co sprawia, że fenomenologiczne parametry posiadają nieznaną zależność funkcjonalną od mikroskopowych parametrów oraz od warunków zewnętrznych (m.in. temperatury). Wówczas suma statystyczna może być wyrażona jako:

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_{\text{mic}}} \approx Z_{\text{reg}} \times \int \mathcal{D}\psi(x) e^{-\int d^d x \left[\frac{K}{2} |\nabla \psi|^2 + \frac{t}{2} |\psi|^2 + \frac{u}{4} |\psi|^4 + \dots \right]}, \quad (4.5)$$

gdzie Z_{reg} odpowiada za wkład od pozostałych stopni swobody, natomiast $\int \mathcal{D}\psi$ oznacza całkę funkcjonalną po wszystkich możliwych konfiguracjach pola porządku $\psi(\mathbf{r})$. Obliczenie sumy statystycznej w teorii Ginzburga-Landaua nadal stanowi duże wyzwanie. Jako pierwszy krok stosujemy przybliżenie metodą "punktu siodłowego", polegające na zastąpieniu całki funkcjonalnej (4.5) przez jej maksymalną wartość. Dzięki tym technikom

możliwe jest zastąpienie złożonego opisu mikroskopowego bardziej użyteczną funkcją, którą jest energia swobodna, opisująca makroskopowe właściwości układu.

4.2.3 Nadciekłość w ujęciu teorii Ginzburga-Landaua

Efektywną teorię pola można zastosować do opisu nadciekłości w układach bozonowych, gdzie kluczowym elementem jest pole zespolone $\psi(\mathbf{r})$, pełniące rolę parametru porządku. Pole to opisuje amplitudę i fazę makroskopowego stanu kwantowego, zajmowanego przez bozony. Dla takiego układu funkcjonal energii swobodnej ma postać:

$$F[\psi(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + \alpha_2 |\psi(\mathbf{r})|^2 + \alpha_4 |\psi(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (4.6)$$

gdzie α_2 i α_4 to parametry zależne od temperatury. Pierwszy wyraz odpowiada za wkład energetyczny, związany z niejednorodnością pola, a kolejne dwa opisują efektywny potencjał zależny od amplitudy ψ . W przybliżeniu *punktu siodłowego* szukamy konfiguracji maksymalizującej sumę statystyczną, co odpowiada znalezieniu minimum energii swobodnej. Aby je wyznaczyć, naturalnym wyborem jest przyjęcie stałej amplitudy, dla której $\nabla \psi = 0$. W takim przypadku funkcjonal energii swobodnej redukuje się do efektywnego potencjału:

$$V(\psi) = \alpha_2 |\psi|^2 + \alpha_4 |\psi|^4. \quad (4.7)$$

Parametry $\alpha_2(T)$ i $\alpha_4(T)$ są gładkimi funkcjami temperatury. W pobliżu temperatury krytycznej T_c , można je rozwinąć w szereg Taylora względem $(T - T_c)$. Następnie zachowuje się tylko minimalną liczbę wyrazów, definiując T_c w taki sposób, aby wyraz stały w α_2 zniknął, $\alpha_2(T_c) = 0$, funkcje te można zapisać w postaci:

$$\alpha_2(T) = a(T - T_c) + O(T - T_c)^2, \quad \alpha_4(T) = \tilde{\alpha}_4 + O(T - T_c), \quad (4.8)$$

gdzie $a > 0$ oraz $\tilde{\alpha}_4 > 0$ są stałymi zależnymi od mikroskopowych własności układu i $\tilde{\alpha}_4 > 0$ jest stałą, zapewniającą stabilność potencjału (dbamy, aby energia swobodna zawsze rosła dla dużych wartości ψ). W dalszej części podrozdziału ograniczamy się do przybliżeń:

$$\alpha_2(T) \approx a(T - T_c), \quad \alpha_4(T) \approx \tilde{\alpha}_4 > 0, \quad (4.9)$$

tn. zachowujemy tylko wyraz liniowy w rozwinięciu $\alpha_2(T)$ oraz przybliżamy $\alpha_4(T)$ przez stałą dodatnią wartość. Znajdując minimum funkcji $V(\psi)$ dla temperatur wyższych niż temperatura krytyczna ($T > T_c$), mamy ($\alpha_2 > 0$), więc wyznaczona wartość $|\psi|^2 = -\frac{\alpha_2}{2\tilde{\alpha}_4}$ byłaby ujemna, co jest fizycznie niemożliwe (gęstość nie może być ujemna). W związku z tym, jedynym rozsądnym rozwiązaniem jest $|\psi| = 0$. Natomiast gdy $T < T_c$, parametr

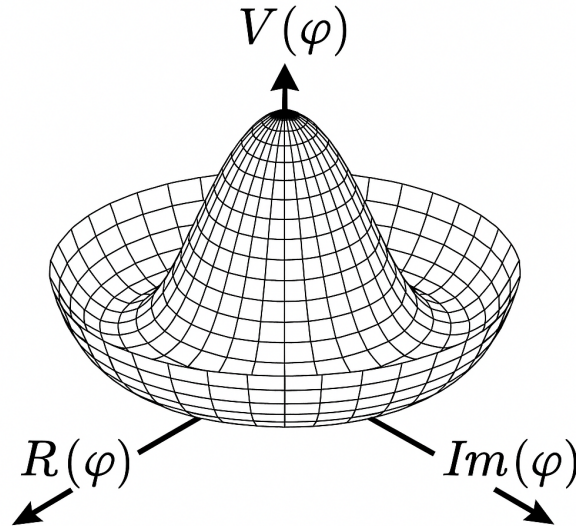
α_2 staje się ujemny, a potencjał $V(\psi)$ osiąga minimum dla wartości niezerowej:

$$|\psi|^2 = \frac{|\alpha_2|}{2\tilde{\alpha}_4} \equiv \psi_0^2 = n_s, \quad (4.10)$$

gdzie n_s można interpretować jako gęstość składowej nadciekłej. Wartość $|\psi|$ określa jedynie amplitudę pola, natomiast jego faza θ pozostaje arbitralna. Pole zespolone możemy zatem zapisać w postaci:

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi| e^{i\theta(\mathbf{r})}. \quad (4.11)$$

Funkcjonał $F[\psi]$ w stanie jednorodnym zależy wyłącznie od modułu pola ψ , a nie od jego fazy θ . Oznacza to, że wszystkie stany o jednakowym $|\psi|$, lecz różnych wartościach fazy, mają tę samą energię - układ posiada więc nieskończenie wiele zdegenerowanych stanów podstawowych. Gdy poniżej temperatury krytycznej T_c , układ wybiera konkretną wartość fazy, dochodzi do spontanicznego złamania symetrii $U(1)$. Potencjał przyjmuje wówczas postać charakterystycznego „kapelusza meksykańskiego” (ang. Mexican hat), jak zilustrowano na rysunku 4.1. Wzbudzenia wzdłuż kierunku fazy $\theta(\mathbf{r})$ nie zmieniają lokalnie



Rysunek 4.1: Potencjał Ginzburga-Landaua poniżej T_c przedstawiony jako funkcja zespolonego pola ψ . Minimum leży na pierścieniu o promieniu $|\psi| = \psi_0$, co oznacza degenerację względem fazy.

modułu $|\psi|$, lecz prowadzą do niskoenergetycznych oscylacji fazy w przestrzeni. Tego rodzaju oscylacje są typowe dla układów ze spontanicznym złamaniem symetrii i noszą nazwę *modów Goldstone’a*. Ich obecność jest bezpośrednią konsekwencją spontanicznego złamania symetrii $U(1)$, związanego z przejściem do bardziej uporządkowanego stanu przy $T < T_c$.

4.2.4 Spontaniczne złamanie symetrii i pojawienie się modów Goldstone'a w nadcieczy

Jak pokazaliśmy wyżej, parametr porządku w temperaturze T znacznie powyżej temperatury krytycznej przyjmuje wartość zero. Jednak w niskich temperaturach, gdy układ przechodzi do fazy nadciekłej, dochodzi do spontanicznego złamania symetrii - wybrana zostaje konkretna wartość fazy parametru porządku ψ , opisującego stan układu makroskopowego [35]. W efekcie pojawia się długi zasięgowy porządek fazowy, analogiczny do pojawiającego się namagnesowania w układach magnetycznych.

Z uwagi na to, że symetria jest złamana jedynie *globalnie*, układ pozostaje nadal nieczuły na jednorodne (globalne) przesunięcia fazy (każdy taki wybór fazy nie kosztuje energii). Jeżeli jednorodne przesunięcie fazy nie kosztuje energii, to powolne zmiany fazy w przestrzeni kosztują bardzo mało energii, co oznacza, że faza może zmieniać się od punktu do punktu. Mówimy wówczas o tzw. *modach Goldstone'a* - niskoenergetycznych wzbudzeniach, odpowiadających powolnym zmianom fazy parametru porządku $\psi(\mathbf{r})$. Przyjmując, że bozony obsadzają makroskopowo jeden stan kwantowy, parametr porządku zapisujemy jako:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\theta(\mathbf{r})},$$

gdzie ψ_0 jest (w przybliżeniu) stałą amplitudą, a $\theta(\mathbf{r})$ - zmienną fazą. Po podstawieniu ansatzu $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\theta(\mathbf{r})}$ do Hamiltonianu (4.4) otrzymujemy:

$$\beta H = \beta H_0 + \frac{\bar{K}}{2} \int d^d r (\nabla \theta(\mathbf{r}))^2, \quad (4.12)$$

gdzie $\bar{K} = K \psi_0^2$, a K jest pewną stałą sprzężenia w teorii Ginzburga-Landaua. Wykorzystując symetrię translacyjną w równaniu (4.12), $\theta(\mathbf{r})$ można rozłożyć na niezależne mody (w obszarze o objętości V). Ponieważ Hamiltonian komutuje z operatorem translacji, można wybrać wspólną bazę wektorów własnych, w której poszczególne mody, odpowiadające różnym wektorom falowym są od siebie niezależne:

$$\theta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{\theta(\mathbf{q})}{\sqrt{V}},$$

co pozwala opisać oscylacje fazy jako zbiór niezależnych modów, z których każdy odpowiada konkretnej długości fali. Wówczas hamiltonian przyjmuje postać:

$$\beta H = \beta H_0 + \frac{\bar{K}}{2} \sum_{\mathbf{q}} q^2 |\theta(\mathbf{q})|^2. \quad (4.13)$$

Jak widać, mody o małych wartościach $q \rightarrow 0$, (czyli odpowiadające długim długościom fali) mają bardzo niską energię, co identyfikuje je jako mody Goldstone'a.

Aby lepiej zrozumieć, dlaczego układ faworyzuje właśnie te wzbudzenia, warto przyrzeć się rozkładowi prawdopodobieństwa dla konfiguracji pola $\theta(\mathbf{q})$ w przestrzeni Fouriera:

$$\mathcal{P}[\theta(\mathbf{q})] \propto \exp \left[-\frac{\bar{K}}{2} \sum_{\mathbf{q}} q^2 |\theta(\mathbf{q})|^2 \right] \propto \prod_{\mathbf{q}} \exp \left[-\frac{\bar{K}}{2} q^2 |\theta(\mathbf{q})|^2 \right], \quad (4.14)$$

gdzie $\theta(\mathbf{q})$ stanowią zbiór niezależnych zmiennych losowych, z których każda ma rozkład normalny (Gaussa) ze średnią zero i wariancją zależną od $\mathbf{q}$. Z powyższego wyrażenia wynika, że dla $q \rightarrow 0$, wyraz w wykładniku dąży do zera, a więc prawdopodobieństwo realizacji takich konfiguracji osiąga maksimum. Innymi słowy, układ faworyzuje oscylacje o najdłuższych długościach fali - czyli mody Goldstone'a.

Dodatkowo, wariancja we wzorze (4.14) dana jest wyrażeniem:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\bar{K}q^2}.$$

Widać więc, że gdy $q \rightarrow 0$, wariancja rośnie, a fluktuacje stają się coraz większe, ponieważ koszt energetyczny tych wzbudzeń jest minimalny. Zjawisko to ma szczególnie istotne konsekwencje w niskich wymiarach, dla $d \leq 2$ fluktuacje stają się tak silne, że niszczą porządek długozasięgowy. Jest to treść twierdzenia Mermin-Wagnera [36], które głosi, że w jednowymiarowych i dwuwymiarowych układach z symetrią ciągłą z krótkozasięgowymi oddziaływaniami, spontaniczne złamanie symetrii nie jest możliwe w temperaturze różnej od zera.

4.3 Złamanie symetrii w formalizmie Lagrange'a i przykład pola Schrödingera

W tej sekcji formalnie przedstawiono twierdzenie Noether, ukazując związek pomiędzy symetriami układu a odpowiadającymi im prawami zachowania. Następnie omówiono sposób identyfikacji spontanicznego złamania symetrii poprzez analizę komutatorów operatorów pól z generatorami tych symetrii.

4.3.1 Twierdzenie Noether a generatory symetrii

Jedną z kluczowych konsekwencji istnienia symetrii w fizyce jest pojawienie się praw zachowania. Formalnie, w układach opisanych za pomocą lagranżjanu $\mathcal{L}[\phi_a(x), \partial_\mu \phi_a(x)]$, każdej ciągłej symetrii odpowiada zachowana wielkość fizyczna [37].

Jeśli działanie $S = \int d^4x \mathcal{L}$ jest niezmiennicze względem pewnej ciągłej transformacji pola $\phi_a \rightarrow \phi_a + \delta\phi_a$, to istnieje prąd $j^\mu(x)$, spełniający równanie ciągłości $\partial_\mu j^\mu = 0$. W niniejszej sekcji stosujemy standardową notację czterowymiarową: $x = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$,

zaś $d^4x = dx^0 d^3x = dt d^3x$ oznacza całkowanie po czasie i przestrzeni, greckie indeksy $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, odnoszą się do składowej czasowej i przestrzennej, a gdy ten sam indeks pojawia się raz jako dolny i raz jako górny, stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina, tzn. domyślnie sumujemy po wszystkich jego wartościach. Prąd ten posiada składową czasową $j^0(x)$, z którą związany jest ładunek Noether (wielkość zachowana):

$$Q = \int d^3x j^0(x), \quad (4.15)$$

który jest niezależny od czasu: $\frac{d}{dt}Q = 0$ [38]. Pozostałe składowe przestrzenne prądu $j^i(x)$ (dla $i = 1, 2, 3$) opisują, jak ładunek Noether przepływa w przestrzeni (gęstość prądu tej wielkości) i wraz ze składową czasową j^0 , tworzą równanie ciągłości, czyli lokalne prawo zachowania. Ładunek Noether Q pełni rolę generatora transformacji symetrii, czyli jest operatorem, który komutuje z Hamiltonianem układu $[H, Q] = 0$. W przypadku symetrii globalnych, takich jak symetria $U(1)$, operator Q ma bezpośrednią interpretację fizyczną, może być to np. całkowita liczba cząstek, ładunek elektryczny lub pęd całkowity - w zależności od rodzaju symetrii. Generator symetrii działa nie tylko na pola, ale także na stany w przestrzeni Hilberta, przekształcając je zgodnie z działaniem grupy symetrii.

4.3.2 Spontaniczne złamanie symetrii: kryterium i parametr porządku

Fenomen *spontanicznego złamania symetrii* polega na tym, że *hamiltonian* lub *lagranżjan* zachowuje pewną symetrię, lecz stan podstawowy układu jej nie respektuje. Formalnym kryterium złamania symetrii jest istnienie operatora $\hat{\Phi}$, dla którego, wartość oczekiwana komutatora z generatorem symetrii $\hat{Q}$ jest niezerowa:

$$O(x) := \langle \Psi | [\hat{Q}, \hat{\Phi}(x)] | \Psi \rangle \neq 0, \quad (4.16)$$

gdzie $O(x)$ jest nazywany (lokalnym) parametrem porządku, natomiast $[\hat{Q}, \hat{\Phi}(x)]$ pełni rolę operatora parametru porządku. W takiej sytuacji mówimy, że stan $|\Psi\rangle$ łamie daną symetrię. W przeciwnym przypadku, gdy dla każdego $\hat{\Phi}$ wartość oczekiwana tego komutatora jest równa zeru, stan pozostaje symetryczny. Generator $\hat{Q}$ odpowiada ciągłej transformacji symetrii, której działanie można opisać za pomocą unitarnego operatora:

$$U(\alpha) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha\hat{Q}\right), \quad (4.17)$$

gdzie α jest rzeczywistym parametrem. Mówimy, że stan $|\Psi\rangle$ jest *symetryczny* względem tej transformacji, jeśli jest jej stanem własnym:

$$U(\alpha)|\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \quad (4.18)$$

W stanie symetrycznym (niezmienniczym względem $U(\alpha)$) znikają wartości średnie tych operatorów $\hat{\Phi}$, które pod działaniem transformacji symetrii zmieniają się o fazę, tzn. spełniają:

$$U^\dagger(\alpha) \hat{\Phi}(x) U(\alpha) = e^{-iq\alpha} \hat{\Phi}(x), \quad q \neq 0.$$

Wówczas $\langle \hat{\Phi}(x) \rangle = e^{-iq\alpha} \langle \hat{\Phi}(x) \rangle$, co dla dowolnego α wymusza $\langle \hat{\Phi}(x) \rangle = 0$. Na przykład dla symetrii $U(1)$, zachodzi $U^\dagger(\alpha) \hat{\psi}(x) U(\alpha) = e^{-i\alpha} \hat{\psi}(x)$, więc w stanie symetrycznym $\langle \hat{\psi}(x) \rangle = 0$. Wówczas działanie transformacji nie zmienia fizycznie stanu, a dla dowolnego operatora $\hat{\Phi}$, wartość oczekiwana komutatora $[\hat{Q}, \hat{\Phi}]$ w stanie $|\Psi\rangle$ znika. Dodatkowo, jeżeli $\hat{\Phi}$ jest również złamanym generatorem symetrii i wartość oczekiwana komutatora $[\hat{Q}, \hat{\Phi}(x)]$ jest niezerowa, oznacza to, że oba generatory wzbudzają ten sam mod Goldstone'a. Taki mod nazywany jest *modem typu B* [39]. Dla tego typu modów zależność dyspersyjna ma charakter kwadratowy [40, 41]. W przeciwnym przypadku mamy do czynienia z *modem typu A*, dla którego zależność dyspersyjna jest liniowa [40, 41]. Parametr porządku $O(x)$ z definicji jest równy zeru w stanie symetrycznym oraz różny od zera, gdy stan jest niesymetryczny (czyli nie jest stanem własnym operatora symetrii).

4.3.3 Przykład: pole Schrödingera i spontaniczne złamanie symetrii $U(1)$

Rozważmy pole Schrödingera $\psi(x, t)$ (na tym etapie traktowane jako pole klasyczne) z działaniem [38]:

$$S[\psi, \psi^*] = \int dt d^D x \left(\frac{i\hbar}{2} [\psi^* (\partial_t \psi) - (\partial_t \psi^*) \psi] - \frac{\hbar^2}{2m} (\partial_n \psi^*) (\partial_n \psi) - V(x) |\psi|^2 \right), \quad (4.19)$$

gdzie D oznacza wymiar przestrzeni, a $x = \mathbf{x}$. Dla każdej ciągłej symetrii układu twierdzenie Noether zapewnia istnienie prądu $j^\mu(x)$, spełniającego równanie ciągłości:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (4.20)$$

czyli po zapisaniu równania ciągłości w postaci rozdzielającej składnik czasowy i przestrzenny, otrzymujemy:

$$\partial_t j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (4.21)$$

Dla zespolonego pola Schrödingera $\psi(x)$, transformacja globalnej zmiany fazy ma postać:

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha} \psi(x), \quad \psi^*(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi^*(x). \quad (4.22)$$

Działanie jest niezmiennicze względem tej transformacji. Dla infinitezymalnie małego parametru α , dokonujemy rozwinięcia wykładnika we wzorze (4.22) względem α w $\alpha = 0$

i otrzymujemy zmiany pól, wynikające z infinitezymalnej transformacji zmiany fazy:

$$\delta_s \psi(x) = -i\psi(x), \quad \delta_s \psi^*(x) = i\psi^*(x).$$

Aby wyznaczyć prąd Noether, korzystamy z formalizmu pędów kanonicznych [38]. Kanoniczne pędy, odpowiadające polom ψ i ψ^* wynoszą:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = \frac{i\hbar}{2} \psi^*(x), \quad \pi^*(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} = -\frac{i\hbar}{2} \psi(x). \quad (4.23)$$

Zgodnie z ogólnym wyrażeniem na prąd Noether, otrzymujemy:

$$j^0(x) = \pi(x)\delta_s \psi(x) + \pi^*(x)\delta_s \psi^*(x) = \hbar |\psi(x)|^2, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{j}(x) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (4.25)$$

Ładunek Noether (czyli zachowana wielkość fizyczna) wynosi:

$$Q = \int d^D x j^0(x) = \hbar \int d^D x |\psi(x)|^2, \quad N \equiv \frac{1}{\hbar} Q = \int d^D x |\psi(x)|^2. \quad (4.26)$$

W interpretacji kwantowej N opisuje całkowitą liczbę cząstek - czyli normę funkcji falowej i jest zachowaną wielkością fizyczną, zgodną z warunkiem unitarności ewolucji. Można zauważyć, że energia układu zależy wyłącznie od amplitudy $|\psi|$. Oznacza to, że stany podstawowe są zdegenerowane względem wyboru fazy. Jeśli układ wybiera konkretną fazę, dochodzi do spontanicznego złamania symetrii $U(1)$. Wówczas parametr porządku $O(x)$ we wzorze 4.16, przyjmuje niezerową wartość. Aby obliczyć operator parametru porządku, korzystamy z relacji komutacyjnej $[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)] = \delta^{(D)}(x - y)$ oraz wybieramy operatory $\hat{Q}$ i $\hat{\Phi}$, które mają postać:

$$\hat{Q} = \hbar \int d^D x \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x), \quad \hat{\Phi}(x) = \hat{\psi}(x),$$

a komutator wynosi:

$$[\hat{Q}, \hat{\psi}(x)] = -\hbar \hat{\psi}(x). \quad (4.27)$$

Zatem $\hat{\psi}(x)$ pełni jednocześnie rolę pola interpolacyjnego ($\Phi(x)$) i (lokalnego) parametru porządku. Z powyższego komutatora wynika bezpośrednio:

$$O(x) = \langle [\hat{Q}, \hat{\psi}(x)] \rangle = -\hbar \langle \hat{\psi}(x) \rangle. \quad (4.28)$$

W stanie symetrycznym względem $U(1)$ (np. w stanie o dobrze określonej liczbie cząstek, tj. będącym stanem własnym $\hat{Q}$), zachodzi $\langle \hat{\psi}(x) \rangle = 0$, a więc $O(x) = 0$. Natomiast w fazie, w której symetria $U(1)$ jest spontanicznie złamana, istnieje wybór stanu podstawowego z niezerową wartością średnią pola $\langle \hat{\psi}(x) \rangle \neq 0$, co implikuje $O(x) \neq 0$. Przykładem

jest opis kondensatu bozonowego w przybliżeniu pola średniego, gdzie stan podstawowy jest stanem koherentnym (superpozycja stanów o różnych N), przez co liczba cząstek nie jest dokładnie określona.

W naszym przykładzie mod Goldstone'a może być wzbudzony zarówno przez generator złamanej symetrii $\hat{Q}$, jak i przez pole interpolacyjne $\hat{\psi}(x)$. Ponieważ jednak złamana jest tylko jedna globalna symetria $U(1)$ z jednym generatorem, odpowiadający jej mod Goldstone'a jest typu A i ma liniową zależność dyspersyjną.

4.3.4 Pojawienie się modu Goldstona

Twierdzenie Noether nie ogranicza się wyłącznie do globalnych własności układu. Każdej ciągłej symetrii globalnej odpowiada bowiem *lokalnie* zachowany prąd Noether $j^\mu(x)$, spełniający równanie ciągłości $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$.

Aby uchwycić naturę modów Nambu–Goldstone'a (NG), rozważmy czasową składową operatora prądu Noether $j^t(\mathbf{x}, t)$ (gdzie $j^t \equiv j^0$), związaną z generatorem symetrii

$$Q = \int d^D x j^t(\mathbf{x}, t), \quad (4.29)$$

który jest spontanicznie złamany w stanie $|\psi\rangle$. Odpowiadający mod NG o wektorze falowym $\mathbf{k}$ można wówczas interpretować jako falę płaską będącą superpozycją lokalnych wzbudzeń tworzonych przez działanie operatora prądu Noether na stan z łamaną symetrią $|\psi\rangle$ [38]:

$$|\pi(\mathbf{k}, t)\rangle \propto \int d^D x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} j^t(\mathbf{x}, t) |\psi\rangle. \quad (4.30)$$

Czynnik fazowy $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ zapewnia wybór wzbudzenia o określonym wektorze falowym $\mathbf{k}$. (Nie należy mylić oznaczenia $|\pi(\mathbf{k})\rangle$ z pędem kanonicznym $\pi(x)$ wprowadzanym w przykładzie pola Schrödingera). Zakładamy translacyjną niezmienniczość jedynie na poziomie coarse-grain (bo interesują nas tylko wzbudzenia długofalowe), tak aby $\mathbf{k}$ było dobrą liczbą kwantową. Wprowadzamy zatem zbiór stanów własnych Hamiltonianu $|n, \mathbf{k}\rangle$ z energią $E_n(\mathbf{k})$ i wektorem falowym $\mathbf{k}$, gdzie n zawiera informację o wszystkich pozostałych liczbach kwantowych. Stany te są ortogonalne

$$\langle n', \mathbf{k}' | n, \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^D \delta_{nn'} \delta^{(D)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

a operator tożsamości można zapisać w postaci:

$$\mathbb{I} = \sum_n \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} |n, \mathbf{k}\rangle \langle n, \mathbf{k}|. \quad (4.31)$$

Wstawiając (4.31) do kryterium spontanicznego złamania symetrii z równania (4.16),

otrzymujemy [38]:

$$\begin{aligned}\langle \psi | [Q, \Phi] | \psi \rangle &= \sum_n \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\langle \psi | Q(t) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \Phi | \psi \rangle - \text{c.c.} \right) \\ &= \int_{\Omega} d^D x \sum_n \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\langle \psi | j^t(\mathbf{x}, t) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \Phi | \psi \rangle - \text{c.c.} \right) \neq 0.\end{aligned}\quad (4.32)$$

gdzie “c.c.” oznacza sprzężenie zespolone i w drugiej linii użyliśmy równania (4.29). Nadal interesuje nas zachowanie dla $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$, całkowanie wykonujemy po dużym, lecz skończonym obszarze Ω . Korzystamy z faktu, że przesunięcia w czasie i przestrzeni są generowane odpowiednio przez H i $\mathbf{P}$ i dla gęstości ładunku mamy zatem:

$$j^t(\mathbf{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} j^t(\mathbf{0}, 0) e^{\frac{i}{\hbar}(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})}.$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do (4.32) otrzymujemy:

$$\langle [Q, \Phi] \rangle = \int_{\Omega} d^D x \sum_n \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\langle \psi | e^{-\frac{i}{\hbar}(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} j^t(\mathbf{0}, 0) e^{\frac{i}{\hbar}(Ht - \mathbf{P} \cdot \mathbf{x})} | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \Phi | \psi \rangle - \text{c.c.} \right).$$

W kolejnym kroku wykorzystujemy fakt, że $|n, \mathbf{k}\rangle$ jest stanem własnym operatorów H i $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}|n, \mathbf{k}\rangle = \hbar \mathbf{k} |n, \mathbf{k}\rangle, \quad H|n, \mathbf{k}\rangle = E_n(\mathbf{k}) |n, \mathbf{k}\rangle.$$

Przyjmujemy tutaj, że $E_n(\mathbf{k})$ oznacza energię *wzbudzenia* w stanie $|n, \mathbf{k}\rangle$ względem energii stanu $|\psi\rangle$, co upraszcza zapis faz. Ponadto translacyjna niezmienniczość stanu $|\psi\rangle$ (na poziomie coarse-grain) oznacza, że jest on niezmienniczy względem operatora translacji $T(\mathbf{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}}$, czyli $T(\mathbf{a})|\psi\rangle = |\psi\rangle$ dla dowolnego $\mathbf{a}$. Rozwijając $T(\mathbf{a})$ w szereg Taylora dla małych $\mathbf{a}$ wokół punktu $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ i korzystając z warunku niezmienniczości $T(\mathbf{a})|\psi\rangle = |\psi\rangle$, otrzymujemy $\mathbf{P}|\psi\rangle = \mathbf{0}$, a więc $|\psi\rangle$ jest stanem o zerowym pędzie. W rezultacie działanie operatorów przesunięć na stan $|n, \mathbf{k}\rangle$ i $|\psi\rangle$ prowadzi do czynnika fazowego $e^{\frac{i}{\hbar} E_n t - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$, ostatecznie można to zapisać jako [38]:

$$\begin{aligned}\langle [Q, \Phi] \rangle &= \int_{\Omega} d^D x \sum_n \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(e^{\frac{i}{\hbar} E_n t - i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \langle \psi | j^t(\mathbf{0}, 0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \Phi | \psi \rangle - \text{c.c.} \right) \\ &= \sum_n \int d^D k \delta_{\Omega}(\mathbf{k}) \left(e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} \langle \psi | j^t(\mathbf{0}, 0) | n, \mathbf{k} \rangle \langle n, \mathbf{k} | \Phi | \psi \rangle - \text{c.c.} \right) \neq 0,\end{aligned}\quad (4.33)$$

gdzie zdefiniowaliśmy

$$(2\pi)^D \delta_{\Omega}(\mathbf{k}) \equiv \int_{\Omega} d^D x e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Funkcja $\delta_{\Omega}(\mathbf{k})$ w granicy dużych objętości Ω przechodzi w deltę Diraca. Ponieważ $|\psi\rangle$ jest stanem z łamaną symetrią, lewa strona (4.33) nie może zniknąć, co jest dokładnie definicją z początku rozdziału, wzór (4.16). Oznacza to, że musi istnieć co najmniej jeden stan $|n, \mathbf{k}\rangle$

o wektorze falowym $\mathbf{k} \rightarrow 0$, dla którego wartość oczekiwana nie znika. To jest właśnie mod Goldstona. Jest to pierwsza część twierdzenia Goldstone: istnieje stan o prawie zerowym wektorze falowym, który można wzbudzić ze stanu o złamanej symetrii zarówno lokalną gęstością ładunku Noether $j^t(\mathbf{0}, 0)$, jak i polem interpolującym Φ . Natomiast druga część twierdzenia mówi, że jego energia także dąży do zera.

Podsumowanie: Różne podejścia, ta sama fizyka

Zarówno podejście Ginzburga-Landaua, jak i formalizm Lagrange'a, prowadzą do spójnego opisu zjawiska spontanicznego złamania symetrii. W ujęciu Ginzburga-Landaua korzystamy z efektywnej energii swobodnej, opartej na parametrach fenomenologicznych, co pozwala analizować stabilność układu, obliczać wartości krytyczne oraz przewidywać charakter przejścia fazowego - w tym krytyczne wykładniki, opisujące zachowanie blisko punktu krytycznego, które nie były przedmiotem tej analizy.

Z kolei formalizm Lagrange'a umożliwia bardziej fundamentalne podejście do symetrii, pozwalając zidentyfikować generatory symetrii, obliczyć prądy Noether oraz sformułować precyzyjne kryteria złamania symetrii w oparciu o komutatory operatorów pól z generatorami tych symetrii. Co więcej, formalizm ten jednoznacznie wskazuje, jakiego typu wzbudzenia są związane z złamaniem symetrii.

Niezależnie od przyjętego formalizmu, spontaniczne złamanie symetrii ciągłej nieuchronnie prowadzi do pojawienia się niskoenergetycznych wzbudzeń kolektywnych, zwanych *modami Goldstone'a*. Ich istnienie jest uniwersalnym i nieodzownym następstwem złamania symetrii - fakt ten jest formalnie ujęty w tzw. twierdzeniu Goldstone'a. Oznacza to, że jeśli w układzie dochodzi do spontanicznego złamania symetrii ciągłej, to musi pojawić się co najmniej jeden mod Goldstone'a. Dlatego też detekcja takich wzbudzeń stanowi silną wskazówkę, że dana symetria została rzeczywiście złamana spontanicznie. W fizyce materii skondensowanej mody te odgrywają kluczową rolę, determinując dynamikę układu, jego odpowiedź na zaburzenia oraz charakter przejść fazowych. Objawiają się one jako długofalowe wzbudzenia o charakterystycznej dyspersji i są bezpośrednią sygnaturą istnienia porządku długozasięgowego w układzie. Przykładowo, w fazie nadciekłego kryształu (faza supersolid) jednocześnie łamana jest globalna symetria $U(1)$ oraz ciągła symetria translacyjna. Oznacza to, że w takiej fazie muszą pojawić się co najmniej dwa niezależne mody Goldstone'a: jeden związany z kolektywnymi oscylacjami fazy nadcieklej oraz mod odpowiadający złamaniu symetrii translacyjnej.

Rozdział 5

Faza supersolid indukowana przez fermiony w kondensacie Bosego-Einsteina z oddziaływaniami dipolowymi

W niniejszym rozdziale analizowany jest mechanizm powstawania fazy supersolid w kwazi-jednowymiarowej mieszaninie bozonowo-fermionowej, w której składnik bozonowy charakteryzuje się długozasięgowymi magnetycznymi oddziaływaniami dipolowymi. Szczególny nacisk położono na analizę składnika bozonowego, w którym poszukuje się cech charakterystycznych dla fazy supersolid. Składnik fermionowy, sprzężony z bozonami, odgrywa kluczową rolę w formowaniu uporządkowanej struktury przestrzennej i wpływa na stabilność układu. Analiza jego rozkładu gęstości i orbitalowych stanów własnych dostarcza dodatkowych informacji, potwierdzających silne wzajemne oddziaływanie między komponentami mieszaniny.

Analiza rozpoczyna się od opisu, trójwymiarowego modelu wielu ciał, który następnie zredukowany jest do postaci kwazi-jednowymiarowej. Taka redukcja pozwala na znaczne uproszczenie obliczeń przy zachowaniu kluczowych efektów fizycznych, takich jak długozasięgowość oddziaływań dipolowych czy obecność fermionów, jako elementu sprzęgającego. Ostatecznym celem rozdziału jest zbadanie, czy przy odpowiednim doborze parametrów - takich jak siła oddziaływania bozon-bozon i bozon-fermion, liczba cząstek oraz magnetyczny moment dipolowy bozonów - możliwa jest realizacja fazy supersolid w składniku bozonowym mieszaniny.

W dalszych podrozdziałach pracy omówione zostaną kolejno: redukcja modelu do opisu kwazi-1D, analiza stanu podstawowego, charakterystyka wzbudzeń kolektywnych, oraz wyznaczenie frakcji nadciekłej. Na końcu zaprezentowane zostaną wyniki analizy dla mniejszej wartości magnetycznego momentu dipolowego oraz omówiona możliwość

wystąpienia fazy supersolid w układach z mniej magnetycznymi pierwiastkami.

5.1 Od geometrii 3D do geometrii kwazi-1D

Aby przejść od opisu trójwymiarowego (3D) do geometrii kwazi-jednowymiarowej (kwazi-1D), analizę należy rozpocząć od pełnego opisu dynamiki układu. Dynamikę bozonów opisujemy równaniem Grossa-Pitaevskiego, natomiast fermiony modelujemy przy pomocy ansatzu Hartree-Focka. W naszym układzie bozony posiadają magnetyczny moment dipolowy, natomiast fermiony są spolaryzowane i nie oddziałują ze sobą. W temperaturze równej zero ($T = 0$), istotne jest wyłącznie rozpraszanie fali typu s . Ponieważ całkowita funkcja falowa fermionów (część przestrzenna $\times$ część spinowa) musi być antysymetryczna, a fala s jest symetryczna w części przestrzennej, część spinowa musi być antysymetryczna. W konsekwencji identyczne fermiony w tym samym stanie spinowym nie mogą oddziaływać kontaktowo w kanale s . Ponieważ w naszym przypadku fermiony są spolaryzowane (mają ten sam kierunek spinu), rozpraszanie typu s między nimi jest zabronione. W efekcie nie oddziałują one ze sobą bezpośrednio. Mogą jednak pośrednio wpływać na właściwości układu bozonowego, mediując oddziaływania między bozonami za pośrednictwem sprzężenia bozon-fermion. Z drugiej strony, bozony mogą oddziaływać zarówno poprzez oddziaływania kontaktowe (modelowane przez potencjał delta), jak i poprzez długozasięgowe oddziaływania dipolowe. Zakładamy, że oddziaływania bozon-bozon są odpychające, natomiast oddziaływanie bozon-fermion ma charakter przyciągający. To założenie jest kluczowe, ponieważ obecność fermionów w układzie osłabia efektywne odpychanie między bozonami, co może umożliwiać przejście układu do fazy supersolid. Aby przeprowadzić redukcję wymiarowości, najpierw przyjmujemy założenia dotyczące funkcji falowej całego układu w temperaturze zera bezwzględnego. Zakładamy, że wielociałowa funkcja falowa mieszaniny bozonowo-fermionowej jest (w przybliżeniu) iloczynem funkcji Hartree dla bozonów oraz wyznacznika Slatera dla fermionów:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_B}; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N_F}) = \\ \psi_B(\mathbf{x}_1) \psi_B(\mathbf{x}_2) \cdots \psi_B(\mathbf{x}_{N_B}) \times \\ \frac{1}{\sqrt{N_F!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(\mathbf{y}_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_1(\mathbf{y}_{N_F}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \varphi_{N_F}(\mathbf{y}_1) & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_{N_F}(\mathbf{y}_{N_F}) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Aby wyznaczyć równania ruchu orbitali jednocząstkowych, podążamy formalizmem opartym na gęstości Lagrangianu:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i\hbar}{2} \left(\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^* \right) - \frac{\hbar^2}{2m_B} \sum_{i=1}^{N_B} |\nabla_{\mathbf{x}_i} \Psi|^2 - \frac{\hbar^2}{2m_F} \sum_{j=1}^{N_F} |\nabla_{\mathbf{y}_j} \Psi|^2 \\ & - \sum_{i=1}^{N_B} V_{\text{trap}}^{(B)}(\mathbf{x}_i) |\Psi|^2 - \sum_{j=1}^{N_F} V_{\text{trap}}^{(F)}(\mathbf{y}_j) |\Psi|^2 \\ & - \sum_{i < k} \left[V_{\text{int}}^{BB}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) + V_{DD}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k) \right] |\Psi|^2 - \sum_{i,j} V_{\text{int}}^{BF}(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j) |\Psi|^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dalej w pracy modelujemy krótkozasięgowe oddziaływania poprzez delty Diraca:

$$V_{\text{int}}^{BB}(\mathbf{r}) = g_B \delta(\mathbf{r}), \quad V_{\text{int}}^{BF}(\mathbf{r}) = g_{BF} \delta(\mathbf{r}),$$

gdzie g_B i g_{BF} są stałymi sprzężenia zdefiniowanymi niżej. Wstawiamy (5.1) do (5.2) i stosujemy przybliżenie mean-field, całkując każdy wyraz równania (5.2) po wszystkich współrzędnych z wyjątkiem jednej, wybranej bozonowej lub fermionowej (dla członu dipolowego zostawiamy dwie współrzędne bozonowe). Wykorzystując ortogonalność orbitali fermionowych oraz dla $N_B \gg 1$, zastępujemy dokładny czynnik $N_B(N_B - 1)$ jego przybliżeniem N_B^2 otrzymujemy efektywną gęstość Lagrangianu, zależną od jednocząstkowych orbitali bozonowych i fermionowych:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{i\hbar}{2} N_B \left(\psi^{(B)*} \partial_t \psi^{(B)} - \psi^{(B)} \partial_t \psi^{(B)*} \right) + \frac{i\hbar}{2} \sum_{j=1}^{N_F} \left((\psi_j^{(F)})^* \partial_t \psi_j^{(F)} - \psi_j^{(F)} \partial_t (\psi_j^{(F)})^* \right) \\ & - \frac{\hbar^2}{2m_B} N_B |\nabla \psi^{(B)}|^2 - \frac{\hbar^2}{2m_F} \sum_{j=1}^{N_F} |\nabla \psi_j^{(F)}|^2 \\ & - N_B V_{\text{trap}}^{(B)}(\mathbf{r}) |\psi^{(B)}|^2 - \sum_{j=1}^{N_F} V_{\text{trap}}^{(F)}(\mathbf{r}) |\psi_j^{(F)}|^2 \\ & - \frac{g_B}{2} N_B^2 |\psi^{(B)}|^4 - g_{BF} N_B \sum_{j=1}^{N_F} |\psi_j^{(F)}|^2 |\psi^{(B)}|^2 \\ & - \frac{N_B^2}{2} |\psi^{(B)}(\mathbf{r})|^2 \int d^3 \mathbf{r}' V_{DD}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi^{(B)}(\mathbf{r}')|^2. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Definiując gęstości bozonową i fermionową jako:

$$n_B(\mathbf{r}, t) = N_B |\psi^{(B)}(\mathbf{r}, t)|^2, \quad n_F(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_F} |\psi_j^{(F)}(\mathbf{r}, t)|^2,$$

z $\mathcal{L}'$ otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a na ψ_B i ψ_j^F ($j = 1, \dots, N_F$), które prowa-

dążą do następującego zestawu równań 3D:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \psi_B(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 + V_B(\mathbf{r}) + g_B n_B(\mathbf{r}, t) \right. \\
 &\quad \left. + g_{BF} n_F(\mathbf{r}, t) + \int V_{DD}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_B(\mathbf{r}', t) d^3 \mathbf{r}' \right] \psi_B(\mathbf{r}, t), \\
 i\hbar \frac{\partial \psi_j^F(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_F} \nabla^2 + V_F(\mathbf{r}) + g_{BF} n_B(\mathbf{r}, t) \right] \psi_j^F(\mathbf{r}, t).
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Stałe sprzężenia opisujące oddziaływania kontaktowe są wyrażone jako:

$$g_B = \frac{4\pi\hbar^2 a_B}{m_B}, \quad g_{BF} = \frac{2\pi\hbar^2 a_{BF}}{\mu}, \quad \mu = \frac{m_B m_F}{m_B + m_F},$$

gdzie g_B , opisuje siłę oddziaływania bozon-bozon i zależy od długości rozpraszania a_B , g_{BF} opisuje oddziaływanie bozon-fermion, a μ to zredukowana masa układu bozon-fermion. Współczynniki te określają efektywną siłę oddziaływań kontaktowych w warunkach niskotemperaturowych.

Potencjał pułapki harmoniczej opisany jest wyrażeniem:

$$V_{B(F)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m_{B(F)} \left[\omega_{B(F)\perp}^2 (x^2 + y^2) + \omega_{B(F)\parallel}^2 z^2 \right], \tag{5.5}$$

gdzie indeksy $\perp$ i $\parallel$, odnoszą się do kierunków poprzecznych i podłużnych względem osi z układu. Dipolowe oddziaływania między bozonami są anizotropowe i długozasięgowe. Ogólna trójwymiarowa postać potencjału oddziaływania dwóch momentów dipolowych w jednostkach CGS dana jest wyrażeniem:

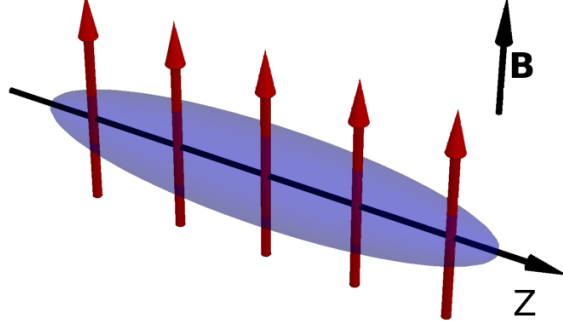
$$V_{DD}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_{\text{dip}}^2}{r^3} \left[1 - 3(\hat{e} \cdot \hat{r})^2 \right], \tag{5.6}$$

gdzie μ_{dip} to magnetyczny moment dipolowy bozonów, $\hat{e}$ to jednostkowy wektor wskazujący kierunek polaryzacji dipoli, $\mathbf{r}$ to wektor położenia między dwiema cząstkami, $r = |\mathbf{r}|$, a $\hat{r} = \mathbf{r}/r$. W przypadku, gdy dipole są spolaryzowane wzdłuż osi x , czyli $\hat{e} = \hat{x}$, otrzymujemy:

$$V_{DD}(\mathbf{r}) = \mu_{\text{dip}}^2 \cdot \frac{1 - 3\frac{x^2}{r^2}}{r^3}. \tag{5.7}$$

Charakter oddziaływania - przyciągający lub odpychający - zależy od kąta θ pomiędzy wektorem położenia $\mathbf{r}$, łączącym dwie cząstki, a kierunkiem polaryzacji ich momentów dipolowych. Gdy cząstki są ustawione wzdłuż kierunku polaryzacji ($\theta = 0$), czyli w konfiguracji *head-to-tail* (jedna za drugą), potencjał dipolowy jest ujemny i oznacza przyciąganie. Natomiast w przypadku konfiguracji *side-by-side* (cząstki obok siebie), gdy wektor $\mathbf{r}$ jest prostopadły do kierunku polaryzacji ($\theta = 90^\circ$), potencjał przyjmuje wartości dodatnie,

co prowadzi do odpychania. W dalszej analizie zakładamy, że dipole są spolaryzowane wzdłuż osi x , a więc prostopadle do kierunku wydłużenia pułapki, który pokrywa się z osią z . Taka konfiguracja została przedstawiona na Rysunku 5.1.



Rysunek 5.1: Dipole ustawione równolegle do siebie, prostopadle do osi z .

Aby przejść z opisu trójwymiarowego do kwazi-jednowymiarowego odpowiednika, należy wyeliminować dwa stopnie swobody, związane z kierunkami poprzecznymi - w naszym przypadku są to współrzędne x i y . Zakładamy, że funkcja falowa w tych kierunkach odpowiada stanowi podstawowemu w pułapce harmoniczej, czyli ma postać funkcji Gaussa. Tę funkcję wykorzystujemy jako ansatz do wykonania całkowania:

$$\begin{aligned}\psi_B(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\omega_{B\perp}t} \phi_{B0}(x) \phi_{B0}(y) \phi_B(z, t), \\ \psi_j^F(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\omega_{F\perp}t} \phi_0^F(x) \phi_0^F(y) \phi_j^F(z, t),\end{aligned}\tag{5.8}$$

gdzie funkcje w kierunkach poprzecznych mają postać:

$$\begin{aligned}\phi_{B0}(x) &= \left(\frac{1}{\pi L_{B\perp}^2} \right)^{1/4} e^{-x^2/(2L_{B\perp}^2)}, \\ \phi_0^F(x) &= \left(\frac{1}{\pi L_{F\perp}^2} \right)^{1/4} e^{-x^2/(2L_{F\perp}^2)},\end{aligned}\tag{5.9}$$

a długości oscylatorowe dane są przez:

$$L_{B\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_B \omega_{B\perp}}}, \quad L_{F\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_F \omega_{F\perp}}}.$$

Po wykonaniu całkowania uzyskujemy kwazi-jednowymiarowy zestaw równań (A):

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \phi_B(z, t)}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_B} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_B(z) + g_b n_B(z, t) \right. \\
 &\quad \left. + g_{bf} n_F(z, t) + \int V_{dd}(z - z') n_B(z', t) dz' \right] \phi_B(z, t), \\
 i\hbar \frac{\partial \phi_j^F(z, t)}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m_F} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_F(z) + g_{bf} n_B(z, t) \right] \phi_j^F(z, t),
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

gdzie sprzężenia efektywne wynoszą:

$$g_{bf} = \frac{g_{BF}}{\pi (L_{B\perp}^2 + L_{F\perp}^2)}, \quad g_b = \frac{g_B}{2\pi L_{B\perp}^2}. \tag{5.11}$$

Długości oscylatorowe można dobrać w taki sposób, aby były równe, korzystając z warunku $m_B \omega_{B\perp} = m_F \omega_{F\perp}$. Układ znajduje się w geometrii kwazi-jednowymiarowej, co oznacza, że jest silnie uwięziony w kierunkach poprzecznych do osi z . Energia potrzebna do wzbudzenia w kierunkach x i y jest znacznie większa niż wzdłuż osi podłużnej, dlatego wszystkie cząstki pozostają w stanie podstawowym w tych kierunkach. W praktyce oznacza to, że jedynie stopień swobody wzdłuż osi z jest istotny dynamicznie. Potencjał dipolowy po redukcji do jednego wymiaru przyjmuje postać (A):

$$V_{dd}(z) = \mu_d^2 \left\{ -\frac{2}{3} \delta(z) + \frac{-2\sqrt{a}|z| + \sqrt{\pi} e^{z^2/(4a)} (z^2 + 2a) \operatorname{Erfc}(|z|/(2\sqrt{a}))}{8a^{3/2}} \right\}, \tag{5.12}$$

gdzie $a = \frac{L_\perp^2}{2}$, $\mu_d = \mu_{\text{dip}}/L_\perp$ jest przeskalowanym momentem dipolowym, Erfc jest uzupełniającą funkcją błędu. Widzimy zatem, że nawet po przejściu do geometrii kwazi-1D potencjał dipolowy zachowuje zarówno składową przyciągającą, jak i odpychającą, co stanowi charakterystyczną cechę oddziaływań dipolowych. Chociaż fermiony nie oddziałują ze sobą bezpośrednio, odgrywają istotną rolę w kształtowaniu dynamiki układu poprzez sprzężenie z bozonami. Oddziaływania bozon-fermion mogą prowadzić do efektywnej modyfikacji oddziaływań pomiędzy bozonami, osłabiając ich wzajemne odpychanie i umożliwiając powstawanie struktur, takich jak samowiążące się krople lub faza supersolid.

5.2 Poszukiwanie stanu podstawowego w geometrii kwazi-1D

W celu szczegółowej analizy fazy supersolid w mieszaninie, konieczne jest wyznaczenie jej stanu podstawowego. Analizowany układ, obejmujący zarówno oddziaływania długozasięgowe (dipolowe), jak i kontaktowe pomiędzy składnikami, wymaga zastosowania samouzgodnionej metody numerycznej. W tym rozdziale skupiamy się na metodzie znaj-

dowania stanu podstawowego układu w geometrii kwazi-jednowymiarowej.

Aby znaleźć stan podstawowy układu bozonowo-fermionowego w geometrii kwazi-jednowymiarowej, stosujemy metodę propagacji w czasie urojonym [42]. Technika ta polega na matematycznej transformacji czasu rzeczywistego do czasu urojonego, tj. $t \rightarrow -i\tau$, co pozwala na efektywne tłumienie stanów wzbudzonych i zbieżność rozwiązania w kierunku stanu podstawowego. Funkcja falowa układu może być rozwinięta w bazie funkcji własnych hamiltonianu:

$$\psi(t) = \sum_n c_n \psi_n e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (5.13)$$

gdzie ψ_n to stany własne, a E_n - odpowiadające im energie. Wprowadzając podstawienie $t \rightarrow -i\tau$, przechodzimy do opisu ewolucji w czasie urojonym:

$$\psi(\tau) = \sum_n c_n \psi_n e^{-E_n \tau/\hbar}. \quad (5.14)$$

Zauważmy, że składniki z wyższą energią E_n , zanikają podczas ewolucji w czasie urojonym τ znacznie szybciej niż te o niższej energii. W rezultacie, po odpowiednio długiej ewolucji (dla dużych wartości τ), dominującym składnikiem pozostaje stan podstawowy ψ_0 :

$$\psi(\tau) = c_0 \psi_0 e^{-E_0 \tau/\hbar} + \sum_{n>0} c_n \psi_n e^{-E_n \tau/\hbar}, \quad (5.15)$$

gdzie c_n to współczynniki rozwinięcia funkcji w bazie stanów własnych hamiltonianu. Dla $\tau \rightarrow \infty$ dominującym składnikiem pozostaje ψ_0 , ponieważ wyższe stany ($n > 0$) zanikają znacznie szybciej. W przedstawionym podejściu, propagacja w czasie urojonym dotyczy wyłącznie składnika bozonowego, natomiast fermiony traktujemy w ramach podejścia Hartree-Focka. Ich funkcje falowe wyznaczamy poprzez diagonalizację jednocząstkowego operatora Hamiltona, który zawiera zarówno potencjał zewnętrzny, jak i sprzężenie z bozonami (zob. wzór 5.10). Algorytm iteracyjny przyjmuje następującą strukturę:

1. Wykonujemy jeden krok propagacji w czasie urojonym dla funkcji falowej bozonów $\phi_B(z)$.
2. Dla zaktualizowanej gęstości bozonów $n_B(z) = |\phi_B(z)|^2$ przeprowadzamy diagonalizację hamiltonianu fermionowego i wyznaczamy nowe funkcje falowe $\phi_j^F(z)$. Następnie obliczamy gęstość fermionową $n_F(z)$ jako sumę kwadratów modułów funkcji falowych wszystkich obsadzonych orbitali:

$$n_F(z) = \sum_{j=1}^{N_F} |\phi_j^F(z)|^2.$$

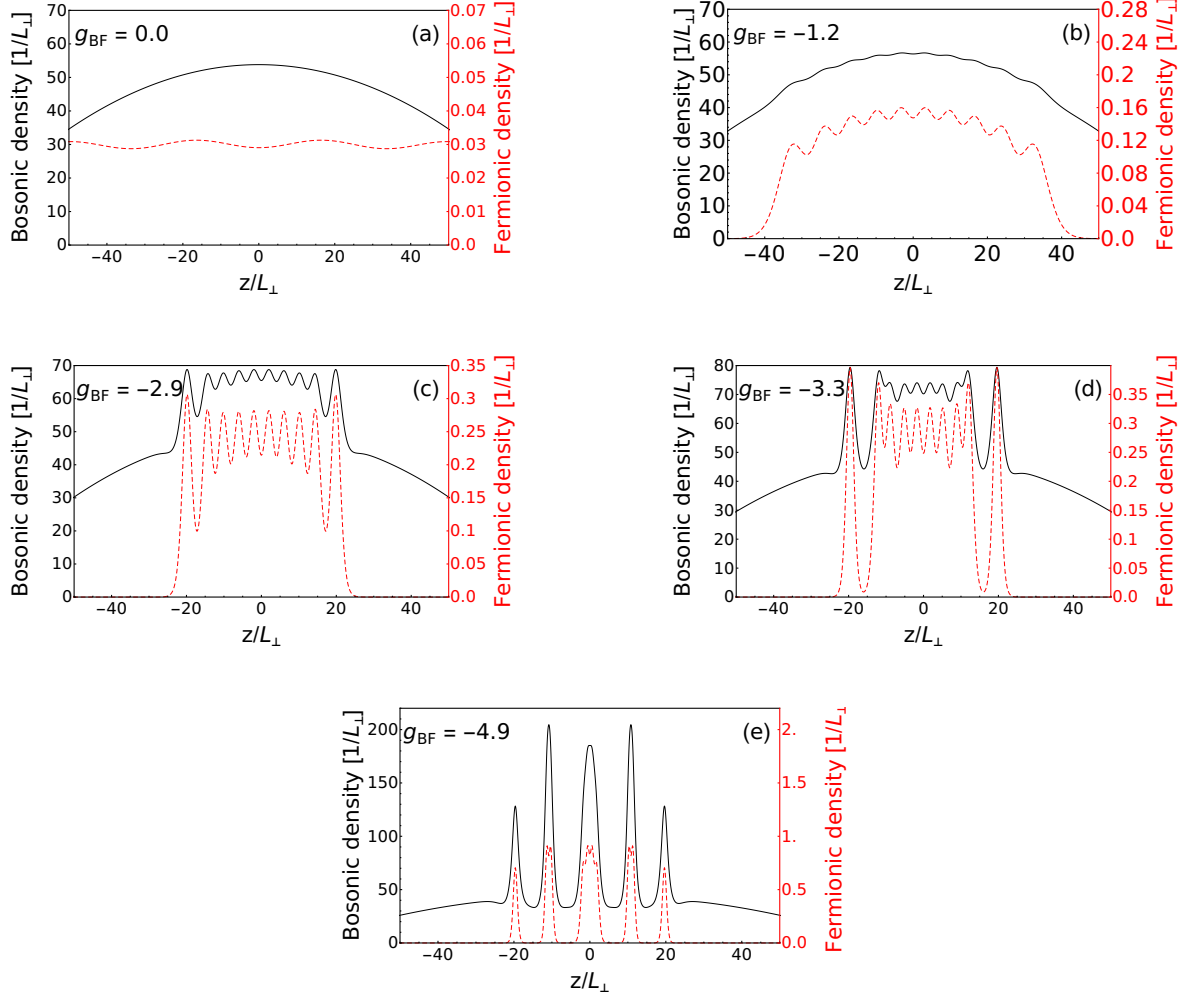
3. Korzystając z nowej gęstości fermionów, wykonujemy kolejny krok propagacji w czasie urojonym dla bozonów.

4. Powtarzamy powyższe kroki iteracyjnie, aż do osiągnięcia samouzgodnionego rozwiązania, tj. rozwiązania, w którym zmiany w gęstościach $n_B(z)$ i $n_F(z)$ stają się pomijalnie małe.

5.2.1 Wyniki numeryczne dla stanu podstawowego

Celem tej części analizy jest zbadanie, w jaki sposób zmienia się stan podstawowy układu bozonowo-fermionowego mieszaniny ^{164}Dy - ^6Li w stanie podstawowym w zależności od siły oddziaływania między składnikami. W szczególności interesuje nas, czy i w jakim zakresie parametrów pojawia się modulacja gęstości, wskazująca na fazę supersolid oraz jaki wpływ na ten proces mają fermiony. Wszystkie obliczenia przeprowadzono przy założeniu $\omega_{B\perp}/\omega_{B\parallel} = 100$, a jako jednostki przyjęto kolejno: $L_\perp$ dla długości, $\omega_{B\perp}$ dla częstości, $\hbar\omega_{B\perp}L_\perp^3$ dla stałych oddziaływania g_B i g_{BF} oraz $(\hbar\omega_{B\perp}L_\perp)^{1/2}$ dla dipolowego momentu magnetycznego μ_d .

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki numeryczne dla stanu podstawowego układu, uzyskane dla różnych wartości stałej sprzężenia g_{BF} . W analizie przyjęto parametry: liczba bozonów $N_B = 6000$, liczba fermionów $N_F = 10$, moment dipolowy $\mu_d = 0.1$ oraz oddziaływanie bozon-bozon $g_B = 0.02$. Na wykresach przedstawiono gęstości składnika bozonowego (krzywa czerwona) oraz fermionowego (krzywa niebieska).



Rysunek 5.2: Profile gęstości składników bozonowego (czerwony) i fermionowego (niebieski) dla różnych wartości sprzężenia bozon–fermion g_{BF} . (a) $g_{BF} = 0$: gęstości składników bozonowego i fermionowego - składniki nie oddziałują wzajemnie. (b) $g_{BF} = -1.2$: wprowadzenie słabego oddziaływania bozonów z fermionami prowadzi do pojawienia się oscylacji Friedla w gęstości bozonowej. (c) $g_{BF} = -2.9$: dalsze zwiększenie siły sprzężenia powoduje wyraźną modulację gęstości i uformowanie się kropli bozonowo–fermionowej. (d) $g_{BF} = -3.3$: kolejne wzmocnienie sprzężenia prowadzi do złamania symetrii translacyjnej kropli. (e) $g_{BF} = -4.9$: wyraźnie widoczne uformowane maksima bozonowo–fermionowe na tle chmury bozonowej.

$g_{BF} = 0$ (**Rys. 5.2 (a)**): Gęstości składników bozonowego i fermionowego są od siebie niezależne - składniki nie oddziałują wzajemnie.

$g_{BF} = -1.2$ (**Rys. 5.2 (b)**): Wprowadzenie słabego oddziaływania bozonów z fermionami prowadzi do pojawienia się oscylacji Friedla w gęstości bozonowej. Gęstość fermionowa jest zanurzona w chmurze bozonów.

$g_{BF} = -2.9$ (**Rys. 5.2 (c)**): Dalsze zwiększenie siły sprzężenia prowadzi do wyraźnej modulacji gęstości i uformowania się kropli bozonowo-fermionowej. Maksyma gęstości obu składników zaczynają się wówczas pokrywać.

$g_{BF} = -3.3$ (**Rys. 5.2 (d)**): Dalsze zwiększenie siły sprzężenia powoduje złamanie symetrii translacyjnej kropli. Jak pokażemy w dalszej części pracy, w tym reżimie pojawia się niestabilność rotonowa, będąca sygnałem obecności fazy supersolid.

$g_{BF} = -4.9$ (**Rys. 5.2 (e)**): Wyraźnie widoczne uformowane maksima bozonowo-fermionowe z tłem bozonowym. Fermiony tworzą odseparowane krople.

Powyższe wyniki numeryczne ukazują wyraźną ewolucję stanu podstawowego układu w miarę zwiększania siły przyciągania bozon-fermion. Początkowo, niezależne składniki zaczynają oddziaływać, prowadząc do lokalnych korelacji przestrzennych. Przy coraz silniejszym sprzężeniu dochodzi do złamania symetrii translacyjnej kropli bozonowo-fermionowej, co wskazuje na pojawienie się fazy supersolid. Dalszy wzrost siły oddziaływania prowadzi do przejścia układu w konfigurację izolowanych kropli. Obserwowane w symulacjach ciągłe zmiany w strukturze gęstości sugerują, że przejście między kondensatem a fazą supersolid może mieć charakter ciągłego przejścia fazowego (drugiego rodzaju). Aby jednoznacznie to potwierdzić, należałoby zbadać odpowiednie funkcje termodynamiczne. Przy dalszym zwiększaniu siły oddziaływania, układ przechodzi w konfigurację izolowanych kropli.

5.3 Analityczna metoda eliminacji fermionowych stopni swobody - rotonowa niestabilność

W tym rozdziale przedstawiamy podejście analityczne, oparte na eliminacji fermionowych stopni swobody, które umożliwia uproszczenie opisu mieszaniny bozonowo-fermionowej. Wykorzystujemy fakt, że w naszym układzie $^{164}\text{Dy}-^6\text{Li}$, bozony (^{164}Dy) są znacznie cięższe od fermionów (^6Li) i dynamika fermionów realizuje się na znacznie krótszych skalach czasowych niż dynamika bozonów, co pozwala na rozdzielenie tych skal i traktowanie gęstości fermionowej jako kwazi-statycznej - dostosowującej się natychmiast do zmian w składniku bozonowym. Uproszczony w ten sposób model pozwala w szczególności na analizę widma

energetycznego i identyfikację niestabilności rotonowej - kluczowego mechanizmu prowadzącego do formowania fazy supersolid. Pokazujemy, że rotonowe minimum pojawia się naturalnie w wyniku sprzężenia oddziaływań krótko i długozasięgowych oraz pośredniego wpływu fermionów na efektywne oddziaływania między bozonami.

Ponieważ dynamika fermionów zachodzi znacznie szybciej niż dynamika bozonów (co odzwierciedla zależność charakterystycznych czasów: $\hbar/E_F \ll \hbar/\mu$), możliwe jest wyeliminowanie fermionowych stopni swobody. Takie podejście umożliwia traktowanie gęstości fermionowej n_F jako kwazi-statycznej w czasie, co upraszcza wyrażenie opisujące energię oddziaływania z gęstością fermionową i pozwala pracować wyłącznie ze składnikiem bozonowym, gdzie E_F oznacza energię Fermiego, a μ jest chemicznym potencjałem bozonów. Efektywną stałą sprzężenia bozonów można wówczas zapisać jako (B):

$$n_B g_{\text{eff}} = n_B \left(g_B - \frac{3}{2} \frac{n_F}{E_F} g_{BF}^2 \right). \quad (5.16)$$

Metoda ta została zastosowana m.in. w pracy [43], w której eksperymentalnie wykazano wpływ fermionów na właściwości mieszaniny bozonowo-fermionowej.

5.3.1 Widmo energetyczne i niestabilność rotonowa

Po uwzględnieniu wkładu fermionowego oraz oddziaływań dipolowych, widmo energetyczne bozonowe przyjmuje postać (C):

$$E(k) = \sqrt{\varepsilon(k) [\varepsilon(k) + 2n_B \tilde{V}_{\text{eff}}(k)]}, \quad (5.17)$$

gdzie $\varepsilon(k) = \hbar^2 k^2 / (2m_B)$, natomiast $\tilde{V}_{\text{eff}}(k)$ to efektywny potencjał w przestrzeni pędów, dany wyrażeniem:

$$\tilde{V}_{\text{eff}}(k) = \left(g_B - \alpha g_{BF}^2 - \frac{2}{3} \mu_d^2 \right) + \mu_d^2 [f(k^2 a) + 1]. \quad (5.18)$$

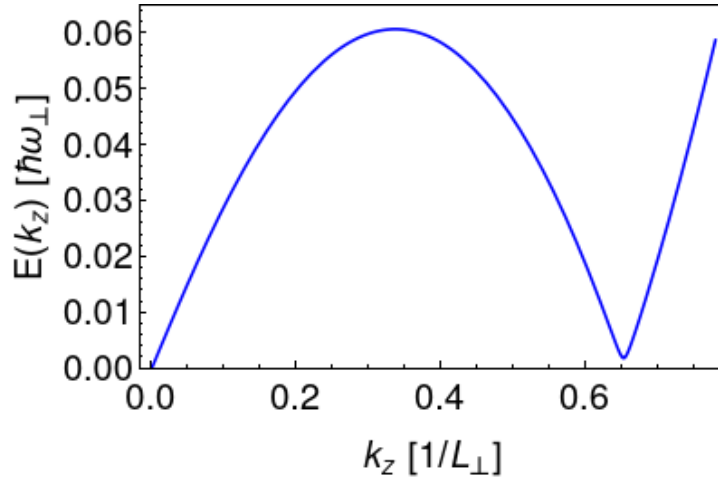
Współczynnik α , określający wpływ fermionów, zależy od ich gęstości oraz energii Fermiego i jest dany przez (B):

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{n_F}{E_F (2\pi L_\perp^2)}. \quad (5.19)$$

Funkcja $f(x)$ jest zdefiniowana następująco, $f(x) = x e^x \text{Ei}(-x)$, gdzie $\text{Ei}(x)$ jest funkcją całkowo-wykładniczą. Dla $x = k^2 a > 0$, funkcja $f(k^2 a)$ jest monotonicznie malejąca i spełnia warunek $0 < f(k^2 a) + 1 \leq 1$. W szczególności funkcja $f(k^2 a) + 1$ przyjmuje wartości w przedziale $[0, 1]$, co pozwala przy odpowiednim doborze parametrów w pierwszym członie uczynić cały potencjał $\tilde{V}_{\text{eff}}(k)$ ujemnym. W takim przypadku wyrażenie pod pierwiastkiem w $E(k)$ może przyjmować wartości ujemne dla pewnych wartości k , co oznacza wystąpienie niestabilności energetycznej układu. Parametry przyjęto zgodnie

z tymi zastosowanymi we wcześniejszej części pracy, modyfikując jedynie wartość g_{BF} do -2.9 , przy zachowaniu pozostałych: $N_B = 6000$, $N_F = 10$, $\mu_d = 0.1$, $g_B = 0.02$. Dla tak dobranych parametrów widmo $E(k)$ wykazuje minimum bliskie zeru, co prowadzi do niestabilności typu rotonowego, widocznej na rysunku 5.3.

W tym reżimie układ przechodzi do fazy supersolid, co potwierdzają wyniki numeryczne. Na gęstości bozonowej, przedstawionej na rysunku 5.2 (c), widać początki rozwijania się rotonowej niestabilności - zewnętrzne maksima zaczynają się odrywać od wnętrza chmury. Natomiast na rysunku 5.2 (d) widoczne jest wyraźne złamanie symetrii translacyjnej kropki - zewnętrzne maksima mocno wyróżniają się na tle gęstości. Dodatkowo wartość $2\pi/k_{\text{krytyczne}}$ określa typowy odstęp między tymi maksimami, co oznacza, że przy dalszym zwiększaniu oddziaływania bozon-fermion, chmura rozpada się na izolowane kropki, rozmieszczone periodycznie z okresem wynikającym z $k_{\text{krytyczne}}$, co można zaobserwować na rysunku 5.2 (e).



Rysunek 5.3: Widmo energetyczne bozonowe $E(k)$ dla $g_{BF} = -2.9$. Minimum wskazuje na obecność niestabilności rotonowej.

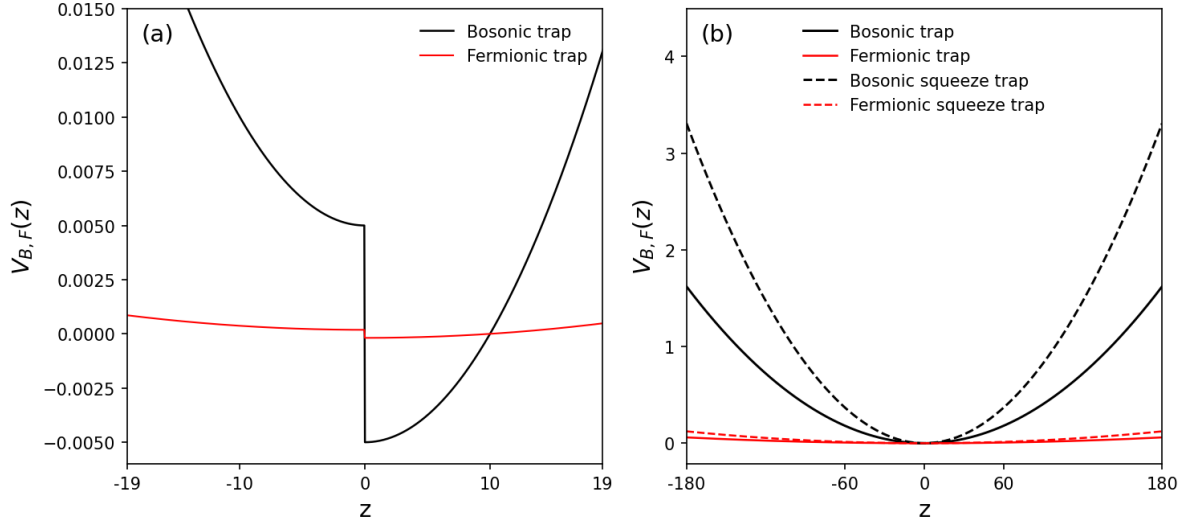
Rotonowa niestabilność stanowi ważną przesłankę wskazującą na możliwość istnienia fazy supersolid - świadczy o modulacji gęstości i złamaniu symetrii translacyjnej. Choć samo pojawienie się minimum rotonowego sugeruje formowanie uporządkowanej struktury, to ostatecznym potwierdzeniem obecności fazy supersolid jest identyfikacja modów Goldstone'a, wynikających ze spontanicznego złamania ciągłej symetrii. Jak pokazano wcześniej, obecność tych modów jest bezpośrednią konsekwencją złamania symetrii i stanowi podstawowy element opisu niskoenergetycznych wzbudzeń. W kolejnej części pracy skupimy się na analizie tych modów jako bezpośredniego dowodu istnienia tej egzotycznej fazy materii.

5.4 Niskoenergetyczne wzbudzenia - mody Goldstone'a i Higgsa

Jednym z kluczowych sposobów identyfikacji fazy supersolid jest analiza niskoenergetycznych wzbudzeń układu. W przypadku ultrazimnych atomów, obecność modów Goldstone'a oraz Higgsa świadczy o spontanicznym złamaniu ciągłych symetrii i stanowi istotny sygnał przejścia do fazy uporządkowanej przy jednoczesnym zachowaniu nadciekłości. W tym rozdziale skupiamy się na numerycznej analizie dynamiki układu bozonowo-fermionowego, w szczególności w zakresie, w którym zidentyfikowano przestrzenne cechy fazy supersolid, takie jak modulacja gęstości. Zaburzając pułapkę i śledząc ewolucję gęstości składnika bozonowego po wprowadzeniu zaburzenia, uzyskujemy dostęp do widma energetycznego układu i charakterystyki poszczególnych modów.

Celem tej analizy jest nie tylko potwierdzenie obecności modów Goldstone'a i Higgsa, ale także zbadanie ich zależności od parametrów oddziaływań i struktury przestrzennej mieszaniny, a w szczególności ich zachowania w reżimach przed i po pęknięciu chmury fermionowej. W dalszej części rozdziału pokażemy również, że pomimo braku oddziaływania typu *s-wave* pomiędzy fermionami, składnik fermionowy wykazuje wyraźną aktywność wraz ze zmianą parametru oddziaływania g_B , która może odgrywać istotną rolę w stabilizacji fazy supersolid. W analizie przyjmujemy parametry układu odpowiadające realistycznym warunkom eksperymentalnym: liczba bozonów została ustalona na $N_B = 3000$, moment dipolowy $\mu_d = 0.06$, a oddziaływanie między bozonami a fermionami przyjęto jako $g_{BF} = -3.8$. Parametrem kontrolnym, który będziemy zmieniać, jest oddziaływanie kontaktowe między bozonami g_B , co pozwoli określić warunki, w których układ wchodzi w fazę supersolid. W celu analizy niskoenergetycznych wzbudzeń układu stosujemy metodę opartą na wprowadzeniu niewielkiego zaburzenia geometrii pułapki zewnętrznej. Rozważamy dwa typy deformacji: symetryczną oraz asymetryczną (rysunek 5.4). W przypadku zaburzenia symetrycznego zmieniamy kształt całej pułapki w sposób osiowo jednorodny (ściśnięcie lub rozciągnięcie), natomiast w przypadku zaburzenia asymetrycznego deformujemy obie połowy pułapki, jak przedstawiono na rysunku 5.4 (a), co skutkuje przesunięciem środka masy układu. Dla każdego typu zaburzenia wyznaczamy stan podstawowy w zdeformowanej pułapce, a następnie wykorzystujemy go jako stan początkowy w ewolucji czasowej, przeprowadzanej już w pierwotnej, niezaburzonej geometrii. W ten sposób uzyskujemy dynamikę gęstości zarówno dla składnika bozonowego, jak i fermionowego.

Aby zidentyfikować poszczególne mody wzbudzeń (dla każdej częstości z osobna), obliczamy transformatę Fouriera czasowej i przestrzennej ewolucji zaburzonej gęstości oraz tworzymy animację przedstawiającą jej zmienność w czasie. Rozkładamy gęstość



Rysunek 5.4: Schematyczne przedstawienie zaburzenia pułapki: po lewej (a) przypadek asymetryczny, po prawej (b) przypadek symetryczny.

jako sumę składowej niezaburzonej i zaburzenie:

$$n_B(z, 0) + \delta n_B(z, t, \omega_j), \quad (5.20)$$

gdzie $\delta n_B(z, t, \omega_j)$ oznacza zaburzenie gęstości wywołane wzbudzeniem o konkretnej częstotliwości ω_j . Ponieważ

$$n_B(z, t) = n_B(z, 0) + \delta n_B(z, t), \quad (5.21)$$

transformatę tego wyrażenia można zapisać jako

$$\tilde{n}_B(k, \omega) = \tilde{n}_B(k) \delta(\omega) + \widetilde{\delta n_B}(k, \omega), \quad (5.22)$$

co pozwala wyodrębnić wkład odpowiadający określonej częstotliwości ω_j .

$$\begin{aligned} \delta n_B(z, t, \omega_j) &= \int_{\omega_j - \epsilon}^{\omega_j + \epsilon} d\omega e^{-i\omega t} \int \widetilde{\delta n_B}(k, \omega) e^{-ikz} dk \\ &= \int_{\omega_j - \epsilon}^{\omega_j + \epsilon} d\omega e^{-i\omega t} \int \tilde{n}_B(k, \omega) e^{-ikz} dk \\ &= \int_{\omega_j - \epsilon}^{\omega_j + \epsilon} d\omega e^{-i\omega t} \delta(\omega) \int \tilde{n}_B(k) e^{-ikz} dk \\ &= \overline{n_B}(z, t, \omega_j) - n_B(z, 0) \delta_{0, \omega_j}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

gdzie

$$\overline{n_B}(z, t, \omega_j) = \int_{\omega_j - \epsilon}^{\omega_j + \epsilon} \int \tilde{n}_B(k, \omega) e^{-i\omega t} e^{-ikz} d\omega dk. \quad (5.24)$$

Jeżeli $\tilde{n}_B(k, \omega) \sim \delta(\omega - \omega_j)$ to uzyskujemy postać zależną już tylko od danej częstości:

$$\overline{n}_B(z, t, \omega_j) = \left(\int \tilde{n}_B(k, \omega_j) e^{-ikz} dk \right) e^{-i\omega_j t}, \quad (5.25)$$

co pozwala na bezpośrednie odtworzenie zaburzenia ω_j . Dla $\omega_j \neq 0$ otrzymujemy końcowy wynik:

$$n_B(z, 0) + \overline{n}_B(z, t, \omega_j), \quad (5.26)$$

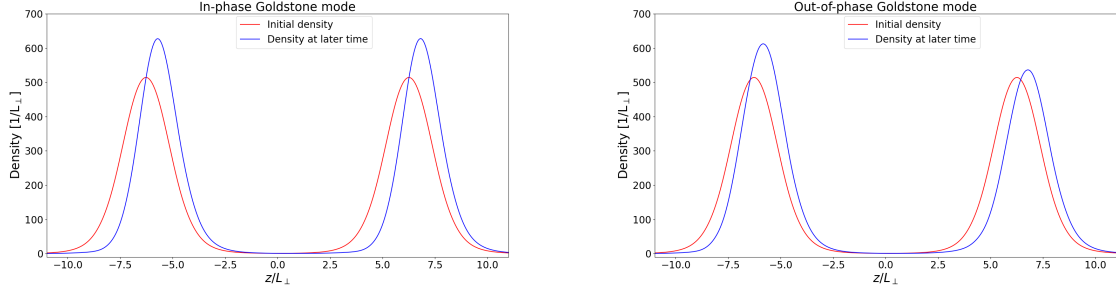
który stanowi podstawę do rekonstrukcji i wizualizacji ewolucji poszczególnych wzbudzeń. W przypadku symetrycznego zaburzenia i silnych oddziaływań bozonowych (duża wartość g_B) obserwujemy oscylacje typu *breathing mode*, polegające na naprzemiennym rozszerzaniu i kurczeniu się chmury bozonowej z częstością bliską $\sqrt{\frac{5}{2}} \omega_{\parallel}$, zgodnie z przewidywaniami analitycznymi dla czystego kondensatu pozbawionego oddziaływań dipolowych. Natomiast zaburzenie asymetryczne wywołuje ruch środka masy (ang. *center-of-mass oscillation*) z częstością równą częstości podłużnej pułapki $\omega_{\parallel}$. Symulacje przeprowadzone dla dużych wartości g_B potwierdzają poprawność zarówno wyprowadzonych równań, jak i ich implementacji numerycznej.

5.4.1 Widmo energetyczne, mod Goldstone'a i Higgsa

Animacje uzyskane w opisanej wcześniej procedurze, dostępne pod adresem [44], umożliwiają jednoznaczną identyfikację charakteru poszczególnych modów wzbudzeń. W przypadku modów typu in-phase, zarówno maksima gęstości, jak i tło gęstości poruszają się w tym samym kierunku. Natomiast dla modów typu out-of-phase obserwujemy, że maksima gęstości przemieszczają się w jednym kierunku, podczas gdy tło przelewa się w przeciwnym, co powoduje podnoszenie się jednego z maximów. Zjawiska te zilustrowano na rysunku 5.5, przedstawiających gęstość bozonową w wybranych momentach czasu dla różnych częstości wzbudzeń.

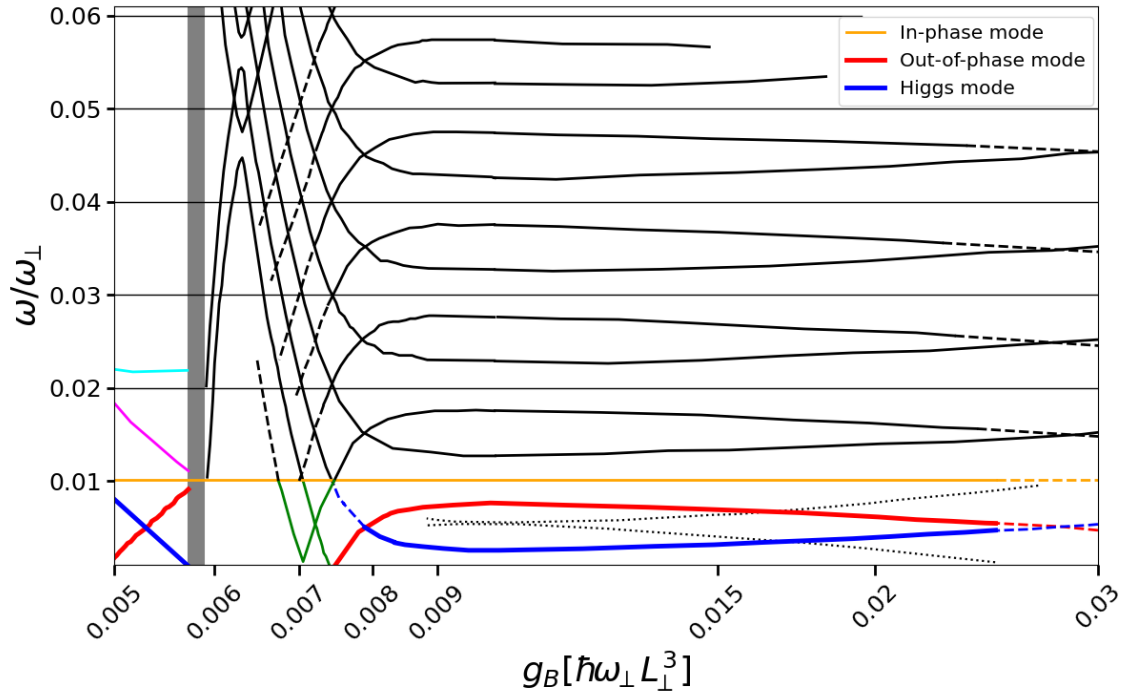
Zachowanie to bezpośrednio wynika z natury niskoenergetycznych wzbudzeń w fazie supersolid. Jak wykazaliśmy we wcześniejszych rozdziałach, spontaniczne złamanie symetrii ciągłej - w tym przypadku translacyjnej i $U(1)$ - prowadzi do pojawienia się modów Goldstone'a, które stanowią uniwersalny przejaw spontanicznego złamania symetrii w tego typu układach. Ich obecność jest nieunikniona: jeśli układ łamie symetrię translacyjną i formuje uporządkowaną strukturę, to w sposób konieczny muszą pojawić się wzbudzenia odpowiadające przesunięciom tej struktury, czyli właśnie mody Goldstone'a. W tym kontekście mody *in-phase* oraz *out-of-phase* można interpretować jako różne sposoby względnego przemieszczania się tła nadciekłego względem maximów gęstości, tworzących uporządkowaną strukturę krystaliczną, co jest wyraźnie widoczne na animacji [44]. Dodatkowo, oprócz przesunięcia struktury, mogą pojawiać się również oscylacje amplitudy parametru porządku, utożsamiane z modem Higgsa, który również został

5.4. NISKOENERGETYCZNE WZBUDZENIA - MODY GOLDSTONE'A I HIGGSA



Rysunek 5.5: Porównanie dwóch modów dla $g_B = 0.0055$ oraz $g_{BF} = -3.8$. Lewy rysunek: Mod typu *in-phase*: tło i piki poruszają się w tym samym kierunku, $\omega = 0.01$. Prawy rysunek: Mod typu *out-of-phase*: tło porusza się przeciwnie do pików – gdy maksima przesuwają się w prawo, tło przelewa się w lewo, co skutkuje podnoszeniem się lewego maksimum, $\omega = 0.0071$.

zaprezentowany w zbiorze animacji [44]. Co istotne, w analizie tej wykorzystano wyłącznie zaburzenie asymetryczne, podczas gdy mod Higgsa ma charakter symetryczny - jego dynamika polega na okresowych zmianach amplitudy w kierunku podłużnym pułapki. Obecność obu typów modów stanowi silny dowód na to, że układ znajduje się w fazie supersolid, gdzie współistnieją porządek krystaliczny oraz globalna koherencja fazowa. Na rysunku 5.6 przedstawiono widmo energetyczne uzyskane poprzez wykonanie trans-



Rysunek 5.6: Widmo energetyczne w funkcji oddziaływania bozon-bozon (g_B)

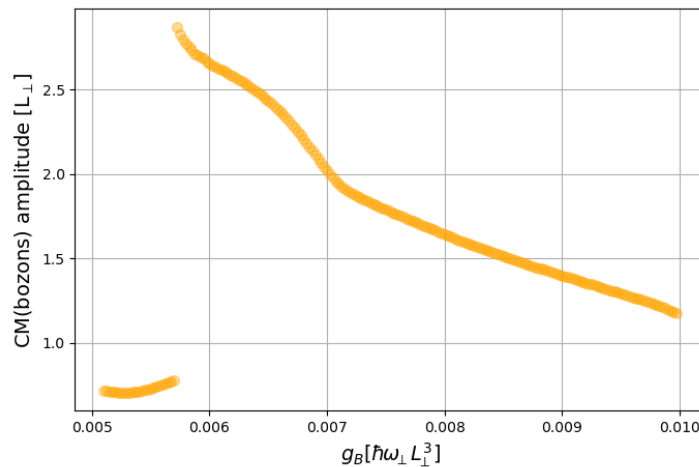
formaty Fouriera gęstości bozonowej w czasie i przestrzeni, a następnie wyciągnięcie zależności pędowej zgodnie ze wzorem $\tilde{n}_B(\omega) = \int |\tilde{n}_B(k, \omega)| dk$. Wyrysowano jedynie li-

nie częstości wyraźnie wyróżniające się na tle szumu. Analizując zależność tego widma od siły oddziaływania bozon-bozon, można zaobserwować wyraźne przejście fazowe. Dla dużych wartości $g_B \approx 0.03$ widoczne są przerywane linie (czerwona, niebieska, pomarańczowa), które odpowiadają modom wzbudzeń w kondensacie. W miarę zmniejszania g_B linie te przechodzą w linie ciągłe, co jest sygnałem wejścia układu w fazę supersolid (układ łamie symetrię translacyjną kropki). W tej fazie:

- **czerwona linia ciągła** reprezentuje mod Goldstone'a typu *out-of-phase* [44],
- **niebieska linia ciągła** odpowiada modowi Higgsa (oscylacjom amplitudy) [44],
- **pomarańczowa linia ciągła** opisuje mod Goldstone'a typu *in-phase* [44].

Analizując przebieg modów, możemy zauważyć, że w pierwszym reżimie fazy supersolid $0.025 > g_B > 0.0059$, mod Higgsa (niebieska linia) początkowo obniża się (tzn. jego energia maleje), a następnie zaczyna rosnąć. Jednocześnie mod *out-of-phase* (czerwona linia) wykazuje odwrotną zależność - najpierw rośnie, a potem opada. Takie zachowanie wynika ze zmieniającego się efektywnego potencjału odczuwanego przez bozony.

Dalsze zmniejszanie g_B prowadzi do silnego wzbudzenia ruchu środka masy. W okolicy $g_B \approx 0.0074$ zauważamy, że linia niebieska przechodzi ponownie w przerywaną, a linia czerwona znika. Jednocześnie pojawiają się *zielone linie ciągłe*, które oznaczają orientacyjny przebieg modów *out-of-phase* i Higgsa, wyznaczony na podstawie kontynuacji wcześniejszych trendów. Brak wyraźnych linii wynika z rosnącej amplitudy ruchu środka masy, który zaczyna dominować nad pozostałymi oscylacjami i znacząco utrudnia jednoznaczną identyfikację modów. Efekt ten jest zilustrowany na rysunku 5.7, przedstawiającym zależność amplitudy środka masy gęstości bozonowej od wartości g_B .



Rysunek 5.7: Amplituda środka masy gęstości bozonowej w funkcji oddziaływania bozon-bozon (g_B).

Wracając do rysunku 5.6 w okolicy $g_B = 0.0058$, pojawia się szeroka pionowa szara linia, która oznacza pęknięcie chmury fermionowej. Jej szerokość odzwierciedla stan przej-

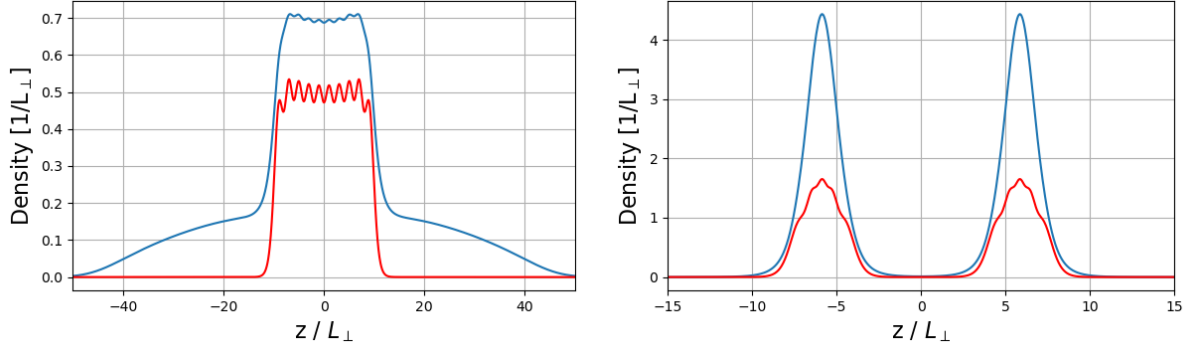
ściowy: gęstość fermionowa „waha się”, czy bardziej energetycznie korzystne będzie pęknięcie na dwa odseparowane układy, czy też pozostanie w jednej strukturze. Na końcu tego zakresu fermiony ostatecznie dzielą się na dwie izolowane krople. Chmura bozonowa również ulega dalszej modulacji, lecz nie tworzy oddzielnych fragmentów - pomiędzy maksimami wciąż utrzymuje się tło nadciekłe.

W nowym reżimie fazy supersolid występującym po pęknięciu gęstości fermionowej na dwie odseparowane krople, obserwujemy wyraźnie odmienną strukturę widma: mod Higgsa wyrasta z dolnej części widma i kontynuuje wzrost, natomiast mod Goldston’a *out-of-phase* stopniowo opada, co jest związane z zanikiem składowej nadciekłej. Spadek energii tego modu sugeruje, że układ stopniowo traci globalną koherencję fazową - a tym samym, jeśli proces ten się utrzyma, wyjdzie z fazy supersolid i przejdzie do układu składającego się z izolowanych kropli bozonowo-fermionowych. W takim stanie struktura krystaliczna zostaje zachowana, ale komponent nadciekły zanika, co oznacza całkowitą utratę cech fazy supersolid. Dodatkowo pojawiają się dwa nowe mody:

- **różowy** - mod fononowy, opisujący kolektywne przesunięcia całej struktury [44],
- **jasnoniebieski** - mod optyczny, w którym sąsiednie maksima gęstości okresowo zbliżają się i oddalają względem siebie [44].

Po pęknięciu chmury fermionów układ nabiera nowego, wyraźnie odmiennego charakteru. Choć nadal pozostaje w fazie supersolid, jego struktura przypomina teraz układ z wyraźnie zaznaczonymi maksimami gęstości, wokół których skupiają się fermiony. Można to interpretować analogicznie do układu krystalicznego, w którym fermiony pełnią funkcję „atomów” stabilizujących położenie maksimów gęstości, natomiast bozony - ze względu na zachowaną koherencję fazową - zachowują się jak „elektrony”, które swobodnie przemieszczają się pomiędzy tymi maksimami. Przykład gęstości w obu obszarach fazy supersolid przedstawiono na rysunku 5.8.

Co istotne, w niskoczęstotliwościowym zakresie widma - poniżej $\omega \approx 0.01$ - pojawiają się dodatkowe wzbudzenia, oznaczone czarnymi punktami rysunku 5.6. Ich obecność wskazuje na aktywność fermionowej części układu, co pokażę w następnym podrozdziale.

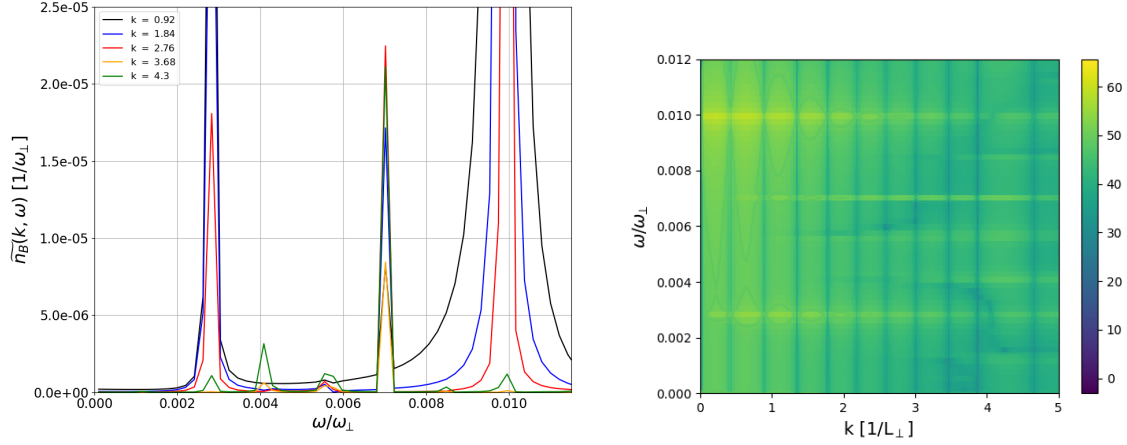


Rysunek 5.8: Porównanie gęstości bozonów (niebieski) i fermionów (czerwony) przed i po pęknięciu chmury fermionowej. Lewy rysunek: Gęstość bozonowo - fermionowa w fazie supersolid, przed pęknięciem chmury fermionowej. Parametry: $g_B = 0.02$, $g_{BF} = -3.8$. Prawy rysunek: Gęstość po pęknięciu chmury fermionowej. Fermiony tworzą wyraźnie oddzielone krople, natomiast bozony zachowują nadciężkie tło pomiędzy maksimami. Parametry: $g_B = 0.0055$, $g_{BF} = -3.8$.

5.4.2 Fermionowe wzbudzenia niskoenergetyczne

Fermiony w rozważanym modelu są spolaryzowane i opisane w przybliżeniu Hartree-Focka. Choć mody fermionowe są znacznie słabiej zaznaczone w widmie wzbudzeń, ich identyfikację umożliwia dokładna analiza poszczególnych orbitali. Aby skutecznie wyodrębnić wkład orbitali fermionowych, zastosowano filtrację w przestrzeni pędów, eliminując komponenty o małych wartościach k , które odpowiadają głównie małym oscylacjom całkowitej gęstości fermionowej. Dzięki temu możliwe było wyodrębnienie modów, które zawierają wyłącznie komponenty o dużych k , charakterystycznych dla pojedynczych orbitali fermionowych. Wykres takiej analizy w skali logarytmicznej przedstawiono na rysunku 5.9 (prawy rysunek), gdzie wyraźnie widoczne są mody zdominowane przez duże liczby falowe. Rysunek 5.9 (lewy rysunek) pokazuje natomiast, jak zmienia się widmo przy ustalonej wartości k - pozwala to na śledzenie dominacji poszczególnych modów w zależności od wybranego pędu. Jak widać, wraz ze wzrostem wartości k , wpływ modu *in-phase* - dominującego w zakresie małych pędów - jest coraz mniejszy, ustępując miejsca modom o charakterze fermionowym. Podobne zachowanie można zaobserwować również w przypadku modu Higgsa, którego udział również maleje przy większych wartościach pędu.

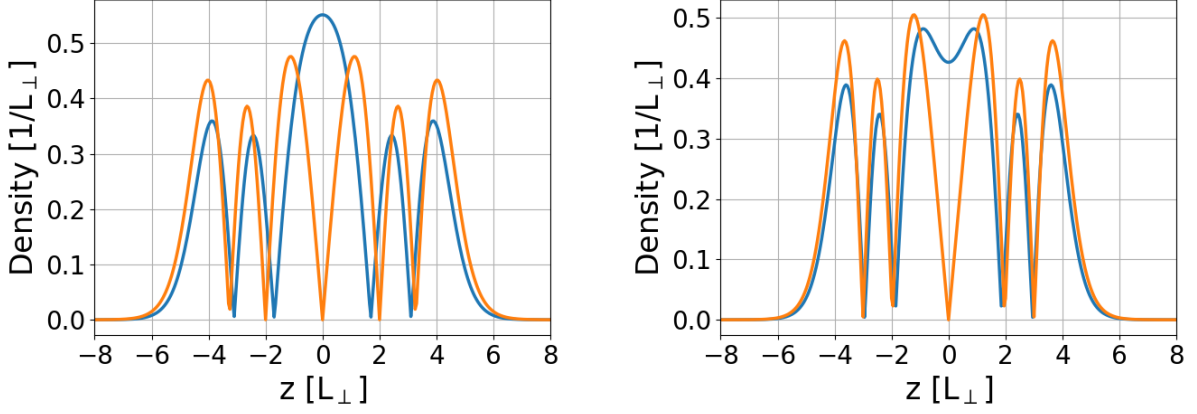
Dodatkowym potwierdzeniem aktywności fermionowej jest obserwowane złamanie symetrii translacyjnej również w strukturze samych orbitali. W miarę zmniejszania wartości oddziaływania bozon-bozon, orbitale fermionowe zaczynają wykazywać modulacje przestrzenne, korelujące z rozmieszczeniem bozonów. Na rysunku 5.10 (lewy rysunek) pokazano orbitale dla dużych g_B , natomiast rysunek 5.10 (prawy rysunek) przedstawia sytuację po złamaniu symetrii - wyraźnie widać, że piąty orbital pod względem ener-



Rysunek 5.9: Zestawienie reprezentacji widma energetycznego dla $g_B = 0.013$ i $g_{BF} = -3.8$. Lewy rysunek: Cięcia widma energetycznego przy stałych wartościach k , pozwalające zidentyfikować, które mody mają największy udział przy dużych pędach. Prawy rysunek: Logarytmiczna mapa amplitudy widma $\ln |\tilde{n}_B(k, \omega)|$, jaśniejsze obszary dla dużych k wskazują na fermionowy charakter danego modu.

gii (niebieski) dzieli centralne maksimum na dwa oddzielne piki. Taki efekt wskazuje na dostosowanie się komponentu fermionowego do struktury bozonowej, co przejawia się lokalizacją fermionów w rejonach dwóch maksimów gęstości bozonowej i stanowi wyraźny dowód na silne sprzężenie pomiędzy składnikami mieszaniny.

Obserwacje te pokazują, że również fermionowa część układu może aktywnie uczestniczyć w przemianach fazowych i przestrzennych, potencjalnie współtworząc z bozonami fazę supersolid. Choć nie ma jeszcze jednoznacznych dowodów na fermionowy wkład w globalną koherencję fazy gęstości fermionowej, wyniki wskazują na silną korelację między składnikami mieszaniny oraz istotną rolę fermionów w stabilizacji uporządkowanej struktury przestrzennej.



Rysunek 5.10: Porównanie wartości bezwzględnych orbitali fermionowych przed i po złamaniu symetrii. Po lewej: Wartości bezwzględne orbitali fermionowych dla $g_B = 0.0077$, $g_{BF} = -3.8$: niebieska linia – piąty orbital (parzysty), pomarańczowa – szósty orbital (nieparzysty). Przedstawione orbitale należą do stanów fermionowych uporządkowanych według rosnącej energii. Po prawej: Po złamaniu symetrii ($g_B = 0.0065$, $g_{BF} = -3.8$): niebieski – piąty orbital (parzysty) dzieli centralne maksimum na dwa piki, pomarańczowy – szósty orbital (nieparzysty) wykazuje lokalne wzmocnienia.

5.5 Kryterium Leggetta

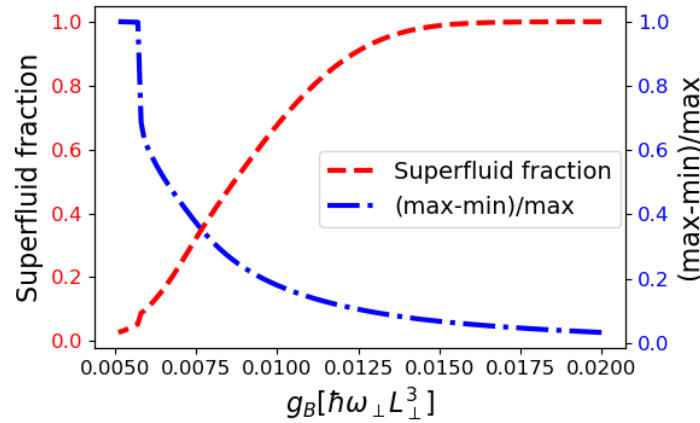
Ocena istnienia fazy supersolid wymaga nie tylko potwierdzenia obecności struktury uporządkowanej, lecz również oszacowania stopnia zachowanej nadciekłości. Jednym z klasycznych narzędzi teoretycznych, służących do takiej analizy jest kryterium zaproponowane przez Leggetta [1], które pozwala na wyznaczenie górnego ograniczenia frakcji nadcieklej w układach o niejednorodnym profilu gęstości.

W niniejszym podrozdziale wykorzystujemy to podejście do ilościowego określenia, w jakim stopniu komponent bozonowy zachowuje własności nadciekle w obecności periodycznej modulacji gęstości. Obliczenia frakcji nadcieklej zostały przeprowadzone począwszy od momentu, w którym w gęstości bozonowej wyraźnie uformowały się zewnętrzne maksima ($g_B \approx 0.025$) - co traktujemy jako sygnał, że układ znajduje się w fazie supersolid. Analiza ta pozwala śledzić ewolucję wewnątrz fazy supersolid: od konfiguracji o wysokim udziale komponentu nadciekłego, przez stopniowy wzrost uporządkowania przestrzennego i towarzyszący mu spadek frakcji nadcieklej, aż po całkowity zanik koherencji fazowej i przejście do układu izolowanych kropli. Według kryterium Leggetta frakcja nadciekła dana jest wzorem:

$$f_s = \langle \tilde{n}_B(z) \rangle^{-1} \left[\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\tilde{n}_B(z)} dz \right]^{-1}, \quad (5.27)$$

gdzie $\tilde{n}_B(z)$ to unormowana lokalna gęstość bozonów, liczona pomiędzy dwoma najbardziej zewnętrznymi maksimami, taka, że $\int_{z_1}^{z_2} \tilde{n}_B(z) dz = 1$. Takie podejście umożliwia

analizę frakcji nadciekłej, uwzględniając efekt modulacji przestrzennej, charakterystyczny dla fazy supersolid. Na rysunku 5.11 przedstawiono zależność frakcji nadciekłej (linia czerwona, przerywana), obliczonej z równania (5.27), w funkcji oddziaływania g_B . Na tym samym wykresie pokazano również względną różnicę pomiędzy maksymalną a minimalną wartością gęstości, $(\max - \min)/\max$ (linia niebieska, kreskowana), traktowaną jako miarę stopnia rozwinięcia struktury krystalicznej. Z wykresu wynika wyraźnie, że w



Rysunek 5.11: Frakcja nadciekła (linia czerwona, przerywana) oraz względna modulacja gęstości (linia niebieska, kreskowana) w funkcji oddziaływania g_B . Widoczna jest konkurencja pomiędzy koherencją fazową a uporządkowaniem strukturalnym, charakterystyczna dla fazy supersolid.

miarę zmniejszania wartości g_B - a więc w miarę wzmacniania komponentu krystalicznego - frakcja nadciekła systematycznie maleje. W końcowym zakresie badanych parametrów, gdy g_B staje się bardzo małe, układ przechodzi w fazę izolowanych kropli, w której frakcja nadciekła praktycznie zanika ($f_s \rightarrow 0$). Oznacza to całkowitą utratę koherencji fazowej, a tym samym zanik cech charakterystycznych dla fazy supersolid.

5.6 Argument skalowania

Jednym z ograniczeń praktycznych przy realizacji eksperymentalnej fazy supersolid jest konieczność wykorzystania silnie magnetycznych pierwiastków, takich jak dysproz. Wysoki moment magnetyczny jest kluczowy dla wygenerowania odpowiednio silnych oddziaływań dipolowych, które - jak wykazano - odgrywają istotną rolę w formowaniu się tej struktury. Niemniej jednak, w warunkach laboratoryjnych często większymi możliwościami manipulacyjnymi i stabilniejszymi właściwościami cechują się słabiej magnetyczne pierwiastki [45]. W tej sekcji pokazujemy, że dzięki odpowiedniemu przeskalowaniu parametrów układu - takich jak masa atomu, moment magnetyczny czy częstość pułapki poprzecznej - możliwe jest zredukowanie siły oddziaływania magnetycznego bez istotnej utraty efektu fizycznego.

Wszystkie wyniki numeryczne, przedstawione w niniejszej pracy zostały uzyskane dla mieszaniny składnika fermionowego ${}^6\text{Li}$ i bozonowego ${}^{162}\text{Dy}$. Atom dysprozu charakteryzuje się wyjątkowo dużym momentem magnetycznym, równym $10\mu_B$, co czyni go jednym z najbardziej magnetycznych znanych pierwiastków. Tak silny moment prowadzi do znacznych oddziaływań dipolowych w komponencie bozonowym. Efektywne oddziaływanie dipolowe w układzie z pułapką harmoniczną skaluje się zgodnie z zależnością:

$$\begin{aligned}\mu_d &= \tilde{\mu}_d (\hbar \omega_\perp L_\perp)^{1/2}, \\ \mu_{\text{dip}} &= \mu_d L_\perp = \tilde{\mu}_d \hbar^{5/4} (m_B^3 \omega_\perp)^{-1/4} \sim \tilde{\mu}_d (m_B^3 \omega_\perp)^{-1/4},\end{aligned}\tag{5.28}$$

gdzie $\tilde{\mu}_d$ to wartość kodowa momentu magnetycznego, m_B - masa bozonu, a $\omega_\perp$ - częstość pułapki w kierunku poprzecznym. Taka zależność umożliwia przeskalowanie parametrów w sposób pozwalający na adaptację modelu do innych, słabiej magnetycznych pierwiastków.

Wcześniej pokazano, że dla wartości kodowej $\tilde{\mu}_d = 0.1$, układ wchodzi w fazę supersolid. Obecnie możemy powiązać ten przypadek z rzeczywistymi parametrami fizycznymi: przy częstości poprzecznej $\omega_\perp = 2\pi \times 14$ Hz odpowiada on efektywnemu momentowi dipolowemu $\mu_{\text{dip}} = 10\mu_B$, czyli rzeczywistej wartości dla atomu dysprozu. Jednocześnie wartości kodowe oddziaływań $g_B = 0.02$ oraz $g_{BF} = -3.8$ odpowiadają długościom rozpraszania $a_B = 3.3$ nm (bozon-bozon) oraz $a_{BF} = -45$ nm (bozon-fermion). Z kolei dla wartości kodowej $\tilde{\mu}_d = 0.06$, przy częstości poprzecznej $\omega_\perp = 2\pi \times 1.8$ Hz, również otrzymujemy efektywny moment $\mu_{\text{dip}} = 10\mu_B$. Odpowiadające temu wartości długości rozpraszania to $a_B = 9.3$ nm oraz $a_{BF} = -127$ nm. Pokazuje to, że odpowiednia geometria pułapki pozwala skutecznie kontrolować efektywny moment magnetyczny w układzie. Analogicznie, zastosowanie przeskalowania $\tilde{\mu}_d \rightarrow \tilde{\mu}_d/2$, $m_{B,F} \rightarrow m_{B,F}/3$ oraz $\omega_\perp \rightarrow 27\omega_\perp$ pozwala dostosować model do atomów chromu (${}^{52}\text{Cr}$), których rzeczywisty moment magnetyczny wynosi $\mu_{\text{dip}} = 6\mu_B$. Dla $\tilde{\mu}_d = 0.06$ i $\omega_\perp = 2\pi \times 380$ Hz, zależność

$$\mu_{\text{dip}} \sim \tilde{\mu}_d (m_B^3 \omega_\perp)^{-1/4}$$

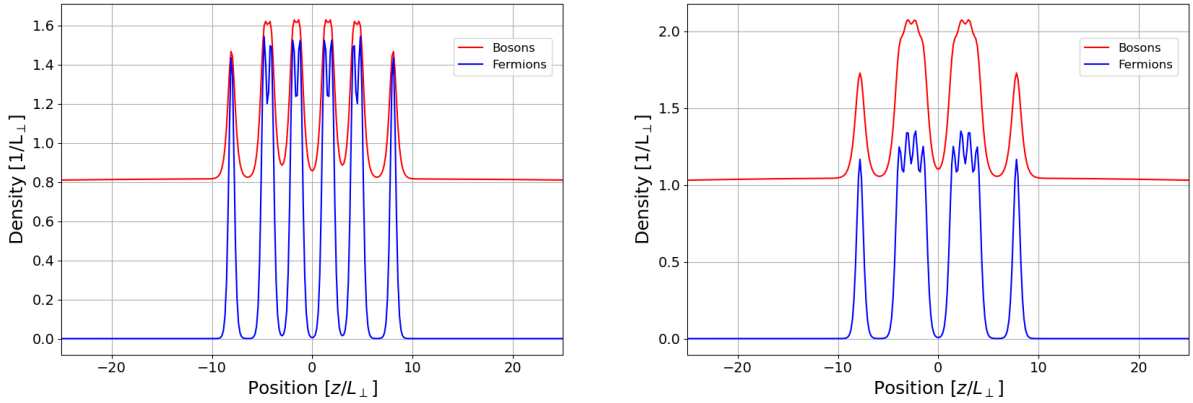
prowadzi do $\mu_{\text{dip}} \approx 6\mu_B$, zgodnego z wartością dla chromu. Odpowiadające długości rozpraszania wynoszą w tym przypadku $a_B = 1.1$ nm oraz $a_{BF} = -15$ nm.

Oznacza to, że uzyskane wyniki pozostają poprawne również dla układów o mniejszym momencie magnetycznym, pod warunkiem zachowania odpowiedniego przeskalowania mas oraz geometrii pułapki, co czyni fazę supersolid dostępną także dla atomów o słabszym momencie dipolowym, takich jak ${}^{52}\text{Cr}$. Z fizycznego punktu widzenia, przeskalowanie to odpowiada przejściu od silnie magnetycznego atomu dysprozu ($\mu_{\text{dip}} = 10\mu_B$) do znacznie słabiej magnetycznego atomu chromu ($\mu_{\text{dip}} \approx 6\mu_B$). Pomimo mniejszego momentu dipolowego, odpowiednie dostrojenie mas składników i częstości pułapki umożliwia

zachowanie dostatecznie silnych oddziaływań dipolowych, by możliwe było uformowanie fazy supersolid. Tym samym pokazujemy, że realizacja tej fazy może być osiągalna także dla mniej magnetycznych pierwiastków, takich jak bozonowy izotop ^{52}Cr oraz fermionowy deuter ^2H .

5.7 Badanie przypadku $\tilde{\mu}_d = 0.02$

W celu zbadania granic stabilności fazy supersolid, przeprowadzono dodatkową analizę numeryczną dla znacznie mniejszego momentu dipolowego $\tilde{\mu}_d = 0.02$. W analizie tej zachowano oryginalne wartości mas składników oraz geometrię pułapki, natomiast zmodyfikowano parametry oddziaływań: moment dipolowy, liczbę bozonów ($N_B = 50000$), oddziaływanie bozon-bozon ($g_B = 0.15$) oraz siłę sprzężenia bozon-fermion ($g_{BF} = -16$).



Rysunek 5.12: Gęstości składnika bozonowego (czerwona krzywa) i fermionowego (niebieska krzywa) dla słabych oddziaływań dipolowych $\tilde{\mu}_d = 0.02$. Lewy rysunek: przypadek $g_{BF} = -16$, $g_B = 0.15$ - widoczna wyraźna struktura periodyczna wskazująca na fazę supersolid. Prawy rysunek: konfiguracja z innymi parametrami oddziaływań ($g_{BF} = -10$, $g_B = 0.07$), pokazująca zachowanie struktury przy zmianie parametrów oddziaływania. Ze względu na dużą liczbę bozonów prezentujemy jedynie obszar istotny dla analizy, a skale gęstości dobrano tak, aby oba składniki były widoczne na jednym wykresie.

Pomimo znacznego osłabienia oddziaływań dipolowych, w stanie podstawowym nadal obserwowano wyraźną modulację gęstości bozonów, co wskazuje na obecność uporządkowania przestrzennego typowego dla fazy supersolid. Chociaż w tym przypadku nie przeprowadzono pełnej analizy widma wzbudzeń, charakter obserwowanej struktury gęstości pozwala przypuszczać, że układ w dalszym ciągu realizuje fazę supersolid. Gęstości obu składników przedstawiono na rysunku 5.12. Aby odnieść uzyskane wyniki do rzeczywistych parametrów eksperymentalnych, rozważono przypadek częstości pułapki poprzecznej $\omega_{\perp} = 2\pi \times 1000$ Hz oraz kodowej wartości momentu magnetycznego $\tilde{\mu}_d = 0.02$. Zgodnie ze skalowaniem

$$\mu_{\text{dip}} \sim \tilde{\mu}_d \left(m_B^3 \omega_{\perp} \right)^{-1/4},$$

uzyskuje się wartość efektywnego momentu dipolowego $\mu_{\text{dip}} \approx 1 \mu_B$, która odpowiada rzeczywistemu momentowi magnetycznemu atomu rubidu. W takich warunkach parametry oddziaływań kodowych przekładają się na długości rozpraszania równe: lewy rysunek $\rightarrow a_B = 4.07$ nm, prawy rysunek $\rightarrow a_B = 1.09$ nm (bozon-bozon) oraz lewy rysunek $\rightarrow a_{BF} = -29.09$ nm, prawy rysunek $\rightarrow a_{BF} = -18.08$ nm (bozon-fermion), przy założeniu mieszaniny ^{87}Rb - ^3He . Siłę oddziaływań można regulować, zbliżając układ do rezonansu Feshbacha, faza supersolid może wówczas występować w różnych reżimach oddziaływania.

Wyniki te wskazują, że obecność fermionów może znacząco obniżać próg wymaganej siły oddziaływań dipolowych, koniecznej do uformowania fazy supersolid. Sugeruje to, że zjawisko to może być osiągalne również dla mieszanin zawierających jeszcze słabiej magnetyczne pierwiastki, takie jak bozonowy ^{87}Rb i fermionowy ^3He , pod warunkiem odpowiedniego dostrojenia geometrii pułapki oraz parametrów sprzężenia między składnikami.

5.8 Podsumowanie rozdziału

W niniejszym rozdziale przeanalizowano mechanizm powstawania fazy supersolid w kwazi-jedno-wymiarowej mieszaninie bozonowo-fermionowej z uwzględnieniem oddziaływań dipolowych. Główne wyniki i wnioski można przedstawić w następujących punktach [46]:

- Przejście od opisu trójwymiarowego do kwazi-jednowymiarowego umożliwiło redukcję modelu do bardziej przystępnej formy, bez utraty najistotniejszych cech fizycznych, takich jak długozasięgowe oddziaływania dipolowe oraz sprzężenie bozon-fermion.
- Analiza stanu podstawowego wykazała, że silne oddziaływanie przyciągające pomiędzy bozonami a fermionami prowadzi do modulacji gęstości. W pewnym zakresie parametrów pojawia się struktura uporządkowana przestrzennie, wskazująca na obecność fazy supersolid.
- Wprowadzenie analitycznego modelu z eliminacją fermionowych stopni swobody pozwoliło zidentyfikować warunki wystąpienia rotonowej niestabilności. Jej obecność stanowi wyraźny sygnał przejścia układu do fazy supersolid i jest bezpośrednio powiązana z obserwowaną modulacją gęstości.
- Dokładna analiza wzbudzeń niskoenergetycznych umożliwiła identyfikację modów Goldstone’a (in-phase i out-of-phase) oraz Higgsa, co stanowi kluczowy dowód na istnienie fazy supersolid. Dalsze śledzenie tych modów w funkcji zmiennego oddziaływania g_B pozwoliło uchwycić dynamikę przejścia do izolowanych kropli.

- Zastosowanie kryterium Leggetta wykazało, że frakcja nadciekła systematycznie maleje wraz ze wzrostem składnika krystalicznego. W granicy bardzo małych g_B układ traci koherencję fazową i przechodzi w stan izolowanych kropli, w którym nadciekłość zanika.
- Pomimo braku jednoznacznego dowodu na występowanie globalnej koherencji fazowej w gęstości fermionowej, zaobserwowano wyraźne korelacje między składnikami mieszaniny oraz udział fermionów w formowaniu uporządkowanej struktury przestrzennej. Wskazuje to na możliwość ich pośredniego udziału w tworzeniu fazy supersolid.
- Wprowadzenie argumentu skalowania pokazało, że poprzez odpowiednie przeskalowanie momentu magnetycznego, mas składników oraz geometrii pułapki, faza supersolid może być osiągnięta również w układach opartych na słabiej magnetycznych atomach. Przykładowo, transformacja parametrów zbliżona do przejścia z dysprozu ($\mu_{dip} = 10\mu_B$) do chromu ($\mu_{dip} = 6\mu_B$), pozwala na zachowanie efektywnego charakteru oddziaływań dipolowych przy zmienionej konfiguracji atomowej.
- Dodatkowa analiza przeprowadzona dla znacznie mniejszego momentu dipolowego $\tilde{\mu}_d = 0.02$ wykazała, że także w tym reżimie parametrów utrzymuje się periodyczna modulacja gęstości bozonów, co sugeruje stabilność fazy supersolid nawet przy osłabionych oddziaływaniach dipolowych. Wyniki te sugerują, że obecność fermionów obniża próg wymaganej siły oddziaływań, umożliwiając realizację tej fazy także dla mniej magnetycznych pierwiastków, takich jak rubid.

Podsumowując, przedstawiony model oraz wyniki numeryczne dostarczają silnych przesłanek na istnienie fazy supersolid w układach mieszanin bozonowo-fermionowych. Obecność zarówno modulacji gęstości, jak i niskoenergetycznych modów związanych z naruszeniem symetrii ciągłych, jednoznacznie wskazuje na istnienie tej egzotycznej fazy materii w szerokim zakresie parametrów - również w konfiguracjach opartych na mniej magnetycznych pierwiastkach. Wyniki tego rozdziału zostały przedstawione w pracy [46].

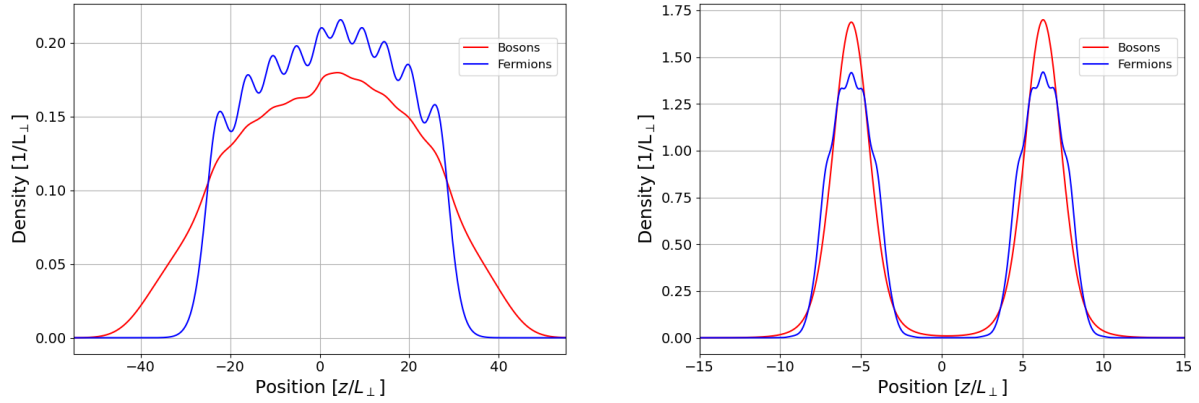
Rozdział 6

Wzbudzenie fazy supersolid metodą quenchu

W tym rozdziale analizujemy dynamikę wzbudzeń w mieszaninie bozonowo-fermionowej, chcąc wykazać, że poprzez odpowiedni dobór parametrów jesteśmy w stanie wejść w fazę supersolid oraz wzbudzić charakterystyczne dla niej mody kolektywne. Kluczowym narzędziem analizy jest *quench* - nagle lub skończona w czasie zmiana jednego z parametrów układu, zazwyczaj potencjału zewnętrznego lub siły oddziaływania. Tego typu zaburzenie wytrąca układ ze stanu podstawowego i inicjuje jego ewolucję, w której mogą zostać wzbudzone różne mody kolektywne. Jako stan początkowy przyjmujemy stan podstawowy, wyznaczony w zaburzonej, niesymetrycznej pułapce - jedna z jej stron została uniesiona względem drugiej, co zostało opisane wcześniej. Na rysunku 6.1 przedstawiono początkowe profile gęstości bozonowej i fermionowej, odpowiednio dla dwóch różnych wartości oddziaływania bozon-fermion $g_{BF} = -1.2$ przy $g_B = 0.02$ oraz $g_{BF} = -3.7$ przy $g_B = 0.0055$, przy pozostałych parametrach takich samych jak wcześniej: $N_B = 3000$, $N_F = 10$, $\mu_d = 0.06$.

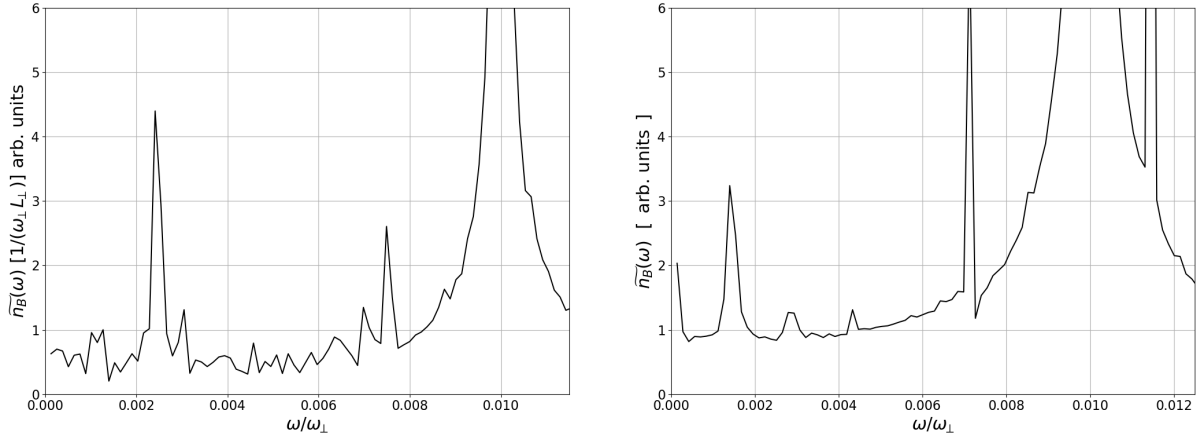
W dalszej części analizy oddziaływanie bozon-fermion zmieniamy do wartości $g_{BF} = -3.8$, realizując w ten sposób procedurę quenchu, zmianę przeprowadzamy liniowo w czasie. Dla słabszego sprzężenia ($g_{BF} = -1.2$) gęstość bozonowa nie wykazuje żadnych periodycznych modulacji i przyjmuje gładki profil zbliżony do rozkładu Tomasa-Fermiego, co sugeruje, że układ znajduje się poza fazą supersolid. Z kolei dla silniejszego oddziaływania ($g_{BF} = -3.7$), w gęstościach bozonowej i fermionowej widoczne są wyraźnie dwa maksima, co - jak wykazano wcześniej - wskazuje na obecność fazy supersolid. Co istotne, po „pęknięciu” chmury fermionowej, układ staje się bardziej wrażliwy na zaburzenia, co utrudnia wejście w fazę supersolid z reżimu, który ją wykazuje. Dlatego w tym przypadku oddaliliśmy się tylko nieznacznie od granicy fazy, aby pokazać, że i z tego reżimu możliwe jest wzbudzenie odpowiednich modów kolektywnych metodą quenchu.

Celem tej części pracy jest wykazanie, że odpowiednio dobrany quench pozwala wzbu-

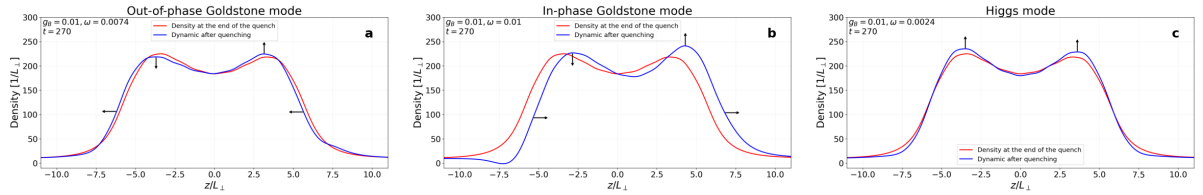


Rysunek 6.1: Porównanie rozkładów gęstości dla dwóch wartości oddziaływania bozon-fermion przy zaburzeniu niesymetrycznym pułapki. Lewy rysunek: gęstość bozonowa (czerwona krzywa) i fermionowa (niebieska krzywa) dla $g_{BF} = -1.2$ i $g_B = 0.02$. Prawy rysunek: gęstość bozonowa (czerwona krzywa) i fermionowa (niebieska krzywa) dla $g_{BF} = -3.7$ i $g_B = 0.0055$.

dzić wszystkie trzy fundamentalne mody kolektywne charakterystyczne dla fazy supersolid: *Goldstone in-phase*, *Goldstone out-of-phase* oraz *mod Higgsa*. Jednoczesna obserwacja tych modów stanowi jednoznaczny dowód na obecność fazy supersolid. Kluczowe znaczenie ma tutaj dobór parametrów zaburzenia - w szczególności jego czasu trwania oraz amplituda asymetrii pułapki. Pokazujemy, że przy odpowiednio dobranym czasie trwania zaburzenia ($\tau = 500 [\frac{1}{\omega_{B\perp}}]$), możliwe jest bezpośrednie wzbudzenie wszystkich niskoenergetycznych modów (niebieski - Higgs, czerwony - out-of-phase, pomarańczowy - in-phase), co widać na rysunku 5.6. Dla innych czasów obserwujemy jedynie częściowe wzbudzenia - pojedyncze mody, ich kombinacje lub nawet całkowity brak charakterystycznej dynamiki typowej dla fazy supersolid. Należy jednak podkreślić, że brak wzbudzenia wszystkich modów nie oznacza, iż układ nie znajduje się w fazie supersolid. Jak wykazano wcześniej w rozdziale *Widmo energetyczne, mod Goldstone'a i Higgsa*, faza supersolid występuje w szerokim zakresie parametrów. Stan początkowy w zaburzonej pułapce posiada pewną energię wewnętrzną i - w języku modów - niezerowe przekrycie z wektorami własnymi układu. Analogicznie do przypadku oscylatora harmonicznego, stan niebędący wektorem własnym może mieć składowe na wielu poziomach energetycznych. Podczas trwania quenchu układ przemieszcza się w przestrzeni parametrów przez różne regiony widma, napotykając tzw. *anti-crossingi* pomiędzy modami. W zależności od czasu z jakim układ jest zaburzany, może albo adiabaticznie podążać za konkretnym modelem, albo „przeskakiwać” przez przerwy energetyczne. Tylko odpowiednio dobrany czas trwania quenchu gwarantuje, że każdy z interesujących nas modów - *Goldstone in-phase*, *Goldstone out-of-phase* oraz *Higgs*, które są dodatkowo zilustrowane na rysunku 6.3 - dotrze do obszaru wzbudzeń niskoleżących i stanie się wyraźnie widoczny w dynamice układu. Widmo wzbudzeń dla obu przypadków zostało zaprezentowane na rysunku 6.2. Wszelkie animacje



Rysunek 6.2: Niskoenergetyczne widma wzbudzeń składowej bozonowej po procedurze *quenchu*. Lewy rysunek: widmo po quenchu $g_{BF} = -1.2 \rightarrow -3.8$ przy stałym $g_B = 0.01$ (czas trwania 500), widoczne trzy wyraźne piki: mod Goldstone’a *in-phase* przy $\omega = 0.01$, mod Goldstone’a *out-of-phase* przy $\omega \approx 0.008$ oraz mod Higgsa przy $\omega \approx 0.002$. Prawy rysunek: widmo po quenchu $g_{BF} = -3.7 \rightarrow -3.8$ przy stałym $g_B = 0.0055$ (czas trwania 500), widoczne trzy piki: *in-phase* przy $\omega = 0.01$, *out-of-phase* przy $\omega \approx 0.007$ oraz Higgs przy $\omega \approx 0.001$, a także dodatkowy pik przy $\omega \approx 0.012$ interpretowany jako fonon krystaliczny (ruch dwóch maksimum gęstości).



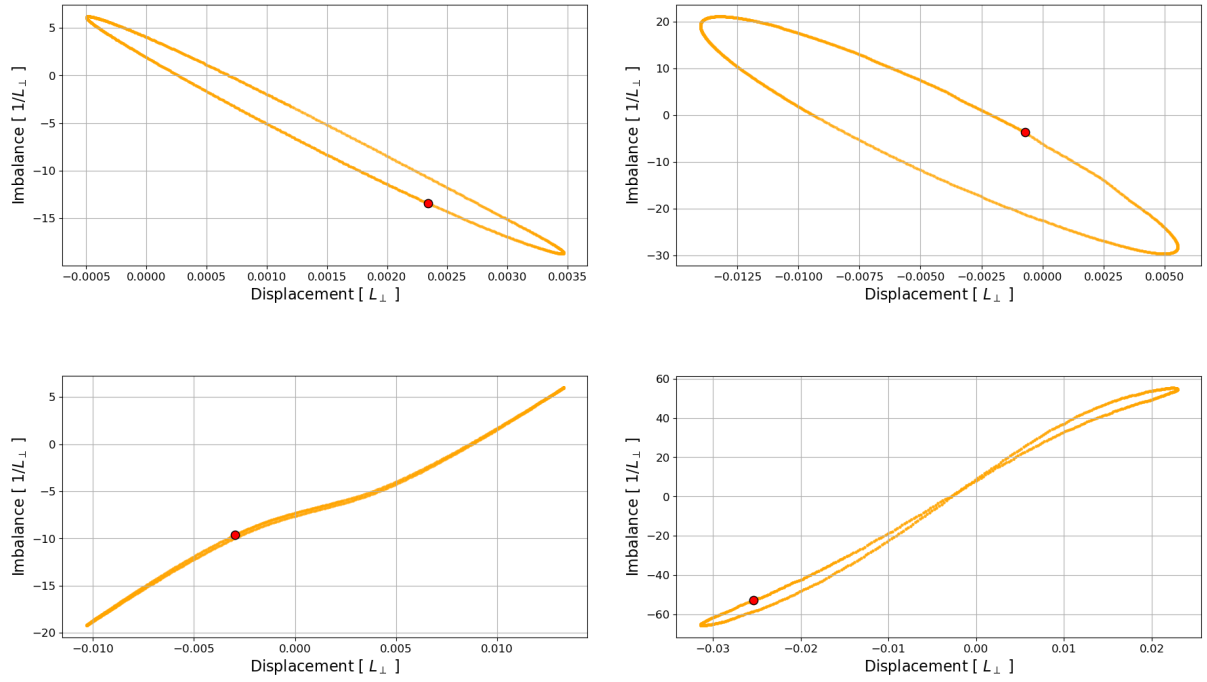
Rysunek 6.3: (a)-(c) Przykłady długofalowych modów ujawnionych przez *quench*. Czerwona krzywa przedstawia gęstość bozonową bezpośrednio po *quenchu*. Niebieskie krzywe pokazują gęstości w wybranych chwilach i ujawniają charakter poszczególnych modów. Poziome i pionowe strzałki w panelach (a) i (b) wskazują odpowiednio dynamikę struktury krystalicznej i nadcieklej. Gdy struktura krystaliczna przesuwa się w lewo, składnik nadcieklej przesuwa się w prawo, podnosząc prawe maksimum (panel (a)) - jest to cecha modu Goldstone’a typu *out-of-phase*. Dla modu Goldstone’a *in-phase* obie struktury poruszają się w tym samym kierunku (panel (b)). W przypadku modu Higgsa położenia maksimum gęstości pozostają w zasadzie nieruchome, natomiast ich wysokości synchronicznie rosną i maleją w czasie (panel (c)).

uzyskane w wyniku procedury opisanej w rozdziale *Niskoenergetyczne wzbudzenia - mody Goldstone'a i Higgsa* są dostępne pod adresem [47]. Jak widać, charakter wzbudzonych modów jest zgodny z wynikami uzyskanymi na podstawie analizy widma, przedstawionej we wcześniejszym rozdziale. Stanowi to jednoznaczny dowód, że potrafimy wzbudzić wszystkie trzy mody - *Goldstone in-phase*, *Goldstone out-of-phase* oraz *Higgs* - jednak tylko przy odpowiednio dobranym czasie trwania quenchu oraz właściwej amplitudzie zaburzenia pułapki.

Dodatkowo przeanalizowano korelacje związane z modem Goldstone'a typu *out-of-phase* oraz *in-phase*. Badano zależność pomiędzy ruchem środka masy - wyznaczanym oddzielnie dla każdego maksimum w celu uchwycenia ruchu całej struktury krystalicznej, zgodnie ze wzorem $\frac{1}{2}(CM_L + CM_P)$ (displacement) - a różnicą wysokości pomiędzy prawym i lewym maksimum gęstości (imbalance), co odpowiada przelewaniu się składnika nadciętego. Wartości CM_L i CM_P są obliczane jako całki gęstości bozonowej po lewej i prawej stronie środka układu, odpowiednio:

$$CM_L = \int_{-\infty}^0 n_B(z) dz, \quad CM_P = \int_0^{\infty} n_B(z) dz.$$

Takie podejście pozwala jednoznacznie określić, czy obserwowany mod rzeczywiście odpowiada charakterystyce wzbudzenia modu *out-of-phase* czy *in-phase*, zgodnie z oczekiwaną charakterystyką fizyczną danego modu, co zostało przedstawione na rysunku 6.4. Na rysunku 6.4 w górnym rzędzie pokazano korelacje, odpowiadające modom *out-of-phase*, natomiast w dolnym rzędzie - modom *in-phase*. W przypadku modu *out-of-phase* punkty w płaszczyźnie (*displacement*, *imbalance*) tworzą wyraźne eliptyczne trajektorie, dla których zmiana położenia środka masy towarzysza zmiany *imbalance* w sposób nie skorelowany. Oznacza to, że przesunięciu struktury krystalicznej w jedną stronę towarzyszy „przelewanie się” składnika nadciętego w stronę przeciwną, co jest charakterystyczne dla wzbudzenia typu *out-of-phase*. Dla modu *in-phase* obserwuje się natomiast korelację - ruchowi środka masy odpowiada zgodna zmiana *imbalance*, czyli zarówno struktura krystaliczna, jak i nadcięte tło poruszają się w tym samym kierunku. Porównanie lewej i prawej kolumny pokazuje, że opisany charakter korelacji jest jakościowo niezależny od wartości g_B , co wzmacnia identyfikację obserwowanych wzbudzeń jako modów Goldstone'a typu *out-of-phase* i *in-phase*. Czerwona kropka na każdym panelu oznacza stan początkowy tuż po przeprowadzeniu *quenchu*, od którego rozpoczyna się dalsza ewolucja układu.



Rysunek 6.4: Porównanie korelacji dla modów *out-of-phase* i *in-phase* przy dwóch wartościach g_B i stałym $g_{BF} = -3.8$. Górny lewy rysunek: korelacje dla modu *out-of-phase*, przypadek $g_B = 0.02$ i $g_{BF} = -3.8$. Górny prawy rysunek: korelacje dla modu *out-of-phase*, przypadek $g_B = 0.0055$ i $g_{BF} = -3.8$. Dolny lewy rysunek: korelacje dla modu *in-phase*, przypadek $g_B = 0.02$ i $g_{BF} = -3.8$. Dolny prawy rysunek: korelacje dla modu *in-phase*, przypadek $g_B = 0.0055$ i $g_{BF} = -3.8$. Czerwona kropka na każdym rysunku oznacza początek ewolucji zaraz po *quenchu*.

Podsumowanie

Przeprowadzona analiza wykazała, że odpowiednio zaprojektowany quench pozwala na skuteczne wzbudzenie wszystkich trzech fundamentalnych modów kolektywnych charakterystycznych dla fazy supersolid: *Goldstone in-phase*, *Goldstone out-of-phase* oraz *Higgs*. Wyniki te stanowią niezależne, dynamiczne potwierdzenie obecności tej fazy, spójne z wcześniejszą analizą modów wzbudzeń, wyprowadzoną na podstawie widma energetycznego. Wyniki z tego rozdziału zostały przedstawione w pracy [48].

Szczególną rolę w mechanizmie wzbudzeń odgrywają parametry quenchu - zarówno jego czas trwania, jak i amplituda zaburzenia pułapki. Tylko ich precyzyjny dobór umożliwia jednoczesne wzbudzenie wszystkich modów i ich jednoznaczną identyfikację. Dodatkowo, korelacje pomiędzy środkiem masy gęstości bozonowej a różnicą w wysokości między głównymi maksimami gęstości potwierdzają, że obserwowany mod rzeczywiście odpowiada charakterystyce *out-of-phase* oraz *in-phase*, zgodnie z fizyczną definicją. Otrzymane wyniki nie tylko pogłębiają rozumienie dynamiki fazy supersolid, ale również potwierdzają skuteczność metody quenchu jako precyzyjnego narzędzia do kontrolowanego wzbudzania i analizy modów kolektywnych w układach bozonowo-fermionowych.

Rozdział 7

Podsumowanie i wnioski

Celem niniejszej pracy była analiza możliwości indukowania fazy supersolid w mieszaninie bozonowo-fermionowej poprzez obecność składnika fermionowego, w szczególności w kontekście układów z relatywnie słabymi momentami magnetycznymi. Badania miały charakter numeryczny i analityczny. Zostały przeprowadzone w ramach efektywnego modelu kwazi-jednowymiarowego, uwzględniając kontaktowe i długozasięgowe oddziaływania dipolowe w składniku bozonowym oraz kontaktowe sprzężenie pomiędzy bozonami i fermionami. Główne wyniki pracy można podsumować w następujących punktach:

- Wykazano, że obecność fermionów, we współdziałaniu z długozasięgowymi oddziaływaniami dipolowymi w składniku bozonowym, może prowadzić do modulacji gęstości w obu składnikach. Jest to wynikiem spontanicznego złamania symetrii translacyjnej i pojawienia się cech charakterystycznych dla fazy supersolid.
- W analizowanym zakresie parametrów, układ wykazuje jednocześnie uporządkowanie przestrzenne oraz obecność frakcji nadciekłej, co wskazuje na realizację fazy supersolid. Dalsze badania widma wzbudzeń wykazały obecność modów Goldstone’a oraz Higgsa, co dostarczyło bezpośrednich dowodów na istnienie tej fazy.
- Dzięki właściwemu przeskalowaniu parametrów układu wykazano, że rezultaty uzyskane dla mieszaniny ^6Li - ^{162}Dy mogą być zaadaptowane także do innych par atomów, takich jak mieszanina ^{52}Cr z deuterem ^2H jako fermionowym składnikiem. Otwiera to nowe możliwości dla eksperymentalnej realizacji fazy supersolid w atomach o mniejszych momentach magnetycznych.
- W pracy przedstawiono również wyniki dla znacznie mniejszego momentu dipolowego ($\tilde{\mu}_d = 0.02$), które potwierdzają zachowanie struktury supersolid, mimo braku pełnej analizy widma wzbudzeń. Wyniki te sugerują, że nawet w przypadku słabo magnetycznych pierwiastków, takich jak rubid, możliwa jest realizacja tej egzotycznej fazy przy odpowiednich warunkach sprzężenia bozonowo-fermionowego oraz obecności (nawet relatywnie słabych) oddziaływań dipolowych.

-
- Pomimo braku bezpośredniego dowodu na globalną koherencję fazową fermionów, obserwowana modulacja gęstości w komponencie fermionowym, skorelowana z modulacją bozonową, wskazuje na ich pośredni udział w mechanizmie formowania bozonowej fazy supersolid. Obecnie, prowadzone są dalsze analizy wpływu bozonów na składnik fermionowy poprzez anizotropię BCS, co może w konsekwencji pozwolić na identyfikację cech supersolid również w komponencie fermionowym.
 - Przeprowadzono szczegółową analizę widma wzbudzeń po nagłej zmianie parametrów układu (tzw. *quenchu*), wykazując, że odpowiednio zaprojektowana procedura pozwala na wzbudzenie wszystkich trzech fundamentalnych modów kolektywnych charakterystycznych dla fazy supersolid: *Goldstone in-phase*, *Goldstone out-of-phase* oraz *Higgs*. Wyniki te stanowią niezależne potwierdzenie obecności tej fazy i podkreślają użyteczność metody *quenchu* jako narzędzia diagnostycznego.

Uzyskane wyniki dostarczają silnych przesłanek, że obecność fermionów może znacząco wspierać formowanie fazy supersolid w warunkach, które dla układów czysto bozonowych nie byłyby wystarczające. Z tego względu układy bozonowo-fermionowe stają się obiecującą platformą do eksperymentalnej realizacji i dalszego badania zjawisk związanych z kwantowym uporządkowaniem przestrzennym i koherencją fazową. Dodatkowo, metoda *quenchu* okazała się skutecznym narzędziem do wzbudzania i identyfikacji modów kolektywnych, co czyni ją wartościowym podejściem w badaniach dynamiki fazy supersolid.

Perspektywy dalszych badań

Dalsze prace mogą koncentrować się na:

- Pełnej analizie wzbudzeń dla przypadków z małym momentem dipolowym ($\tilde{\mu}_d = 0.02$), co pozwoli na jednoznaczną identyfikację fazy supersolid.
- Możliwość badania występowania fazy supersolid również w składniku fermionowym, na przykład poprzez analizę parowania *p-wave* z wykorzystaniem ansatzu BCS, wynikającą z faktu, że dla w pełni spolaryzowanego gazu fermionowego parowanie *s-wave* jest wykluczone w temperaturze bliskiej zera bezwzględnej.
- Uwzględnieniu efektów temperatury oraz niedoskonałości geometrycznych, które mogą wpływać na stabilność fazy supersolid w rzeczywistych eksperymentach.

Dodatek

A Redukcja potencjału dipolowego z 3D do 1D

Zaczynamy od trójwymiarowego, nieliniowego równania Schrödingera:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_B(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_B} \nabla^2 + V_B(\mathbf{r}) + g_B n_B(\mathbf{r}, t) + g_{BF} n_F(\mathbf{r}, t) + \int V_{DD}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_B(\mathbf{r}', t) d^3 \mathbf{r}' \right] \psi_B(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.1})$$

Wprowadzamy postać iloczynową funkcji falowej:

$$\psi_B(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega_{B\perp} t} \phi_{B0}(x) \phi_{B0}(y) \phi_B(z, t),$$

gdzie funkcje poprzeczne mają postać:

$$\phi_{B0}(x) = \left(\frac{1}{\pi L_{B\perp}^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{2L_{B\perp}^2}},$$
$$\phi_{B0}(y) = \left(\frac{1}{\pi L_{B\perp}^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{y^2}{2L_{B\perp}^2}},$$

a długość oscylatorowa wynosi:

$$L_{B\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_B \omega_{B\perp}}}.$$

Potencjał dipolowy dany jest przez:

$$V_{DD} = \int d^3 \vec{r}' \left[\frac{\mu_{dip}^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{3\mu_{dip}^2 (x - x')^2}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \right].$$

Rozwijamy funkcję poprzeczną w bazie Fouriera:

$$\phi_{B0}^2(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk_x e^{ik_x x} \tilde{n}_B(k_x),$$

$$\phi_{B0}^2(x') = \frac{1}{2\pi} \int dk_{1x} e^{ik_{1x}x'} \tilde{n}_B(k_{1x}).$$

Potencjał dipolowy zapisany w przestrzeni pędów:

$$V_{DD}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}_p e^{i\vec{k}_p \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \tilde{V}_{DD}(\vec{k}_p),$$

gdzie potencjał dipolowy w przestrzeni pędów zapisujemy w postaci:

$$\tilde{V}_{DD}(\vec{k}_p) = \frac{4\pi\mu_d^2}{3} \left(3 \frac{k_{px}^2}{|\vec{k}_p|^2} - 1 \right).$$

Mnożymy całe równanie (A.1) stronami przez funkcję $\phi_{B0}(x) \phi_{B0}(y)$ i całkujemy po x i y , a następnie wyodrębniamy składnik zależny od potencjału dipolowego. Pozostałe wyrażenia pomijamy, gdyż ich obliczenie jest stosunkowo proste i nie wymaga szczegółowego omówienia. Potencjał dipolowy zapisujemy jako:

$$\int \int dx dy \phi_{B0}^2(x) \phi_{B0}^2(y) \left[\int d^3\vec{r}' V_{DD}(\vec{r} - \vec{r}') \phi_{B0}^2(x') \phi_{B0}^2(y') |\phi(z', t)|^2 \right] \phi(z, t).$$

Rozważamy wyrażenie w zmiennej x , aby zachować przejrzystość wyprowadzenia, dla zmiennej y wynik będzie analogiczny.

$$\int dx n_B(x) \int d^3\vec{r}' V_{DD}(\vec{r} - \vec{r}') n_B(x'), \quad \text{gdzie } \phi_{B0}^2(x) = n_B(x),$$

co daje:

$$\begin{aligned} & \int dx \int dk_x \frac{1}{2\pi} \tilde{n}_B(k_x) e^{ik_x x} \int d^3\vec{r}' \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}_p e^{i\vec{k}_p \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \tilde{V}_{DD}(\vec{k}_p) \int dk_{1x} \frac{1}{2\pi} \tilde{n}_B(k_{1x}) e^{ik_{1x}x'}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}_p \int dk_x \int dk_{1x} \int dy' dz' e^{i(k_{py} + k_{pz})(y+z)} e^{i(-k_{py} - k_{pz})(y'+z')} \\ & \quad \times \tilde{V}_{DD}(\vec{k}_p) \tilde{n}_B(k_x) \tilde{n}_B(k_{1x}) \left[\frac{1}{2\pi} \int dx e^{i(k_x + k_{px})x} \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int dx' e^{i(k_{1x} - k_{px})x'} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int dy' dz' \int d^3\vec{k}_p \tilde{n}_B(-k_{px}) \tilde{n}_B(k_{px}) \tilde{V}_{DD}(\vec{k}_p) e^{i(k_{py} + k_{pz})(y+z)} e^{i(-k_{py} - k_{pz})(y'+z')} \end{aligned}$$

gdzie skorzystałem z przedstawienia delty Diraca: $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx}$, rozważając również składnik w przestrzeni y :

$$\int dy \phi_{B0}^2(y) V_{DD}(\vec{r} - \vec{r}') \phi_{B0}^2(y')$$

i zbierając wszystko razem otrzymujemy:

$$\left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int dz' \int dk_{px} dk_{py} dk_{pz} \tilde{n}_B(-k_{px}) \tilde{n}_B(k_{px}) \tilde{n}_B(-k_{py}) \tilde{n}_B(k_{py}) \right. \\ \left. \times \tilde{V}_{dd}(\vec{k}_p) e^{ik_{pz}(z-z')} |\phi(z', t)|^2 \right] \phi(z, t).$$

Obliczmy całkę po $dk_{px} dk_{py}$:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_{px} dk_{py} \mu_d^2 4\pi \left(\frac{k_{px}^2}{k_{px}^2 + k_{py}^2 + k_{pz}^2} - \frac{1}{3} \right) e^{-k_{px}^2 L_{B\perp}^2/2} e^{-k_{py}^2 L_{B\perp}^2/2}.$$

Po podstawieniu zmiennych $k_{py} = \cos(\theta)k$, $k_{px} = \sin(\theta)k$, pozostaje:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \int_0^{2\pi} d\theta \mu_d^2 4\pi \left(\frac{k^2 \cos^2(\theta)}{k^2 + k_{pz}^2} - \frac{1}{3} \right) e^{-k^2 L_{B\perp}^2/2}.$$

Całka dzieli się na dwa człony, które obliczamy osobno. Pierwszy z nich przyjmuje postać:

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \mu_d^2 4\pi e^{-k^2 L_{B\perp}^2/2} \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{2}{3} \frac{\mu_d^2}{L_{B\perp}^2},$$

natomiast drugi człon przyjmuje postać:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \mu_d^2 4\pi^2 \frac{k^3}{k^2 + k_{pz}^2} e^{-k^2 L_{B\perp}^2/2} = \frac{\mu_d^2}{L_{B\perp}^2} - \frac{\mu_d^2}{2} e^{k_{pz}^2 L_{B\perp}^2/2} k_{pz}^2 \Gamma \left[0, \frac{k_{pz}^2 L_{B\perp}^2}{2} \right],$$

gdzie Γ jest funkcją gamma. Potencjał dipolowy po redukcji w przestrzeni pędów ma zatem postać:

$$V_{dd}(k_{pz}) = \frac{\mu_d^2}{L_{B\perp}^2} \left(\frac{1}{3} - a e^a \Gamma[0, a] \right),$$

gdzie $a = \frac{k_{pz}^2 L_{B\perp}^2}{2}$.

Zebranie obu członów oraz transformacja Fouriera do przestrzeni rzeczywistej, prowadzi do końcowego wyrażenia dla efektywnego potencjału dipolowego wzdłuż osi z :

$$V_{dd}(z) = \mu_d^2 \left\{ -\frac{2}{3} \delta(z) + \frac{-2\sqrt{a}|z| + \sqrt{\pi} e^{z^2/(4a)} (z^2 + 2a) \operatorname{Erfc}\left(\frac{|z|}{2\sqrt{a}}\right)}{8a^{3/2}} \right\}, \quad a = \frac{L_{\perp}^2}{2},$$

gdzie $\text{Erfc}(x)$ oznacza uzupełniającą funkcję błędu. Całe równanie bozonowe w 1D ma postać:

$$i\hbar \frac{\partial \phi_B(z, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_B} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_B(z) + g_B n_B(z, t) \right. \\ \left. + g_{BF} n_F(z, t) + \int V_{dd}(z - z') n_B(z', t) dz' \right] \phi_B(z, t).$$

B Efektywny potencjał

Rozważmy jednorodny gaz składający się z dwóch składników (bozonowego (n_B) i fermionowego (n_F)), w którym gęstości są stałe. Aby układ był stabilny, energia musi wzrastać przy odchyleniach gęstości od jednorodności. Zakładamy, że zaburzenia gęstości są długofalowe (wolnozmiennie w przestrzeni), tak że wkład kinetyczny w funkcjonale energii jest zaniedbywalny. W tych warunkach całkowitą energię E można zapisać jako

$$E = \int d\mathbf{r} \mathcal{E}(n_B(\mathbf{r}), n_F(\mathbf{r})), \quad (\text{B.1})$$

gdzie $\mathcal{E}$ oznacza gęstość energii jako funkcję n_B i n_F dwóch komponentów. Rozpatrzmy zmianę całkowitej energii wywołaną małymi zmianami δn_B i δn_F . W dalszej analizie pracujemy przy ustalonych liczbach cząstek obu składników (warunki kanoniczne), tj. $\delta N_B = \delta N_F = 0$. Wariacja pierwszego rzędu znika z powodu zachowania całkowitych liczb cząstek:

$$N_1 = \int n_B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \text{const}, \quad N_2 = \int n_F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \text{const},$$

co implikuje

$$\delta N_1 = \int \delta n_B(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0, \quad \delta N_2 = \int \delta n_F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0.$$

Dla tła jednorodnego potencjały chemiczne

$$\mu_B = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_B}, \quad \mu_F = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_F}$$

są stałe, zatem:

$$\delta E^{(1)} = \int d\mathbf{r} (\mu_B \delta n_B + \mu_F \delta n_F) = \mu_B \int \delta n_B d\mathbf{r} + \mu_F \int \delta n_F d\mathbf{r} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Dopiero wariacja drugiego rzędu daje wkład:

$$\delta^2 E = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_B^2} (\delta n_B)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_F^2} (\delta n_F)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_B \partial n_F} \delta n_B \delta n_F \right]. \quad (\text{B.3})$$

Po zaniedbaniu członów gradientowych druga wariacja energii ma lokalnie postać formy kwadratowej

$$\delta^2 E = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[A (\delta n_B)^2 + B (\delta n_F)^2 + 2C \delta n_B \delta n_F \right],$$

gdzie

$$A = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_B^2} = \frac{\partial \mu_B}{\partial n_B}, \quad B = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_F^2} = \frac{\partial \mu_F}{\partial n_F}, \quad C = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial n_B \partial n_F} = \frac{\partial \mu_B}{\partial n_F} = \frac{\partial \mu_F}{\partial n_B}.$$

Aby sprawdzić stabilność układu, badamy znak wyrażenia podcałkowego. Jeśli gdziekolwiek wyrażenie w nawiasie jest ujemne, to całka też może być ujemna. Zatem stabilność wymaga, by dla dowolnych liczb $x \equiv \delta n_B$ i $y \equiv \delta n_F$

$$Q(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy > 0.$$

Zapisujemy Q jako

$$Q(x, y) = A \left(x + \frac{C}{A} y \right)^2 + \left(B - \frac{C^2}{A} \right) y^2.$$

Aby $Q > 0$ dla dowolnych x, y , konieczne jest

$$A > 0 \quad \text{oraz} \quad B - \frac{C^2}{A} > 0,$$

co jest równoważne warunkowi

$$AB - C^2 > 0.$$

Warunki stabilności możemy zapisać jako

$$A > 0, \quad B > 0, \quad AB - C^2 > 0,$$

czyli w języku potencjałów chemicznych

$$\frac{\partial \mu_B}{\partial n_B} > 0, \quad \frac{\partial \mu_F}{\partial n_F} > 0, \quad \frac{\partial \mu_B}{\partial n_B} \frac{\partial \mu_F}{\partial n_F} - \left(\frac{\partial \mu_B}{\partial n_F} \right)^2 > 0. \quad (\text{B.4})$$

Wystarczy sprawdzić nierówność $AB - C^2 > 0$ oraz jeden z warunków $A > 0$ lub $B > 0$; drugi wtedy wynika automatycznie.

Rozpatrujemy przypadek $T \simeq 0$. Z tego względu oddziaływanie fermion-fermion zaniedbujemy: rozpraszanie w kanale s jest zabronione dla identycznych fermionów, natomiast kanał p w tak niskich temperaturach daje zaniedbywalny wkład. Dla rozrzedzonej mieszaniny bozonowo-fermionowej, w której fermiony są spolaryzowane, funkcjonal energii zapisujemy [50]:

$$E/V = \frac{1}{2} g_{BB} n_B^2 + g_{BF} n_B n_F + \frac{3}{5} E_F n_F. \quad (\text{B.5})$$

Z warunku stabilności można wyodrębnić wkład „indukowany” przez fermiony:

$$\frac{\partial \mu_B}{\partial n_B} - \frac{\left(\frac{\partial \mu_B}{\partial n_F}\right)^2}{\frac{\partial \mu_F}{\partial n_F}} \geq 0. \quad (\text{B.6})$$

Pierwszy człon to zmiana potencjału chemicznego bozonów przy zmianie n_B przy stałym n_F , natomiast drugi działa jak oddziaływanie indukowane: gęstość bozonowa oddziałuje z gazem fermionów (w zależności od znaku wzajemnego oddziaływania efekt jest przyciągający lub odpychający), a ta zmiana wpływa na energię bozonów. W granicy statycznej definiujemy

$$g_{\text{ind}} = - \frac{\left(\partial \mu_B / \partial n_F\right)^2}{\partial \mu_F / \partial n_F}, \quad (\text{B.7})$$

mamy więc

$$\frac{\partial \mu_B}{\partial n_F} = g_{BF}, \quad \frac{\partial \mu_F}{\partial n_F} = \frac{\partial E_F}{\partial n_F}. \quad (\text{B.8})$$

Aby wyznaczyć $\partial E_F / \partial n_F$, korzystamy z zależności dla nieoddziałującego, w pełni spolaryzowanego gazu Fermiego w 3D:

$$n_F = \frac{k_F^3}{6\pi^2}, \quad E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_F}.$$

Zatem

$$\frac{\partial E_F}{\partial n_F} = \frac{\partial E_F}{\partial k_F} \frac{\partial k_F}{\partial n_F} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_F k_F} = \frac{2}{3} \frac{E_F}{n_F}.$$

Stąd

$$g_{\text{ind}} = - g_{BF}^2 \frac{3}{2} \frac{n_F}{E_F}. \quad (\text{B.9})$$

Zatem efektywne sprzężenie bozon-bozon ma postać:

$$g_{\text{eff}} = g_{BB} - g_{BF}^2 \frac{3}{2} \frac{n_F}{E_F}. \quad (\text{B.10})$$

C Energia Bogolubowa

Zacniemy od wyliczenia energii Bogolubowa dla przypadku oddziaływania kontaktowego, a następnie przejdziemy do wyliczenia poprawki od członu dipolowego. Aby wyznaczyć zależność energii od wektora falowego k , zapiszemy hamiltonian w postaci drugiej kwantyzacji:

$$\begin{aligned} H = & \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \hat{\psi}^\dagger(z) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V_{\text{trap}}(z) \right] \hat{\psi}(z) \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \, U(z-z') \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}^\dagger(z') \hat{\psi}(z') \hat{\psi}(z). \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Dla oddziaływania kontaktowego odpowiada to wyborowi

$$U(z - z') = U \delta(z - z'), \quad (\text{C.2})$$

gdzie U jest stałą sprzężenia (związaną z długością rozpraszania), natomiast w poniższym wyprowadzeniu pozostawimy $U(z - z')$ w ogólnej postaci. Dla uproszczenia rachunków przyjmujemy $V_{\text{trap}}(z) = 0$ i przedstawiamy operator $\hat{\psi}(z)$ poprzez fale płaskie:

$$\hat{\psi}(z) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_k e^{ikz}, \quad \epsilon_k \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (\text{C.3})$$

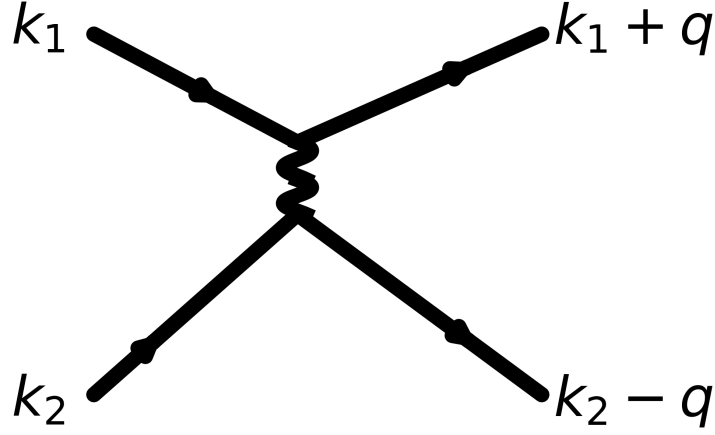
gdzie V oznacza objętość (w 1D - długość) układu w formalizmie fal płaskich. W dalszej części, dla przejrzystości zapisu, pomijamy daszki nad operatorami a_k . Wówczas hamiltonian w reprezentacji pędowej ma postać

$$H = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2V} \sum_{k_1, k_2, q} U(q) a_{k_1+q}^\dagger a_{k_2-q}^\dagger a_{k_2} a_{k_1}, \quad (\text{C.4})$$

gdzie $U(q)$ jest transformatą Fouriera $U(z - z')$. W dalszym ciągu prowadzimy rachunki dla ogólnego potencjału $U(q)$, wynik końcowy będzie mógł zostać zastosowany zarówno do przypadku czysto kontaktowego ($U(q) = U$), jak i do sytuacji z dodatkową poprawką dipolową. Zakładając, że jesteśmy w temperaturze $T \approx 0$, większość atomów jest w kondensacie i możemy przyjąć przybliżenie Bogolubowa... $a_0 \approx a_0^\dagger \approx \sqrt{N_0}$, gdzie całkowita liczba cząstek to

$$N = \sum_k a_k^\dagger a_k = N_0 + \sum_{k \neq 0} a_k^\dagger a_k. \quad (\text{C.5})$$

Aby wyliczyć człon oddziaływania, posłużymy się diagramem Feynmana, zliczając wkłady kondensat-kondensat oraz kondensat-stany wzbudzone (zob. rys. 1). Do wyrazu



Rysunek 1: Diagram Feynmana ilustrujący rozpraszanie z udziałem kondensatu.

kwadratowego w operatorach $a_{k \neq 0}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & k_1 = k_2 = k_1 - q = k_2 + q = 0 \\
 & \Rightarrow \frac{U(0)}{2V} N_0^2 \\
 & \Rightarrow \frac{U(0)}{2V} \left(N - \sum_{k \neq 0} a_k^\dagger a_k \right)^2 \\
 & \Rightarrow \frac{U(0)}{2V} \left(N^2 - 2N \sum_{k \neq 0} a_k^\dagger a_k \right) \\
 (2) \quad & k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U(q) a_q^\dagger a_{-q}^\dagger N_0 \\
 (3) \quad & k_1 + q = k_2 - q = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U(q) a_q a_{-q} N_0 \\
 (4) \quad & k_1 = k_2 - q = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U(q) a_q^\dagger a_q N_0 \\
 (5) \quad & k_1 + q = k_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U(q) a_{-q}^\dagger a_{-q} N_0 \\
 (6) \quad & k_2 - q = k_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U(0) a_q^\dagger a_q N_0 \\
 (7) \quad & k_1 + q = k_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U(0) a_q^\dagger a_q N_0. \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

Zakładamy, że większość atomów jest w kondensacie, więc $N \simeq N_0$. Wtedy

$$H \approx E_0 + \sum_{q \neq 0} \left[\left(\epsilon_q + 2 \frac{n_0}{2} U(q) \right) a_q^\dagger a_q + \frac{n_0 U(q)}{2} \left(a_{-q}^\dagger a_q^\dagger + a_{-q} a_q \right) \right], \tag{C.7}$$

gdzie $E_0 = \frac{U(0)}{2V} N_0^2$ oraz $n_0 = \frac{N_0}{V}$. Wprowadzamy zmienne

$$\beta_q \equiv \frac{1}{2} n_0 U(q), \quad \xi_q \equiv \epsilon_q + 2\beta_q, \quad (\text{C.8})$$

co pozwala przepisać hamiltonian jako

$$H \approx E_0 + \sum_{q \neq 0} \left[\xi_q a_q^\dagger a_q + \beta_q (a_{-q}^\dagger a_q^\dagger + a_{-q} a_q) \right]. \quad (\text{C.9})$$

Jak widać ze wzoru (C.9), pozbyliśmy się czterooperatorowego członu oddziaływania, ale hamiltonian nie jest diagonalny. Aby sprowadzić go do postaci diagonalnej, wprowadzamy następujące zmienne [28]:

$$\begin{aligned} b_q &= u_q^* a_q - v_q^* a_{-q}^\dagger, & b_{-q} &= u_{-q}^* a_{-q} - v_{-q}^* a_q^\dagger, \\ b_q^\dagger &= u_q a_q^\dagger - v_q a_{-q}, & b_{-q}^\dagger &= u_{-q} a_{-q}^\dagger - v_{-q} a_q. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Nowe operatory kwazicząstek spełniają standardowe relacje komutacyjne:

$$[b_q, b_{q'}^\dagger] = \delta_{q,q'}, \quad [b_q, b_{q'}] = [b_q^\dagger, b_{q'}^\dagger] = 0,$$

a analogicznie dla a -operatorów:

$$[a_q, a_{q'}^\dagger] = \delta_{q,q'}, \quad [a_q, a_{q'}] = [a_q^\dagger, a_{q'}^\dagger] = 0.$$

Dodatkowo zakładamy, że stałe u i v są rzeczywiste: $u_q^* = u_q$, $u_{-q} = u_q$ oraz $v_q^* = v_q$, $v_{-q} = v_q$.

Z tych operatorów możemy skonstruować macierz transformacji

$$\begin{pmatrix} b_q^\dagger \\ b_{-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_q & -v_q \\ -v_q & u_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_q^\dagger \\ a_{-q} \end{pmatrix}.$$

Dodatkowy warunek otrzymujemy, licząc komutator $[b_q, b_q^\dagger] = 1$, skąd wynika

$$u_q^2 - v_q^2 = 1.$$

Z tego warunku wiemy, że macierz ma strukturę hiperboliczną; odpowiada to parametryzacji

$$u_q = \cosh \theta_q, \quad v_q = \sinh \theta_q,$$

czyli

$$\begin{pmatrix} u_q & -v_q \\ -v_q & u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta_q & -\sinh \theta_q \\ -\sinh \theta_q & \cosh \theta_q \end{pmatrix}.$$

Do zdiagonalizowania potrzebujemy relacji odwrotnej, więc szukamy macierzy odwrotnej, którą zapisujemy jako

$$\begin{pmatrix} a_q^\dagger \\ a_{-q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_q & v_q \\ v_q & u_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_q^\dagger \\ b_{-q} \end{pmatrix}.$$

Teraz możemy wyrazić stare operatory poprzez nowe, posługując się macierzą odwrotną:

$$a_q^\dagger = u_q b_q^\dagger + v_q b_{-q}, \quad (\text{C.11})$$

$$a_{-q} = v_q b_q^\dagger + u_q b_{-q}. \quad (\text{C.12})$$

Po przepisaniu hamiltonianu w nowych zmiennych mamy

$$\begin{aligned} H = E_0 + \sum_{q \neq 0} \bigg\{ & \left(\xi_q u_q^2 + 2\beta_q u_q v_q \right) b_q^\dagger b_q + \left(\xi_q v_q^2 + 2\beta_q u_q v_q \right) (b_q^\dagger b_q + 1) \\ & + \left(\xi_q u_q v_q + \beta_q (u_q^2 + v_q^2) \right) b_q^\dagger b_{-q}^\dagger + \left(\xi_q u_q v_q + \beta_q (u_q^2 + v_q^2) \right) b_{-q} b_q \bigg\}. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Aby hamiltonian był diagonalny, wyrazy pozadiagonalne muszą być równe zero. Nasze dwa wyrazy pozadiagonalne są takie same, stąd warunek

$$\xi_q u_q v_q + \beta_q (u_q^2 + v_q^2) = 0. \quad (\text{C.14})$$

Wraz z warunkiem $u_q^2 - v_q^2 = 1$ możemy rozwiązać to równanie. Szukamy rozwiązania z $u_q v_q < 0$, ponieważ pozostałe stałe w równaniu (C.14) są dodatnie. Wprowadzając oznaczenia $E_q^2 = \xi_q^2 - 4\beta_q^2 = \epsilon_q^2 + 4\epsilon_q \beta_q$, otrzymujemy:

$$v_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_q}{E_q} - 1 \right), \quad (\text{C.15})$$

$$u_q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_q}{E_q} + 1 \right), \quad (\text{C.16})$$

$$u_q v_q = -\frac{\beta_q}{E_q}. \quad (\text{C.17})$$

Wstawiając te warunki do równania (C.13), otrzymujemy

$$H = E_0 + \sum_{q \neq 0} \left[\xi_q \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\xi_q}{E_q} - 1 \right) - 2 \frac{\beta_q^2}{E_q} \right] + \sum_{q \neq 0} E_q b_q^\dagger b_q. \quad (\text{C.18})$$

Z czego wynika, że nasz hamiltonian został zdiagonalizowany, a energia kwazicząstek

wynosi

$$E_q = \sqrt{\frac{\hbar^2 q^2 n_0 U(q)}{m} + \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\right)^2}. \quad (\text{C.19})$$

Teraz przechodzimy do wyliczenia poprawki od członu dipolowego:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \hat{\psi}^\dagger(z) \hat{\psi}^\dagger(z') V_{dd}(z-z') \hat{\psi}(z) \hat{\psi}(z'). \quad (\text{C.20})$$

Ponieważ interesuje nas widmo dla długich fal, również w tym przypadku rozwiniemy operator pola na fale płaskie:

$$\hat{\psi}(z) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_k e^{ikz}. \quad (\text{C.21})$$

Wtedy człon oddziaływania dipolowego możemy zapisać

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = & \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k a_k^\dagger e^{-ikz} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k_1} a_{k_1}^\dagger e^{-ik_1 z'} \right) \\ & \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk_z U_{DD}(k_z) e^{ik_z(z-z')} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k_2} a_{k_2} e^{ik_2 z} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k_3} a_{k_3} e^{ik_3 z'} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

gdzie $U_{DD}(k_z)$ to efektywna jednowymiarowa transformata Fouriera, która zależy od orientacji dipoli. Parując wyrazy, aby otrzymać delty, człon dipolowy wygląda następująco:

$$\frac{1}{2V} \sum_{k, k_1, k_2, k_3} \int dz e^{-i(k+k_2-k_z)z} \int dz' e^{-i(-k_1-k_3+k_z)z'} \int dk_z U_{DD}(k_z) a_k^\dagger a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3}. \quad (\text{C.23})$$

Otrzymujemy

$$\frac{1}{2V} \sum_{k, k_1, k_2, k_3} \int dk_z U_{DD}(k_z) a_k^\dagger a_{k_1}^\dagger a_{k_2} a_{k_3} \delta(k+k_2-k_z) \delta(-k_1-k_3+k_z). \quad (\text{C.24})$$

Z tych delt widzimy, że jest to dokładnie zasada zachowania pędu $k+k_2=k_1+k_3$, więc wyraz możemy zapisać jako

$$\frac{1}{2V} \sum_{k, k_1, q} U_{DD}(k_1+k+q) a_{k_1+q}^\dagger a_{k-q}^\dagger a_k a_{k_1}. \quad (\text{C.25})$$

Analogicznie jak we wcześniejszym przykładzie, wypisujemy wszystkie człony oddziały-

wania:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & k = k_1 = k_1 + q = k - q = 0 \Rightarrow \frac{U_{DD}(0)}{2V} N_0^2 \\
 (2) \quad & k_1 = k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U_{DD}(q) a_q^\dagger a_{-q}^\dagger N_0 \\
 (3) \quad & k_1 + q = k - q = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U_{DD}(q) a_q a_{-q} N_0 \\
 (4) \quad & k_1 = k - q = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U_{DD}(q) a_q^\dagger a_q N_0 \\
 (5) \quad & k_1 + q = k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U_{DD}(q) a_{-q}^\dagger a_{-q} N_0 \\
 (6) \quad & k_1 + q = k_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U_{DD}(0) a_q^\dagger a_q N_0 \\
 (7) \quad & k - q = k = 0 \Rightarrow \frac{1}{2V} \sum_q U_{DD}(0) a_q^\dagger a_q N_0.
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

Widzimy, że dostajemy identyczne relacje jak we wzorze (C.6), więc cała analiza jest dokładnie taka sama, a energię Bogolubowa z poprawką od członu dipolowego możemy zapisać jako [49]:

$$E_q = \sqrt{\frac{\hbar^2 q^2 n_0 (U(q) + U_{DD}(q))}{m}} + \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \right)^2. \tag{C.27}$$

Bibliografia

- [1] A. J. Leggett. Can a solid be “superfluid”? *Phys. Rev. Lett.*, 25:1543–1546, 1970.
- [2] S. N. Bose. Planck’s law and the hypothesis of light quanta. *Z. Phys.*, 26:178–181, 1924.
- [3] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen gases. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1925.
- [4] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [5] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3969–3973, 1995.
- [6] B. DeMarco and D. S. Jin. Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas. *Science*, 285(5434):1703–1706, 1999.
- [7] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39–44, 2002.
- [8] A. F. Andreev and I. M. Lifshitz. Quantum theory of defects in crystals. *Sov. Phys. JETP*, 29:1107, 1969.
- [9] E. Kim and M. H. W. Chan. Observation of superflow in solid helium. *Science*, 305(5692):1941–1944, 2004.
- [10] J. Day and J. Beamish. Low-temperature shear modulus changes in solid ^4He and connection to supersolidity. *Nature*, 450:853–856, 2007.
- [11] M. W. Ray and R. B. Hallock. Observation of mass transport through solid ^4He . *Phys. Rev. B*, 79:224302, 2009.

-
- [12] L. Tanzi, E. Lucioni, F. Famà, J. Catani, A. Fioretti, C. Gabbanini, R. N. Bisset, L. Santos, and G. Modugno. Observation of a dipolar quantum gas with metastable supersolid properties. *Phys. Rev. Lett.*, 122:130405, 2019.
- [13] F. Böttcher, J.-N. Schmidt, M. Wenzel, J. Hertkorn, M. Guo, T. Langen, and T. Pfau. Transient supersolid properties in an array of dipolar quantum droplets. *Phys. Rev. X*, 9:011051, 2019.
- [14] L. Chomaz, D. Petter, P. Ilzhöfer, G. Natale, A. Trautmann, C. Politi, G. Durastante, R. M. W. van Bijnen, A. Patscheider, M. Sohmen, M. J. Mark, and F. Ferlaino. Long-lived and transient supersolid behaviors in dipolar quantum gases. *Phys. Rev. X*, 9:021012, 2019.
- [15] H. P. Büchler and G. Blatter. Phase separation of atomic bose–fermi mixtures in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, 69:063603, 2004.
- [16] I. Titvinidze, M. Snoek, and W. Hofstetter. Supersolid Bose-Fermi mixtures in optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 100:100401, 2008.
- [17] P. P. Orth, D. L. Bergman, and K. Le Hur. Supersolidity of cold-atom bose-fermi mixtures in optical lattices. *Phys. Rev. A*, 80:023624, 2009.
- [18] D. M. Ceperley. Path integrals in the theory of condensed helium. *Rev. Mod. Phys.*, 67:279–355, 1995.
- [19] E. L. Pollock and D. M. Ceperley. Path-integral computation of superfluid densities. *Phys. Rev. B*, 36:8343–8352, 1987.
- [20] J. Léonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Esslinger, and T. Donner. Supersolid formation in a quantum gas breaking a continuous translational symmetry. *Nature*, 543:87–90, 2017.
- [21] J. Léonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Donner, and T. Esslinger. Monitoring and manipulating higgs and Goldstone modes in a supersolid quantum gas. *Science*, 358(6369):1415–1418, 2017.
- [22] F. Mivehvar, H. Ritsch, and F. Piazza. Cavity-quantum-electrodynamical toolbox for quantum magnetism. *Phys. Rev. Lett.*, 122:113603, 2019.
- [23] J.-R. Li, J. Lee, W. Huang, S. Burchesky, B. Shteynas, F. Ç. Top, A. O. Jamison, and W. Ketterle. A stripe phase with supersolid properties in spin–orbit-coupled bose–einstein condensates. *Nature*, 543:91–94, 2017.

- [24] L. Santos, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein. Roton-maxon spectrum and stability of trapped dipolar Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 90:250403, 2003.
- [25] L. Tanzi, S. M. Roccuzzo, E. Lucioni, F. Famà, A. Fioretti, C. Gabbanini, G. Modugno, A. Recati, and S. Stringari. Supersolid symmetry breaking from compressional oscillations in a dipolar quantum gas. *Nature*, 574:382–385, 2019.
- [26] S. M. Roccuzzo and F. Ancilotto. Supersolid behavior of a dipolar Bose–Einstein condensate confined in a tube. *Phys. Rev. A*, 99:041601, 2019.
- [27] A. Trautmann, P. Ilzhöfer, G. Durastante, C. Politi, M. Sohmen, M. J. Mark, and F. Ferlaino. Dipolar quantum mixtures of erbium and dysprosium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 121:213601, 2018.
- [28] N. N. Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys. (USSR)*, 11:23–32, 1947.
- [29] M. Guo, F. Böttcher, J. Hertkorn, J.-N. Schmidt, M. Wenzel, H. P. Büchler, T. Langen, and T. Pfau. The low-energy Goldstone mode in a trapped dipolar supersolid. *Nature*, 574:386–389, 2019.
- [30] D. Podolsky, A. Auerbach, and D. P. Arovas. Visibility of the amplitude (higgs) mode in condensed matter. *Phys. Rev. B*, 84:174522, 2011.
- [31] J. Hertkorn, F. Böttcher, M. Guo, J.-N. Schmidt, T. Langen, H. P. Büchler, and T. Pfau. Fate of the amplitude mode in a trapped dipolar supersolid. *Phys. Rev. Lett.*, 123:193002, 2019.
- [32] M. Boninsegni and N. V. Prokof’ev. Colloquium: Supersolids: What and where are they? *Rev. Mod. Phys.*, 84:759–776, 2012.
- [33] MIT OpenCourseWare. 8.334 statistical mechanics ii: Statistical physics of fields (lecture 1, spring 2014), 2014. MIT OpenCourseWare.
- [34] V. L. Ginzburg. On superconductivity and superfluidity (what I have and have not managed to do), as well as on the ‘physical minimum’ at the beginning of the 21st century. *ChemPhysChem*, 5:930–945, 2004.
- [35] N. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Westview Press, 1992.
- [36] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 17:1133–1136, 1966.

-
- [37] E. Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, pages 235–257, 1918.
- [38] A. J. Beekman, L. Rademaker, and J. van Wezel. An introduction to spontaneous symmetry breaking. *SciPost Phys. Lect. Notes*, 11, 2019.
- [39] Y. Nambu. Spontaneous breaking of Lie and current algebras. *J. Stat. Phys.*, 115(1–2):7–17, 2004.
- [40] H. Watanabe and H. Murayama. Unified description of Nambu–Goldstone bosons without Lorentz invariance. *Phys. Rev. Lett.*, 108:251602, 2012. <https://arxiv.org/abs/1203.0609>.
- [41] Y. Hidaka. Counting rule for Nambu–Goldstone modes in nonrelativistic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 110:091601, 2013. <https://arxiv.org/abs/1203.1494>.
- [42] M. L. Chiofalo, S. Succi, and M. P. Tosi. Ground state of trapped interacting Bose–Einstein condensates by an explicit imaginary-time algorithm. *Physical Review E*, 62(5):7438–7444, 2000.
- [43] B. J. DeSalvo, K. Patel, G. Cai, and C. Chin. Observation of fermion-mediated interactions between bosonic atoms. *Nature*, 568:61–64, 2019.
- [44] M. Lewkowicz, T. Karpiuk, M. Gajda, and M. Brewczyk. Mody Goldstone’a i Higgsa, 2024. Materiały wideo, dostęp online: https://www.youtube.com/playlist?list=PLLUYgQej5frhR6hq_4wJ4mWlfnSNrhW_7b.
- [45] K. K. Ni, B. L. Augenbraun, J. T. Zhang, S. A. Moses, T. Bilitewski, B. Zhu, J. M. Covey, J. Ye, and D. S. Jin. Lifetime of a dipolar Bose gas in a 3d optical lattice. *Phys. Rev. X*, 12:011016, 2022.
- [46] Maciej Lewkowicz, Tomasz Karpiuk, Mariusz Gajda, and Mirosław Brewczyk. Supersolidity of dipolar Bose–Einstein condensates induced by coupling to fermions. *Phys. Rev. A*, 111:L011301, 2025.
- [47] M. Lewkowicz, T. Karpiuk, M. Gajda, and M. Brewczyk. Mody Goldstone’a i Higgsa wzbudzone metoda quenchu, 2024. Materiały wideo, dostęp online: https://www.youtube.com/watch?v=zHkeR6Ui2bE&list=PLLUYgQej5frhojsM4Z_ah8FHfd-fF21-1.
- [48] Maciej Lewkowicz, Tomasz Karpiuk, Mariusz Gajda, and Mirosław Brewczyk. Dynamic formation of supersolid phase in a mixture of ultracold bosonic and fermionic atoms, 2025.

- [49] S. Giovanazzi and D. H. J. O'Dell. Instabilities and the roton spectrum of a quasi-1d Bose-Einstein condensed gas with dipole-dipole interactions. *Eur. Phys. J. D*, 31:439–445, 2004.
- [50] L. Viverit, C. J. Pethick, and H. Smith. Zero-temperature phase diagram of binary boson-fermion mixtures. *Phys. Rev. A*, 61:053605, 2000.