

KAZIMIERZ TRZĘSICKI

Rola pojęcia niebytu w twórczości matematycznej

W sprawie przedmiotu matematyki zwykle stawia się pytanie o to, czy i jak istnieją obiekty matematyczne. Podstawowym pojęciem takich rozważań jest pojęcie bytu. Dlatego też rozważania te należą do filozofii, a nie do matematyki. Można badać również, czy i jak pojęcie bytu, które mieli matematycy, rzutowało na powstanie matematyki. Sądzę jednak, i zamierzam to pokazać, że *w dziele tworzenia matematyki istotną rolę odegrało pojęcie niebytu.*

Odpowiedzi na pytanie o istnienie i sposób istnienia przedmiotu matematyki, podobnie i odpowiedzi na pytanie o rozumienie bytu, można i należy, jak sądzę, stawiać dość rygorystyczne wymagania metodologiczne. Odpowiedź na pytanie, które tu zadaję ma raczej charakter skojarzeniowy i postać eseju. Uważam jednak, że w każdym przypadku, gdy są podstawy dla pewnych refleksji, należy je zebrać i jakoś uporządkować. Czasem może to być punkt wyjścia dla analizy bardziej dojrzałej metodologicznie, a czasem tylko sposób na uświadomienie roli w tworzeniu wiedzy pewnych, może błędnych, ale kulturowo funkcjonujących pojęć i przekonań. Być może, do czego się skłaniam, ta ostatnia sytuacja ma miejsce w przypadku pojęcia niebytu i towarzyszących mu przekonań. Przemawia za tym choćby niemożność nałożenia na próbę odpowiedzi zbyt rygorystycznych wymagań metodologicznych. W szczególności nie potrafiłbym wskazać żadnego takiego znaczenia, które przysługiwałoby wszystkim użyciom przeze mnie wyrażenia „niebyt” i jemu równoważnych, jak np. „nicość”. Każda próba określenia (pozytywnego) niebytu skazana jest na niepowodzenie. Niebyt musi być potraktowany jako coś. A przecież, jak to Arystoteles w polemice z Gorgiaszem stwierdza: „Jeżeli zaś rzecz szczerą prawdę, jakże osobliwa musiała być ta wypowiedź: »niebyt jest«”¹. Jest to stara platońska zagadka niebytu². Z logiczno-metodologicznego punktu widzenia należałoby przede wszystkim dobrze opisać język, którego się używa. Kierując się zasadami konstrukcji języka musielibyśmy wyrażeniom „niebyt”, „nicość” itp. odmówić statusu wyrażen nazwowych³.

Spośród pojęć matematycznych, a może nie tylko matematycznych, z niebytem, z nicością najbardziej kojarzy się 0⁴. Zero („0”) wynaleźli Hindusi. Współczesne zero nawet kształtem przypomina to wynalezione przez Hindusów. Podobne są również jedynka i siódemka. Zero znane już było matematykowi i astronomowi Ariabhatie (ur. w 476 r.) autorowi dzieła *Ariabhatiam*. Była to ostatnia z wynalezionych dziesięciu cyfr. Wskazuje na to fakt, że na Cejlonie używano tych samych cyfr, co w Indiach, a nie znano zera.

W starożytnej Grecji rozwijała się głównie geometria. W Indiach zaś arytmetyka, algebra i trygonometria. Grecy koncentrowali uwagę na ścisłości logicznej. Mało interesowała ich praktyczna strona dedukcyjnej teorii geometrycznej. Hindusi nie osiągnęli greckiej ścisłości wykładu; rozwijali głównie praktyczny rachunek. Czy jednak praktyczne podejście było czynnikiem istotnym w wynalezieniu zera? W czasie, gdy Grecy, Żydzi, Asyryjczycy używali do dwudziestu siedmiu różnych znaków cyfrowych, Hindusi mieli ich dziesięć. U Babilończyków jedynka (cyfra) mogła oznaczać 1 i dowolną liczbę postaci 60^n (n — liczba naturalna). W zapisie Hindusów jedynka (cyfra) właśnie dlatego, że dysponowali zerem, mogła oznaczać tylko 1. Czy więc wynalezienie zera nie miało, obok czynnika praktycznego, istotnego źródła w światopoglądzie Hindusów?

Od strony ontologicznej przykładem może być buddyjska doktryna *śunja* — ani byt, ani nie-byt. Buddyści jako cel, do którego ludzie winni zdążyć, wskazywali stan nirwany. Absolut czasem pojmowano jako „próżnię”, niewyraźną Ostateczną Rzeczywistość (*paramartha*). W Śankarze (prawdopodobnie 788—820 r.), jednym z najsłynniejszych *aczarja*, czyli mistrzów duchowych, widziano, jak np. Ramanduża, krypto-buddystę, nie dostrzegając różnicy jego pojmowania brahmana w stosunku do buddyjskiej doktryny *śunja*. Śankara, najbardziej wpływowy myśliciel wedanty, w swojej filozofii — *adwajtawedancie* — uważa. świat zmysłowo postrzegalny za jedynie pozór w odniesieniu do brahmana.

W aspekcie teorio-poznawczym znacząca jest np. koncepcja Kumarila, przywódcy jednej ze szkół wtórnych w tradycji mimansy. Przyjmował on jako źródło poznania (*pramana*) „niepostrzeżenie”. Dzięki nie-postrzeżeniu możliwe jest postrzeżenie faktów negatywnych. Jeżeli istnienia jakiegoś przedmiotu nie można poznać przez jakąkolwiek z pięciu innych *praman*, jego absolutne nie-istnienie jest znane przez nie-postrzeżenie.

Jeszcze w czasach nowożytnych znajdujemy określenie zera jako oznaczającego nic, choćby u Chr. Wolffa w *Mathematisches Lexicon*⁵. Była to wówczas powszechnie przyjęta definicja. Newton i inni uczeni, jak np. niewidomy matematyk N. Sanderson, którego *Elements of Algebra* wydane w 1740 r. w Londynie zostały przełożone na francuski i niemiecki, wielkości ujemne określali jako mniejsze od niczego. Oczywiście, na takim tle staje się zrozumiałe, że jeszcze w drugiej połowie XVIII w. Maseres (1731—1824) i Frend (1757—1841) publikowali prace na temat algebry i trygonometrii odrzucając liczby ujemne, choć już przeszło sto lat przedtem były one używane przez Descartesa bez żadnych ograniczeń. Współczesną reminiscencją rozumienia zera jako oznaczającego nic jest, jak sądzę, różnica zdań w kwestii, czy 0 jest, czy też nie jest liczbą naturalną. I tak np. dla van der Waerdena aksjomaty Peano arytmetyki liczb naturalnych opisują własności zbioru liczb naturalnych, którymi są: 1, 2...⁶. Zaś dla K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego: „Peano wykazał, że arytmetykę liczb naturalnych można oprzeć na następujących aksjomatach:

(a) zero jest liczbą naturalną...”⁷.

Współczesne rozstrzygnięcia w sprawie, czy zero jest, czy nie jest liczbą naturalną, często mają tylko uzasadnienie pragmatyczne.

O wyborze zera (cyfry) na oznaczenie fałszu zdecydowały nie tylko względy praktyczne. Dla twórców współczesnej logiki matematycznej Fregego i Russella zdania fałszywe oznaczały tę samą rzecz, mianowicie nicłość. Jak pisze K. Gödel: „Zaś według Russella to, co odpowiada zdaniom w świecie zewnętrznym, jest faktem. Natomiast nie korzysta on z terminu „oznaczać” (*signify*) lub „denotować” (*denote*), a za to używa „wskazywać” (*indicate*) — w swoich wcześniejszych pismach używa on „wyrażać” (*express*) lub „być symbolem dla” (*being a symbol for*) — a to

dlatego, że przyjmuje, iż relacja między zdaniem a faktem jest całkiem różna od tej między nazwą a rzeczą nazywaną. Ponadto, używa on „denotować” (zamiast „oznacząć”) dla relacji między rzeczami a nazwami, tak że obu „denotować” i „wskazywać” odpowiadałoby Fregego *bedeuten*. Więc, zgodnie z Russellową terminologią i poglądem, prawdziwe zdania „wskazują” fakty, a fałszywe nic. Stąd Fregego teoria byłaby w pewnym sensie zastosowana do zdań fałszywych, a to ponieważ wszystkie one wskazują tą samą rzecz, mianowicie nicosć”⁸.

Pojęcia charakteryzowane są przez zakres, czyli zbiór przedmiotów, do których one się odnoszą. Jeżeli tak, to zakresem niebytu, nicosci byłby zbiór pusty. W kontekście uwag nad zerem arytmetycznym warto więc przytoczyć von Neumanna konstrukcję liczb naturalnych.

Zero, co jest jasne, oznacza zbiór pusty (symbolicznie: \emptyset). Zbiór $\{\emptyset\}$, czyli zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty jest desygnatem jedynki. Konstrukcja jest indukcyjna: n -ty w kolejności zbiór otrzymujemy biorąc zbiór, którego wszystkimi i jedynymi elementami są poprzednie zbiory. Trzecim w kolejności (oznaczonym dwójką) będzie więc zbiór: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, czwartym: $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Jak już było powiedziane, pierwszy ze zbiorów oznaczmy przez zero, drugi przez jedynkę, trzeci przez dwójkę i tak dalej kolejnymi cyframi. A zatem mamy: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, 1\}$, $3 = \{\emptyset, 1, 2\}$, itd. Należy tu jeszcze tylko dodać, że konstrukcja ta jest możliwa w teorii zbiorów bez typów. W przypadku, gdy $\emptyset = \{\emptyset\}$ nie jest ona wykonalna.

Oczywiście, mamy tu do czynienia ze swoistym *tworzeniem ze zbioru pustego*. Z tego zbioru okazuje się konstruowalny cały świat liczb naturalnych. Zbiór pusty jest więc doskonałym „materiałem konstrukcyjnym”, z którego twórczy intelekt mający do dyspozycji określoną, dającą się skodyfikować ilość sposobów konstrukcji, może zbudować obiektywnie istniejący, cudowny świat liczb naturalnych. Kroecker głosił, że liczby naturalne są dziełem Boga, a reszta jest dziełem człowieka. Okazuje się, że wystarczy, aby dziełem Boga był zbiór pusty. Konstrukcja von Neumanna wymaga przecież założenia istnienia tego zbioru. Postulat istnienia zbioru pustego jest w pewnych aksjomatykach teorii mnogości aksjomatem⁹.

Istnienie zbioru pustego nie jest oczywiste nawet dla takich realistów platońskich jak Gödel. W dyskusji z Russellem pisze on: „Russell przytacza dwie racje przeciwko ekstensjonalnemu rozumieniu klas, mianowicie istnienie (1) klasy pustej, która nie może być bardzo porządnym zbiorem i (2) klas jednostkowych, które miałyby być identyczne ze swoimi jedynymi elementami. Mnie wszak wydaje się, że argumenty te mogłyby, jeżeli w ogóle, co najwyżej dowodzić, że klasa pusta i klasy jednostkowe (jako różne od swoich jedynych elementów) są fikcjami (wprowadzonymi dla uproszczenia rachunku, jak w geometrii punkt w nieskończoności), a nie, że wszystkie klasy są fikcjami”¹⁰.

Starożytni Grecy utworzyli pojęcie punktu jako obiektu bezwymiarowego, linii jako obiektu jednowymiarowego (mającego długość, a nie mającego szerokości) itd. Pojęcia te jednak genetycznie były osadzone w empirii. Jak zauważył Kartezjusz „pierwsze zasady, które zakłada się przy wywodzeniu twierdzeń geometrycznych, będąc zgodne z funkcjonowaniem zmysłów, łatwo bywają przez każdego przyjmowane”¹¹. Tym niemniej, prawdą jest, co podkreśla F. Klein, że podstawowe pojęcia i aksjomaty geometrii nie są faktami postrzeganymi bezpośrednio, lecz są odpowiednio wyselekcjonowanymi idealizacjami takich faktów¹². Szkoła pitagorejska chciała co prawda przyporządkować rzeczywistość empiryczną światu liczb. Stąd też, aby liczba ciał niebieskich (poza gwiazdami) była równa 10 (dzieś się jako suma czterech początkowych liczb naturalnych: $1+2+3+4=10$, była wzorcem idealnym świata) postulowali istnienie jeszcze jednej nieznannej planety.

Stwierdzenie niewspółmierności boku kwadratu z jego przekątną kłóciło się z postulowaną „harmonią” świata, który miał być objaśniony prawami liczb naturalnych, którego trwałym i nieskończonym substratem miały być liczby. One bowiem lepiej niż ogień, ziemia i woda odzwierciedlały, ich zdaniem, to, co jest i co się staje. Niewspółmierność, podobnie jak liczba niewymierna (w niektórych językach zwana irracjonalną) nie mają żadnego sensu empirycznego¹³. Można przypuszczać, że niemożność pogodzenia postulatu tłumaczenia świata zmysłowego poprzez świat liczb z faktem niewspółmierności boku i przekątnej kwadratu, była zasadniczym powodem wagi, jaką przywiązywano do utrzymania tego faktu w tajemnicy. Hipasosa, który tę tajemnicę zdradził wygnano ze związku pitagorejskiego, zaś jego śmierć, którą poniósł w wyniku rozbicia okrętu, tłumaczono jako zasłużoną karę dla zdrajcy.

Punkty, linie i inne obiekty geometryczne, choć można było wskazać na ich empiryczną genezę, w sensie empirycznym były nicością (we właściwym im aspekcie). Oczywiście, stało się to źródłem różnych trudności teoretycznych. Przeważało do sporów, ujawniane były różne paradoksy, z których najbardziej znane są paradoksy Zenona z Elei. Punkt, jako obiekt bezwymiarowy, próbowano zastąpić niepodzielnym odcinkiem. Tego zaś, choćby wobec niewspółmierności boku i przekątnej kwadratu, nie dało się utrzymać. Ciekawy jest pogląd Arystotelesa wypowiedziany w *O odcinkach niepodzielnych*. Wykazuje on, że „niedorzeczne jest dokładanie punktu do punktu, aby utworzyć linię i linię do punktu, aby utworzyć powierzchnię...” Pisz: „Albowiem byty będące razem i pozbawione rozciągłości zajmują oba to samo miejsce. Byt zaś pozbawiony części nie ma wymiarów, a przeto z bytów pozbawionych części nie mogłaby powstać wielkość ciągła. Nie może więc powstać ani linia z punktów, ani czas z chwil”¹⁴. Z czegoś, co nie ma wymiaru, a więc jest w tym aspekcie nicością, nie może powstać długość. Linia nie ma szerokości, jest więc w tym aspekcie nicością, nie może zatem być tworzywem powierzchni.

Stanowisko, że jakiegokolwiek *continuum* nie jest tożsame ze zbiorem dających się w nim wyróżnić elementów, tak jak linia nie jest tożsama ze zbiorem punktów, ma i dzisiaj swoich zwolenników. Nawet jest to zaskakujące, jak różnych orientacji filozoficznych są to przedstawiciele. R. Ingarden, co w przypisie w *Sporze o istnienie świata* t. III uzupełnia D. Gierulanka, opowiadałby się za tym, że: „Jeżeli nawet dałoby się takimi tworami »punktowymi« wyczerpać pewien twór »liniowy«, to zachodziłaby jedynie pewna odpowiedniość pomiędzy takim zbiorem »punktów« a monolitycznym »odcinkiem« (tworem »liniowym«), ale nie identyczność”¹⁵. I dodaje, że intuicje te nie są obce również matematykom. D. Hilbert w swojej aksjomatyce geometrii euklidesowej o punktach, prostych i płaszczyznach mówi jako o trzech różnych rodzajach „rzeczy”. Tezę o nieidentyczności mnogości indywidualów z przedmiotem, którego wszystkimi i jedynymi elementami składowymi są te indywiduala, głosi nominalista N. Goodmann. Dla niego również linia i punkt byłyby indywidualami, a linia nie byłaby żadnym zbiorem punktów, czyli mnogością indywidualów¹⁶.

W XVI w. dzięki odkryciu i wydrukowaniu niektórych nieznanych dotychczas tekstów greckich następuje dalszy rozwój matematyki. Przede wszystkim udoskonalono algebrę. Dawnym algebraikom pierwiastki ujemne równań algebraicznych wydawały się niezrozumiałe. Pierwszy Albert Girard (1595—1632) nie tylko je rozumie, ale rozszerza nadto pojęcie liczby, obejmując nim wielkości „urojone”, jak np. $\sqrt{-1}$. W XVII w. i na początku wieku XVIII wielkości urojone uważano za coś pomiędzy bytem a niebytem. Określenia „urojone” używano na oznaczenie wszystkich w ogóle ilości występujących w działaniach na liczbach rzeczywistych,

lecz od nich różnych. Nie było również jasne, które wyrażenia urojone mogą występować w matematyce, a nawet które tylko przy rozwiązywaniu równań algebraicznych. U Eulera znajdujemy określenie ilości urojonej jako takiej, która nie jest większa od zera, ani mniejsza od zera, ani równa zeru¹⁷; jest to więc — jak pisze — coś niemożliwego, jak np. $\sqrt{-1}$. Jeszcze dla osiemnastowiecznych matematyków ilości urojone pozostawały użytecznymi fikcjami nie mającymi samodzielnego sensu. Podjęta przez J. Wallisa próba geometrycznej interpretacji liczb urojonych przez długi czas nie była kontynuowana w sposób zadawalający. Realną interpretację znalazły dopiero w tak zwanym (współcześnie) diagramie Arganda. Każdej liczbie zespolonej możemy przyporządkować punkt na płaszczyźnie. Mianowicie, punkt o współrzędnych (x, y) taki, że x jest częścią rzeczywistą a y częścią urojoną liczby zespolonej. Przyporządkowanie to jest wzajemnie jednoznaczne. Każdemu punktowi na płaszczyźnie możemy zaś przyporządkować parę r i θ : gdzie r jest promieniem o długości $\sqrt{x^2+y^2}$, a θ kątem pomiędzy tym promieniem, a osią x . Przedstawienie to nie jest wzajemnie jednoznaczne. Różne przedstawienia liczby zespolonej jako pary r i θ różnią się o wielokrotność kąta pełnego. Właśnie parę r i θ nazywa się diagramem Arganda. Diagram ten był dyskutowany przez C. Wessela w pracy przedstawionej Akademii duńskiej w 1797 r., a opublikowanej w latach 1798 i 1799. Poświęcona jest mu praca J. R. Arganda *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806). Po dwustu pięćdziesięciu latach termin „liczba urojona” stał się przeżytkiem historycznym. Dla współczesnego autora: „Termin »liczba urojona« nie jest szczęśliwy, bo nasuwa błędne przypuszczenia; używamy go ze względów tradycyjnych”. Jego zdaniem również „jak liczby ujemne nie są »gorsze« od dodatnich, tak liczby urojone i zespolone nie są »gorsze« od liczb rzeczywistych i oddają doskonałe usługi w opisywaniu zjawisk realnych, np. cieplnych, elektrycznych, itd.”¹⁸.

Liczbami zespolonymi powszechnie posługiwano się już od czasów Descartes’a. Właściwe jednak ujęcie teorii liczb zespolonych pochodzi od W. R. Hamiltona (1805—1865) i K. F. Gaussa (1777—1855). Od tego ostatniego pochodzi też termin „liczba zespolona”¹⁹.

W tym kontekście interesujące jest, że geometryczna interpretacja liczb zespolonych satysfakcjonuje matematyków, a nie wszystkich zadawała „łatanie intuicjami geometrycznymi niedostatków w arytmetycznym dowodzie istnienia liczb niewymiernych”²⁰. Możliwość teorii liczb niewymiernych na podstawach arytmetycznych bez jakichkolwiek odwołań do geometrii została wskazana przez Dedekinda w 1858 r. Definicja Dedekinda oparta jest o procedurę, która stanowiła podstawę dla określenia liczb niewymiernych przez matematyków greckich w VI i V w. p.n.e. Dedekind tylko procedurę tę opisuje czysto arytmetycznie. W miejsce rozważania podziału prostej na dwie klasy i wyróżniania w ten sposób dokładnie jednego punktu dzielącego prostą na dwie półproste zawierające te klasy, Dedekind rozważa możliwość podziału wszystkich liczb wymiernych na dwie niepuste klasy takie, że liczba z jednej klasy jest mniejsza niż każda liczba z drugiej klasy. W przypadku dwóch klas liczb wymiernych takich, że jedna z nich zawiera liczby wymierne mniejsze niż $\sqrt{2}$, a druga większe niż $\sqrt{2}$, pierwsza klasa nie zawiera największej liczby wymiernej, a druga najmniejszej liczby wymiernej. Przekrój tych klas wyznacza więc rzeczywistą liczbę niewymierną, mianowicie $\sqrt{2}$ ²¹.

Jakieś pojęcie nicości towarzyszy twórcom rachunku różniczkowego i całkowego. U podstaw geometrii analitycznej Descartes’a legło założenie będące spójne z jego metafizyką, że długość (*res extensa*) jest odpowiednikiem liczby. Jest to przekonanie, na które nie zgodziłby się żaden Grek. Innym założeniem matema-

tyki z pierwszych lat XVII w., o podobnej dla Greków nielogiczności pragmatycznej, było przyjęcie, że linia składa się z nieskończonej liczby punktów, powierzchnia — z nieskończonej liczby linii, a bryła — z nieskończonej liczby powierzchni. To założenie ma swe bezpośrednie źródło w rozważaniach fizykalnych. (Geometria analityczna aż do końca XVII w. nie była powszechnie stosowana w fizyce.) Archimedes określał powierzchnię figury zakreślonej linią krzywą stosując „metodę wyczerpywania”, przybliżał mianowicie powierzchnię wpisanych i opisanych figur o liniach prostych za pomocą przybliżania ich do danej figury przez powiększanie liczby boków. Określając tą metodą powierzchnię eliptyki Kepler wprowadził pojęcie wielkości nieskończenie małej. Zaś Franciszek Bonawentura Cavalieri (1598—1647) wykorzystuje to pojęcie przekształcając metodę Archimedesa w metodę „wielkości niepodzielnych”. Wielkości charakteryzujące dane obiekty mogły być uzyskane przez sumowanie tych „wielkości niepodzielnych”.

Rachunek różniczkowy i całkowity inspirowany jest przez fizykę również u Newtona. Ale za to Leibniz tworzy go biorąc za punkt wyjścia założenia filozoficzne. Najbardziej interesujące jest to, że jego „ideologia” okazała się trafniejsza od Newtonowskiej.

Dla Newtona wielkości nieskończenie małe są wielkościami zmiennymi. Dochodzi do nich poprzez uogólnienie pojęcia drogi oraz prędkości. Pochodna jest granicą stosunku nieskończenie małych zmiennych wielkości. Mówi o „pierwszych stosunkach” rodzących się wielkości i „ostatnich stosunkach” ginących wielkości. Ostatni stosunek to nie stosunek wielkości nieskończenie małych, do których zbieżają wielkości zmienne, lecz granica stosunku tych zmiennych wielkości zmierzających do nieskończenie małych. Newton wskazuje na dwa zadania: znajdowanie fluent (zmiennej) na podstawie fluksji (prędkość zmian fluenty), np. drogi na podstawie prędkości (zadanie całkowania) oraz znajdowanie fluksji na podstawie fluent, np. prędkości momentalnej na podstawie drogi (zadanie różniczkowania). Newton uważa wprowadzone pojęcia matematyczne za uogólnienia kategorii mechanicznych²².

Leibniz sformułował metody rachunku różniczkowego i całkowego niezależnie od Newtona. W istocie nie różnią się one od współczesnych mimo (a może dlatego?), że nie jak u Newtona, który inspirował się fizyką, ich źródłem teoretycznym jest dla Leibniza filozofia.

Leibniz i ci, którzy do niego nawiązywali, podstawowym pojęciem rachunku różniczkowego i całkowego uczynili pojęcie nieskończenie małej. W pracach Leibniza znaleźć można różne rozumienia tego, co nieskończenie małe. To pojęcie, jak i inne pojęcia matematyczne, zmieniało się w ciągu życia Leibniza. Pojęcie nieskończenie małej ostatecznie ukształtowało się jako pojęcie stałej wielkości (a więc inaczej niż u Newtona). Ta stała wielkość była tak mała w porównaniu z wielkościami, do których się ją dodaje, że można było ją przyrównać do zera. W 1702 r. Leibniz pisze do Pierre'a Varignonona: „Czegoś, co jest nieporównywalnie mniejsze, nie ma sensu brać pod uwagę wobec czegoś, co jest nieporównywalnie większe: tak, cząstka płynu magnetycznego, przechodząca przez szkło, jest nieporównywalna z ziarnkiem piasku, ziarnko piasku z kulą ziemską, kula ziemską z wszechświatem”²³.

Leibniz uważał — jest to pogląd powtarzany przezeń w szeregu listów — za celowe wprowadzenie liczb nieskończenie małych i nieskończenie dużych, nie uważał ich jednak za realne, jak liczby rzeczywiste. Chociaż, zgodnie z uznawaną przez siebie uniwersalnością zasady ciągłości, twierdzi, że liczbami tymi rządzą te same prawa, co liczbami rzeczywistymi. Miały to być jakieś liczby idealne bądź fikcyjne, a więc liczby takie, jak liczby urojone w ich ówczesnym rozumieniu. Krytycznie był nastawiony do wiary de l'Hospitala w realność nieskończenie

małych. Z dezaprobatą odnosił się do podzielania tej opinii przez Fontenellę. Jednak silna wiara w realność nieskończenie małych rozprzestrzeniła się po Europie i trwała przez większą część XVIII stulecia²⁴.

Źródłem inspiracji dla stworzenia rachunku różniczkowego i całkowego należy upatrywać u Leibniza w jego koncepcji substancji, w jej dynamistycznym pojmowaniu. Pisze on: „Otóż twierdzą, że ta moc działania znajduje się we wszelkiej substancji i że zawsze rodzi się z niej jakieś działanie; twierdzą nawet, że i substancja cielesna, tak samo jak duchowa, nie ustaje nigdy w działaniu... Okaże się też z naszych medytacji, że substancja stworzona bierze od innej substancji nie samą siłę działania, lecz ograniczenia i determinację istniejącego już w niej uprzednio usiłowania, czyli mocy działania”²⁵. Przyjmuje za oczywiste, że tam, gdzie jest działanie, tam też jest jego podmiot. Rozciągłość nie jest źródłem siły, ale jej przejawem. Zrozumiałe jest więc, że działanie na odległość, co przyjmuje Newton, jest dla Leibniza nie do przyjęcia. Źródłem idei różniczkowania staje się myśl, że każda część materii, niezależnie od tego, jak mała, jest złożonym, aktywnym organizmem — monadą. Różniczkowanie jest analizą bytu, w aspekcie przestrzennym — od punktu do punktu, w aspekcie czasowym — od chwili do chwili. Jest rozważaniem w każdym nieskończenie małym przedziale zdarzeń wpływających z działania siły²⁶.

Na ile filozoficzna myśl Leibniza była istotna dla rachunku różniczkowego i całkowego świadczy rozwój Newtonowskiej fizyki. Newtona pusta przestrzeń, luka pomiędzy oddziaływanymi na siebie ciałami zostaje w trakcie rozwoju fizyki zastąpiona polem sił. Teoria pola jest konsekwencją różniczkowego opisu ruchu i siły. Pojęcie pola grawitacyjnego wprowadzono jako abstrakcję dla ułatwienia obliczania sił grawitacyjnych. Przestrzeń pomiędzy oddziaływanymi na siebie ciałami przestała być pusta, jej miejsce zajęły punkty charakteryzowane przez działającą w nich siłę. Oczywiście, temu, początkowo tylko formalnemu, pojęciu pola w trakcie rozwoju fizyki przypisano sens realny. A jak wiadomo, wspólnie, co zapoczątkowali Einstein i Weyl, fizycy poszukują pola unitarnego, którego teoria byłaby podstawą dla całej fizyki.

Wielkości nieskończone małe uzyskują realistyczną interpretację, a właściwie zostają wyeliminowane z podstaw rachunku różniczkowego i całkowego, w wyniku analizy dokonanej przez Weierstrassa. Jak pisze Hilbert: „Jeżeli dziś w analizie panuje całkowita zgodność i pewność, gdy chodzi o zastosowanie metod dedukcyjnych opartych na pojęciach liczby niewymiernej i granicy i jeśli nawet w najbardziej złożonych kwestiach teorii równań różniczkowych i całkowych, pomimo użycia najbardziej wyrafinowanych i różnorodnych kombinacji różnych rodzajów granic, istnieje jednomyślność co do uzyskanych wyników, to ten szczęśliwy stan rzeczy zawdzięczamy w pierwszym rzędzie pracy naukowej Weierstrassa”²⁷.

Chociaż, jak to pisze Hilbert, z podstaw rachunku nieskończonościowego w wyniku analiz Weierstrassa zostają wyeliminowane wielkości nieskończenie małe i nieskończenie duże przez redukcję zdań o nich do zdań o wielkościach skończonych, to jednak pozostała jeszcze nieskończoność wymagająca analizy: mianowicie tam, gdzie Weierstrass mówi o liczbach rzeczywistych. Gdy mówi się o istnieniu jakiejś liczby rzeczywistej o określonej własności lub gdy mówi się o wszystkich liczbach rzeczywistych o określonej własności, to mówi się o nieskończoności, tyle że w sposób zakamuflowany. To wystąpienie nieskończoności nie jest przez Weierstrassa zredukowane do skończonego. Należy tego, zdaniem Hilberta, dokonać w sposób wskazany przez Weierstrassa. „Tak, jak w procedurach z użyciem granic w rachunku nieskończonościowym nieskończenie małe okazało się być jedynie figurą retoryczną, tak też musimy wykazać, że iluzją jest również nieskończoność w sensie

nieskończonej całości, którą wciąż odnajdujemy w stosowanych metodach dedukcyjnych”²⁸.

Propozycja Hilberta eliminacji wszelkiej nieskończoności sprowadza się do programu redukcji matematyki do semiotyki²⁹. Teoria matematyczna przedstawiana jest w języku, który jest skończonym zbiorem napisów. Relacje między obiektami matematycznymi należy zanalizować jako relacje między skończonymi napisami, które do tych obiektów się odnoszą. Oczywiście, w tej sytuacji świat obiektów matematycznych staje się w istocie zbyteczny. Analizie należy poddać teorię, w szczególności dowód jako pewien skończony obiekt przestrzenny — w przestrzeni rozmieszczone napisy. Takie postawienie sprawy zaowocowało nowym ważnym działem — metamatematyką, nie okazało się jednak realizowalne (w sensie programu redukcji matematyki do semiotyki). To, co aktualnie nieskończone, a więc fikcyjne i pozbawione samodzielnego sensu, nie dało się zredukować do tego, co skończone i treściowe. Jeżeli nieskończoność jest tylko użyteczną fikcją, a sensowność uzyskuje poprzez redukowalność do tego, co skończone, to czy nie można mówić, że pojęcie niebytu jest siłą napędową matematyki skoro ma nią być — np. zdaniem Weyla — przeciwstawność skończonego i nieskończonego, a nawet więcej, to nieskończoność ma być przedmiotem matematyki? Matematyce nieskończoność jest potrzebna. Czym bowiem byłaby teoria zbiorów, a więc i cała matematyka, bez aksjomatu istnienia zbiorów nieskończonych?

Pomiędzy programem redukcji pojęć teoretycznych do pojęć obserwacyjnych w naukach przyrodniczych, a programem redukcji tego, co nieskończone do tego, co skończone i treściowe istnieje pewna analogia. Program redukcji pojęć teoretycznych do obserwacyjnych nie został zrealizowany. Naukom przyrodniczym są potrzebne pojęcia teoretyczne, nawet te, które nie są redukowalne do pojęć obserwacyjnych. Matematyka nie może obejść się bez nieskończoności, nawet tej, której nie daje się zredukować do tego, co skończone. Niewątpliwie należy w matematyce ograniczać zakres fikcji, zabezpiecza to w szczególności przed sprzecznością. Warto, jak sądzę, postępować zgodnie z zaleceniem Weyla: „Należy stworzyć naprawdę realistyczną matematykę, zgodnie z fizyką, jako gałąź teoretycznej konstrukcji jednego świata rzeczywistego. Powinna ona przyjąć ten sam trzeźwy i ostrożny stosunek do hipotetycznych rozszerzeń swych podstaw, co fizyka”³⁰. Oczywiście, jak fizyka zawiera pojęcia teoretyczne nieredukowalne do pojęć obserwacyjnych, tak taka matematyka zawierać będzie nieskończoność nieredukowalną do tego, co skończone i treściowe. Podobnie jak fizyk, który traktuje korelaty semantyczne pojęć teoretycznych jako obiekty realne, tak matematyk może przypisywać realne istnienie temu, do czego odnoszą się pojęcia, czy raczej znaki graficzne. Obiekty matematyczne istnieją w sensie, jaki ma na uwadze Quine, gdy mówi, że istnieć to znaczy być wartością zmiennej³¹. Obiekty te są w tym samym sensie konieczne dla systemu matematycznego, w jakim dla fizyki konieczne jest istnienie obiektów fizycznych dla uzyskania zadawalającej teorii danych empirycznych³².

Sądzę, że jasność w sprawie istnienia obiektów matematycznych osiągniemy odróżniając za R. Carnapem pomiędzy wewnętrznym i zewnętrznym problemem istnienia. W pierwszym przypadku jest to pytanie o istnienie obiektu postawione wewnątrz systemu i w jego języku. W drugim przypadku jest to zaś pytanie o istnienie systemu obiektów jako całości³³. Być rzeczywistym w sensie naukowym, jego zdaniem, znaczy tyle, co być elementem systemu. W przypadku obiektów matematycznych znaczy to, że na pytanie o istnienie takiego bądź innego obiektu w ramach systemu odpowiada matematyk stosując właściwe dla matematyki środki (w poglądach na to, które środki są właściwe matematycy różnią się). Pytanie

zewnętrzne jest pytaniem filozofa. Oczywiście, dla filozofa odpowiedź, że istnieje to być wartością zmiennej, nie jest satysfakcjonująca. Odpowiedź i jej uzasadnienie zadawające wewnątrz systemu nie musi być zaakceptowana jako odpowiedź na pytanie zewnętrzne, filozoficzne. Odpowiedź na pytanie zewnętrzne może być bez znaczenia dla matematyki i w tym sensie można mówić, że takie pytanie, jak i odpowiedź na nie, pozbawione są naukowego sensu. Chociaż matematycy będą różnić się w kwestii odpowiedzi na pytanie o status ontyczny takiego bądź innego pojęcia, to nie muszą różnić się w kwestii uznania twierdzeń, w których pojęcie to występuje. R. Sikorski w monografii *Funkcje rzeczywiste* o ∞ i $-\infty$ pisze jako o liczbach nieskończonych³⁴. K. Kuratowski zaś w *Rachunku różniczkowym i całkowym* deklaruje, że „symbolowi $p/0$ nie przypisujemy żadnej wartości liczbowej. Symbol ∞ , którego często używać będziemy, nie oznacza więc żadnej liczby (»nieskończonej«)”³⁵. Obaj autorzy nie różnią się jednak, gdy chodzi o uznanie twierdzeń, w których symbol „ ∞ ” występuje. Nie będą się więc różnić w sprawie tego, co określamy jako wewnętrzny problem istnienia. Za Descartesem można by więc mówić o rzeczach matematycznych, że „nie można powiedzieć, że są niczym, chociaż może nie istnieją nigdzie poza mną”³⁶. Przy czym zwrot „istnienie we mnie” należałoby interpretować jako istnienie w sensie istnienia wewnętrznego, w systemie.

Tu pokazaliśmy, że *matematyka rozwijała się poprzez przypisywanie istnienia (w sensie wewnętrznym) temu, czego istnienie (w sensie zewnętrznym) było negowane*. W wyniku historycznego procesu zanikła świadomość niemożliwości (niebytu) czegoś, co kiedyś za takie uchodziło. E. Schröder na oznaczenie niemożliwego jeszcze bierze ∞ (stawiając pod znakiem zapytania, czy jest to liczba, czy symbol) ponieważ, jak pisze, „pierwotna niemożliwość innych symboli, jak $-i$, $i = \sqrt{-1}$, etc. została, jak wiadomo, unieważniona poprzez rozszerzenie dziedziny liczb”³⁷.

Spór wśród matematyków o metodę matematyczną, czy ma to być metoda matematyki klasycznej, czy intuicjonistycznej, bądź też jakaś inna forma konstruktywizmu i związana z tym sporem odpowiedź na pytanie o to, czy dany obiekt matematyczny (korelat semantyczny pojęcia) istnieje, są sporem w ramach tego, co określamy jako wewnętrzny problem istnienia. Odpowiedź na to pytanie nie rozstrzyga jednak problemu istnienia przedmiotu matematyki. Każda ze stron w tym sporze jest w istocie w stanie zaakceptować konkretne rozstrzygnięcia drugiej stwierdzając: przy tak określonych założeniach jest tak właśnie. Intuicjoniści, w szczególności Brouwer, odrzucali metody formalne na rzecz twórczej intuicji. Sformalizowany intuicjonizm w postaci logiki intuicjonistycznej został jednak zaakceptowany i dziś nie kierując się żadną twórczą intuicją każdy matematyk w sposób czysto formalny rozstrzyga, czy dane twierdzenie jest, czy nie jest twierdzeniem intuicjonistycznym.

Pytaniem, na które odpowiedź nie daje się sprowadzić do stwierdzenia, że przy tak a tak określonych założeniach właśnie tak a tak, jest pytanie o istnienie w sensie zewnętrznym. Jest to pytanie filozoficzne. W powyższych rozważaniach zaś okazało się, że na to pytanie w odniesieniu do przedmiotu matematyki twórcza okazywała się odpowiedź, że istnieje, choć z innego punktu widzenia była to nicłość. *Filozofia ukazuje się tutaj znowu jako fundament nauki*. I, jak sądzę, właśnie na terenie filozofii można szukać odpowiedzi na wciąż aktualne pytanie, która z teorii mnogości jest „prawdziwa”. A ponieważ odpowiedzi filozoficzne nie są nigdy do końca jednoznaczne, więc nie należy oczekiwać rozstrzygającej odpowiedzi, ile sprecyzowania i uświadomienia stanowisk.

PRZYPISY

¹ Arystoteles, *O Melissosie, Ksenofaniesie i Gorgiaszu*, (w:) *Pisma różne*. Warszawa 1978, str. 416. Jest to dziełko nieautentyczne.

² Por. Quine W. V., *On what there is* (w:) *Philosophy of Mathematics*, wyd. P. Benacerraf i H. Putnam, Oxford 1964, str. 183.

³ Por. np. Woleński J., *Filozoficzna szkoła lwowsko-warszawska*, Warszawa 1985, str. 46—47.

⁴ Słów: „zero”, „jedyńka”, itd. będziemy używać na oznaczenie znaków graficznych — cyfr. Zaś cyfr: 0, 1 itd. — w im właściwym znaczeniu, czyli na oznaczenie liczb. A więc zero to to samo, co „0”; gdzie cudzysłów pełni funkcję wskazywania użycia w supozycji materialnej znajdującego się w nim wyrażenia. Od zasady tej odstępujemy w kontekstach, w których logicznie dopuszczalna jest tylko jedna interpretacja użycia odpowiednich wyrażen.

⁵ Zob. Wolff Chr., *Mathematisches Lexicon*, Hildesheim 1965, str. 1486.

⁶ Por. Van der Waerden, *Algebra*, Moskwa 1979, str. 20.

⁷ Kuratowski K., Mostowski A., *Teoria mnogości*, Warszawa 1978, str. 101.

⁸ Zob. Gödel K., *Russell's Mathematical Logic*, (w:) *Philosophy of Mathematics*, wyd. P. Benacerraf i H. Putnam, Oxford 1964, str. 214.

⁹ Zob. np. Kuratowski K., Mostowski A., *Teoria mnogości*, Warszawa 1978, str. 65.

¹⁰ Zob. Gödel K., *Russell's Mathematical Logic...*, str. 223.

¹¹ Descartes R., *Medytacje o pierwszej filozofii*, Warszawa 1958, t. I., str. 194.

¹² Por. Klein F., *Vergleichende Betrachtungen über neure geometrische Forschungen*, „*Mathematische Annalen*” t. 43, str. 63—100. Np. pisze: „(...) zaś przez nawiązanie do znanych przedstawień przestrzennych objaśnianie staje się prostsze i bardziej zrozumiałe. Gdy wyjdziemy od rozważania przedmiotu geometrycznego i ze względu na niego jako przykład rozwiniemy myśl ogólną, to pójdziemy drogą, którą nauka obrała w swoim rozwoju i którą zwykle jest najkorzystniej wziąć za podstawę wykładu” (str. 65). Bardziej szczegółowo omawia interesującą nas kwestię w dołączonej do artykułu nocie pt. *Ueber den Werth räumlicher Anschauung* (str. 94).

¹³ Np. Carnap R., *Empiricism, Semantics, and Ontology*, (w:) *Philosophy of Mathematics*, wyd. P. Benacerraf i H. Putnam, Oxford 1964, str. 240 pisze: „Na przykład, wybór liczb rzeczywistych raczej niż wymiernych lub całkowitych jako współrzędnych nie tyle jest spowodowany przez fakty doświadczenia, ile głównie względem na matematyczną prostotę. Ograniczenie do współrzędnych wymiernych nie byłoby sprzeczne z jakąkolwiek naszą wiedzą empiryczną, a to dlatego, że wynikiem dowolnego pomiaru jest liczba wymierna. Jednakowoż stałoby to na przeszkodzie w zastosowaniu zwykłej geometrii, która głosi, np., że przekątna kwadratu o boku 1 ma wartość niewymierną $\sqrt{2}$, w ten sposób prowadziłoby to do wielkiej komplikacji”.

¹⁴ Arystoteles, *O odcinkach niepodzielnych*, (w:) *Pisma różne*, Warszawa 1978, str. 358. Jest to dziełko nieautentyczne.

¹⁵ Ingarden R., *Spór o istnienie świata*, t. III, Warszawa 1981, str. 58.

¹⁶ N. Goodmann nie ma nic przeciwko zbiorom, on tylko nie może pojąć co znaczy „zbiór czegoś” (*set of*). Nominalizm nie głosi wykluczenia bytów abstrakcyjnych. To, co jest przyjmowane za byt winno być traktowane jako indywiduum, czyli być wartością zmienną najniższego w systemie typu. Por. Goodmann N., *A World of Individuals*, (w:) *Philosophy of Mathematics*, wyd. Benacerraf i Putnam H., Oxford 1964, str. 197—210. Por. także wypowiedź Bergmanna: „Język idealny zawiera tylko zmienne jednego rodzaju”. Bergmann G., *Meaning and Existence*, The University of Wisconsin Press, Madison 1960, str. 94.

¹⁷ Zob. Euler L., *Opera omnia, series I, Opera mathematica*, t. VI. Leipzig-Berlin 1921, str. 79.

¹⁸ Leja F., *Funkcje zespolone*. Warszawa 1967, str. 7.

¹⁹ Por. Gauss F. K., *Werke* t. II. 1831, str. 102.

²⁰ Whittaker E. T., Watson G. N., *Kurs analizy współczesnej*, Warszawa 1967, str. 8.

²¹ Teoria ta była opublikowana w: Dedekind R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Brunswick 1872. R. Ingarden odrzuca intuicyjność metody Dedekinda. Jego zdaniem: „Realizacja ruchu przemawia najlepiej przeciw niedostateczności zwykłej matematycznej aparatury pojęciowej”. Wbrew temu, co twierdzą dzisiejsi matematycy, że

„jedynie nieznanomość całej owej teorii matematycznej związanej z zagadnieniem *continuum* doprowadziła Zenona do jego paradoksów”. Ingarden twierdzi, że „w gruncie rzeczy Zenon miał rację, iż za pomocą metody połowienia, resp. sumowania granica nie jest osiągalna”. Ingarden R., *Spór o istnienie świata* t. III. Warszawa 1981, str. 54.

²² Pojęcia „pierwsze stosunki” i „ostatnie stosunki” występują w „*Rozważaniach o kwadraturze krzywych*” (1704) oraz w „*Philosophie naturalis principia mathematica*” (1687).

²³ Cyt. za Kuzniecowa B., *Historia filozofii dla fizyków i matematyków*. Warszawa 1980, str. 292.

²⁴ Do koncepcji Leibniza bezpośrednio nawiązuje twórca analizy niestandardowej A. Robinson. Por. jego: *Non-standard analysis*, „Proc. Roy. Acad.” Amsterdam Ser. A, 1961, 64, str. 432—440; oraz: *Non-Standard Analysis*. Revised edition. Amsterdam 1974.

²⁵ Leibniz G. W., *Poprawa filozofii pierwszej i pojęcie substancji*, „Studia Filozoficzne” nr 3 (244), 1986, str. 150—151.

²⁶ Por. np. Kuzniecowa B., *Historia filozofii dla fizyków i matematyków*, Warszawa 1980, str. 290.

²⁷ Hilbert D., *On the infinite*, (w:) *Philosophy of Mathematics*, wyd. P. Benacerraf i H. Putnam, Oxford 1964, str. 134.

²⁸ Hilbert D., *ibidem*, str. 135.

²⁹ Problem ten szerzej omówiłem w: *Spór o naturę nieskończoności w metamatematyce*, (w:) Czarnawska M., Kopania J. (red.) „Idea. Studia nad strukturą i rozwojem pojęć filozoficznych”, t. I, Białystok 1986.

³⁰ Weyl H., *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*. Princeton 1949, str. 235.

³¹ Por. Quine W. V., *On what there is*, (w:) *Philosophy of Mathematics...*, str. 183—196.

³² Por. Gödel K., *Russell's mathematical logic*, (w:) *Philosophy of Mathematics...*, str. 220.

³³ Por. Carnap R., *Empiricism, Semantics, and Ontology*, (w:) *Philosophy of Mathematics...*, str. 233—248.

³⁴ Zob. Sikorski R., *Funkcje rzeczywiste*, Warszawa 1958, str. 25.

³⁵ Kuratowski K., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa 1964, str. 7.

³⁶ Descartes R., *Medytacje o pierwszej filozofii*, Warszawa 1958, t. I, str. 85.

³⁷ Schröder E., *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Leipzig 1890, t. I (Gekurzter Nachdruck der. 4. Vorlesung, § 9, Konsequenzen der Adjungierung einer Nullklasse, str. 245—248), str. 247.