mgr Justyna Makowska
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet w Białymstoku

Dyskretne operatory przesunięcia z wagą

Streszczenie

Rozważamy dyskretne operatory przesunięcia z wagą B w przestrzeni $l^2(\mathbb{Z})$. Opisujemy oszacowanie norm z dołu i z góry operatorów odwrotnych do $B-\lambda I$ w zależności od położenia λ w stosunku do widma $\Sigma(B)$. Analiza rodziny operatorów przesunięcia z wagą B_N zależnych od od N uzyskując warunek na ich ograniczoność bądź jej brak.

1 Wprowadzenie

Niech $l^2(\mathbb{Z})$ będzie przestrzenią ciągów $u=(u(k))_{k\in\mathbb{Z}},\ u(k)\in\mathbb{C}$, z normą

$$\|u\|=(\sum_k |u(k)|^2)^{1/2},$$

a $l^\infty(\mathbb{Z})$ przestrzenią ciągów ograniczonych. Operatorem przesunięcia w przestrzeni $l^2(\mathbb{Z})$ nazywamy operator postaci

$$(Wu)(k)=u(k+1),$$

natomiast operatorem przesunięcia z wagą w przestrzeni $l^2(\mathbb{Z})$ nazywamy operator postaci

$$(Bu)(k)=a(k)u(k+1)=a(k)Wu(k), \tag{1}$$

gdzie $a\in l^\infty(\mathbb{Z})$.

W ogólnej sytuacji operatorem przesunięcia z wagą nazywamy liniowy ograniczony operator B określony w przestrzeni funkcji zadanych na X, który da się przedstawić w postaci

$$Bu(x)=a(x)u(\alpha(x))=a(x)T_\alpha u(x),\quad x\in X, \tag{2}$$

gdzie $\alpha: X\to X$ jest danym odwzorowaniem, a funkcją określoną na zbiorze X.

Operatory (2), algebry operatorowe nimi generowane i powiązane z nimi równania funkcyjne były badane przez wielu autorów w różnych przestrzeniach funkcyjnych, jako niezależne obiekty i w relacji z różnymi zastosowaniami (np. teoria układów dynamicznych, całkowo-funkcjonalnych, różnicowo-funkcjonalnych, funkcjonalnych równaniach, automorfizm i endomorfizm algebr Banacha i ogólna teoria algebr operatorowych, itd.)

Opis widma operatora B określa warunki przy których operator $B-\lambda I$ nie jest odwracalny, ale oprócz odwracalności interesujące, ze względu na zastosowania, jest też badanie takich własności jak domkniętość obrazu, wymiar jądra i jednostronna odwracalność operatora $B-\lambda I$ dla $\lambda\in\Sigma(B)$. Takie badania dla pewnych odwzorowań α pojawiły sie np. w [8], [6], [7], [4].

W poniższym artykule zajmiemy sie oszacowaniem norm z góry i z dołu operatorów odwrotnych do operatora $B-\lambda I$, dla $\lambda\notin\Sigma(B)$ oraz przytoczymy wyniki dotyczące oszacowania norm z dołu i z góry operatorów prawych odwrotnych do $B-\lambda I$, dla $\lambda\in\Sigma(B)$. Wykorzystując wcześniejsze obliczenia oszacujemy normy operatorów odwrotnych w przypadku rodziny operatorów przesunięcia z wagą $B_N=a_NW$, wyciągając wniosek odnośnie ich ograniczoności lub nieograniczoności normy operatorów prawych odwrotnych do B_N-I w zależności od wartości funkcji a_N.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

2 Widmo operatora

Opis widma operatora przesunięcia z wagą B otrzymano w klasycznych przestrzeniach. Poniżej przytoczymy wyniki bazując na pracach [1],[2].

Twierdzenie 2.1. *Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną, $\alpha : X \to X$ ciągłym, odwracalnym, mierzalnym i zachowującym miarę μ odwzorowaniem oraz $a \in C(X)$. Promień spektralny operatora B postaci (2) w przestrzeni $L^2(X,\mu)$ wyraża się wzorem*

$$R(B) = \max_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(a),$$

gdzie $M_\alpha(X)$ to zbiór wszystkich miar α-niezmienniczych i ergodycznych na X, a

$$S_\nu(a) = \exp\left(\int_X \ln(|a(x)|)\, d\nu\right).$$

Jeżeli X jest α-spójną przestrzenią topologiczną a zbiór punktów nieokresowych odwzorowania α jest gęsty w X i $\forall_{x\in X}\ a(x) \neq 0$ to widmo operatora $B = aT_\alpha$ będzie pierścieniem

$$\Sigma(B) = \{\lambda : \ r(B) \leqslant |\lambda| \leqslant R(B)\}, \tag{3}$$

gdzie

$$r(B) = \min_{\nu \in M_\alpha(X)} S_\nu(a).$$

Aby móc zająć się operatorami $B - \lambda I$, gdzie λ zależy od położenia względem widma operatora B, musimy uzwarcić przestrzeń $\mathbb{Z}$.

2.1 Operatory na zwartej przestrzeni

Zbiór $\mathbb{Z}$ nie jest zwartą przestrzenią, dlatego aby móc skorzystać z twierdzenia 2.1 dla operatora dyskretnego (1) należy dokonać następującego uzwarcenia.

Niech A będzie C^*-podalgebrą algebry $l^\infty(\mathbb{Z})$, niezmienniczą względem wagi a. Przestrzeń X maksymalnych ideałów algebry A będzie zwartą przestrzenią topologiczną, a algebra A (z twierdzenia Gelfanda-Najmarka) jest izomorficzna algebrze $C(X)$. Przy wspomnianym izomorfiźmie, funkcji $a \in A$ odpowiada ciągła funkcja na X którą nazywamy transformatą Gelfanda dla a, oznaczamy ją przez $\widehat{a}$. Natomiast dla odwzorowania $\alpha_0(k) = k + 1$ istnieje przedłużenie na X: homeomorfizm $\alpha : X \to X$, który na $\mathbb{Z} \subset X$ określony jest tak jak α_0.

Na przestrzeni X zadajemy miarę μ, tak aby

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}}\ \mu(k) = 1 \quad \text{oraz} \quad \mu(X \setminus \mathbb{Z}) = 0.$$

Wówczas $l^2(\mathbb{Z}) = L^2(X,\mu)$ oraz dla $a \in \mathbb{A}$ operator (1) może być zapisany w postaci (2) a odwzorowanie α spełnia warunki z twierdzenia 2.1. Zatem to twierdzenie może być zastosowane do dyskretnego operatora przesunięcia z wagą. Poszukiwanie widma sprowadza się do poszukiwania zbioru $M_\alpha(X)$.
My rozpatrujemy przypadek algebry A (oznaczmy go przez A_0), której elementami są funkcje dla których istnieją granice

$$\lim_{k\to+\infty} a(k) := a(+\infty) \neq 0, \quad \lim_{k\to-\infty} a(k) := a(-\infty) \neq 0. \tag{4}$$

Wówczas $X = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ to przestrzeń zwarta. Transformata Gelfanda $\widehat{a} \in C(X)$ ma postać

$$\widehat{a}(k) = \begin{cases} a(k), & \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}, \\ a(\pm\infty), & \text{dla} \quad k = \pm\infty, \end{cases} \tag{5}$$

a przedłużenie odwzorowania α_0 to odwzorowanie $\alpha : X \to X$ postaci:

$$\alpha(k) = \begin{cases} k+1, & \text{dla} \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \pm\infty, & \text{dla} \quad k = \pm\infty. \end{cases} \tag{6}$$

Mamy zatem zdefiniowany operator przesunięcia z wagą $Bu(k) = \widehat{a}(k)u(\alpha(k))$ na zbiorze zwartym X. Odwzorowanie α postaci (6) jest odwzorowaniem typu Morse'a - Smale'a[1], gdyż zbiór punktów stałych jest skończony $Fix(\alpha) = \{+\infty, -\infty\}$ oraz punkt $-\infty$ jest punktem odpychającym[2] a punkt $+\infty$ jest punktem przyciągającym[3]. Z [7] wiemy, że widmo operatora B gdy $a \in A_0$ to zbiór

$$\Sigma(B) = \{\lambda : r(B) \leqslant |\lambda| \leqslant R(B)\},$$

gdzie

$$R(B) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}, \quad r(B) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}. \tag{7}$$

Operator $B - \lambda I$ jest odwracalny, gdy $\lambda \notin \Sigma(B)$. Natomiast dla $\lambda \in \Sigma(B)$ operator $B - \lambda I$ nie jest odwracalny, ale wówczas pojawiają sie pytania o jego własności takie jak domkniętość obrazu, wymiar jądra czy jednostronna odwracalność. W analizowanej sytuacji dyskretnego operatora przesuniecia z wagą B generowanego odwzorowaniem α typu Morse'a-Smale'a otrzymaliśmy następujący wynik,[4]:

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli $a \in A_0$ to $\Sigma(B)$ jest postaci (7). Jeżeli*

$$|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|,$$

to operator $B - \lambda I$ jest lewostronnie odwracalny, natomiast jeżeli

$$|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$$

to operator $B - \lambda I$ jest prawostronnie odwracalny. W przypadku gdy

$$|\lambda| = |a(\pm\infty)|$$

to obraz $Im(B - \lambda I)$ jest zbiorem niedomkniętym.

3 Oszacowanie norm

Mając postać widma operatora B oszacujemy normy operatorów odwrotnych w zależności od położenia λ względem widma $\Sigma(B)$.

[1] Odwzorowanie jest typu Morse'a-Smale'a $\Leftrightarrow$ zbiór punktów stałych jest skończony i trajektoria dowolnego punktu zbiega do punktu stałego.

[2] $\forall_{x \in X} \lim\limits_{n \to \infty} \alpha^{-n}(x) = -\infty$

[3] $\forall_{x \in X} \lim\limits_{n \to \infty} \alpha^{n}(x) = +\infty$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

3.1 Operator odwrotny

Oszacujmy normę operatora odwrotnego do $B - \lambda I$, zatem $\lambda \notin \Sigma(B)$.

Warunek $\lambda \notin \Sigma(aW)$ ma miejsce w dwóch przypadkach, gdy $|\lambda| > R(B)$ lub $|\lambda| < r(B)$. W każdym z tych przypadków znajdziemy postać operatora odwrotnego i oszacujmy jego normę z góry i z dołu.

Rozważmy sytuację, gdy $|\lambda| > R(B) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}$. Niech $|a(-\infty)| < |a(+\infty)|$. Określmy stałą M_1 taką, że

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)| \leqslant M_1 \quad \text{oraz} \quad \frac{M_1}{|\lambda|} > 1. \tag{8}$$

Stałą $t_1 \in (0,1)$ wybierzemy tak, aby

$$\frac{|a(+\infty)|}{|\lambda|} \leqslant t_1 < 1, \quad \frac{|a(-\infty)|}{|\lambda|} \leqslant t_1 < 1, \tag{9}$$

a wartości k_1^+, k_1^-, takie że

$$\frac{|a(k)|}{|\lambda|} < t_1 < 1 \text{ jeśl} \qquad {}_1, \qquad \frac{|a(k)|}{|\lambda|} < t_1 < 1 \text{ jeśłı } k \leqslant k_1^-. \tag{10}$$

Wówczas liczba ν_1 ma następującą wartość:

$$\nu_1 = card\{k : \frac{|a(k)|}{|\lambda|} > t_1\}^4. \tag{11}$$

Oszacownie z góry normy operatora odwrotnego w sytuacji gdy $|\lambda| > R(B)$ zależy nie tylko od wartości $|a(+\infty)|, |a(-\infty)|$ ale też od zdefiniowanych powyżej wartości M_1, t_1, $k_1^\pm$ i ν_1.

Twierdzenie 3.1. *Niech $|\lambda| > R(B)$. Operator odwrotny do $B - \lambda I$ jest postaci*

$$(B - \lambda I)^{-1} = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^{j+1}}\right) (aW)^j. \tag{12}$$

Mamy następujace oszacowania normy odwrotnego:

$$\left\|(B - \lambda I)^{-1}\right\| \geqslant \sup_j \frac{1}{|\lambda|^{j+1}} \sup_k \prod_{i=0}^{j-1} |a(k+i)|, \tag{13}$$

oraz

$$\left\|(B - \lambda I)^{-1}\right\| \leqslant \left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{\nu_1} \left(\frac{1}{M_1 - |\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|(1-t_1)}\right). \tag{14}$$

Dowód. Zauważmy, że dla $B = aW$

$$((aW)^j u)(k) = a(k)a(k+1)\dots a(k+j-1)u(k+j)$$

ponadto

$$\|aW\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|,$$

[4] Oznaczmy przez „$card(A)$" moc zbioru A.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

zatem

$$\left\|(aW)^j\right\| = \sup_{k\in Z}\prod_{i=0}^{j-1}|a(k+i)|.$$

Skoro $R(B) < |\lambda|$, czyli $\frac{R(B)}{|\lambda|} < 1$ wówczas operator $(aW-\lambda I)^{-1}$ jest postaci:

$$(aW-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{aW}{\lambda}\right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j. \tag{15}$$

Oszacujmy z dołu normę operatora $(aW-\lambda I)^{-1}$ postaci (15). Zauważmy, że dla dowolnego j_0 istnieje k_0, takie że

$$\left|\prod_{i=0}^{j_0-1}a([k_0-j_0]+i)\right| \geqslant \sup_k\left|\prod_{i=0}^{j_0-1}a([k-j_0]+i)\right| - \varepsilon = \left\|(aW)^{j_0}\right\| - \varepsilon. \tag{16}$$

Niech $u_0 = (0,\ldots,0,\underbrace{1}_{k_0},0,\ldots)$ wówczas

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j\right\|^2 &= \sup_{\|u\|\leqslant 1}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j u\right\|^2 \geqslant \left\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j u_0\right\|^2 = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{\prod_{i=0}^{j-1}a([k_0-j]+i)}{\lambda^j}\right|^2 \geqslant \left|\frac{\prod_{i=0}^{j_0-1}a([k_0-j_0]+i)}{\lambda^{j_0}}\right|^2 \geqslant \\ &\geqslant \left\|\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^{j_0}\right\|^2 - \varepsilon. \end{aligned}\tag{17}$$

Czyli

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j\right\| \geqslant \left\|\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j\right\| \quad \forall_j,$$

a zatem

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j\right\| \geqslant \sup_{j\geqslant 0}\left\|\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^j\right\| = \sup_j\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\prod_{i=0}^{j-1}|a(k+i)|}{|\lambda|^j}.$$

Uwzględniając zależności (8), (9), (10), (11) mamy

$$\sup_k\prod_{i=0}^{j-1}\frac{|a(k+i)|}{|\lambda|} \leqslant \left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^j, \quad \text{jeśli} \quad j\leqslant \nu_1; \tag{18}$$

$$\sup_k\prod_{i=0}^{j-1}\frac{|a(k+i)|}{|\lambda|} \leqslant \left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)_1^{\nu}(t_1)^{j-\nu_1}, \quad \text{jeśli} \quad j>\nu_1. \tag{19}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Wówczas

$$\begin{aligned}
\left\|(aW-\lambda I)^{-1}\right\| &= \left\|-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^{j}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sum_{j=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{aW}{\lambda}\right)^{j}\right\| \\
&\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left[\sum_{j=0}^{\nu_1-1}\left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{j}+\sum_{j=\nu_1}^{\infty}\left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{\nu_1}t_1^{j-\nu_1}\right]= \\
&= \frac{1}{|\lambda|}\left[\frac{\left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{\nu_1}-1}{\frac{M_1}{|\lambda|}-1}+\left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{\nu_1}\frac{1}{1-t_1}\right] \\
&= \left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{\nu_1}\left(\frac{1}{M_1-|\lambda|}+\frac{1}{|\lambda|(1-t_1)}\right)\leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{k_1^+-k_1^-}\left(\frac{1}{M_1-|\lambda|}+\frac{1}{|\lambda|(1-t_1)}\right). \qquad (20)
\end{aligned}$$

Oszacowanie górne normy operatora odwrotnego zależy od różnicy liczb k_1^+ i k_1^-, a dokładniej od wprowadzonej liczby ν_1. □

Analogicznie rozważamy przypadek drugi, gdy

$$|\lambda| < r(B) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}.$$

Niech $|a(-\infty)| < |a(+\infty)|$. Określmy stałą M_2 taką, że

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|a(k)|}\leqslant M_2 \quad \text{oraz} \quad M_2|\lambda|>1. \qquad (21)$$

Stałą $t_2 \in (0,1)$ wybierzmy tak, aby

$$\frac{|\lambda|}{|a(+\infty)|}\leqslant t_2<1, \qquad \frac{|\lambda|}{|a(-\infty)|}\leqslant t_2<1; \qquad (22)$$

a wartości k_2^+, k_2^-, takie że

$$\frac{|\lambda|}{|a(k)|}<t_2<1 \text{ jeśli } k\geqslant k_2^+, \qquad \frac{|\lambda|}{|a(k)|}<t_2<1 \text{ jeśli } k\leqslant k_2^-. \qquad (23)$$

Wówczas liczba ν_2 ma następującą wartość

$$\nu_2 = card\{k : \frac{|\lambda|}{|a(k)|}>t_2\}. \qquad (24)$$

Twierdzenie 3.2. *Niech $|\lambda| < r(B)$. Operator odwrotny do $B-\lambda I$ jest postaci*

$$(B-\lambda I)^{-1}=\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda)^{j-1}(aW)^{-j}. \qquad (25)$$

Mamy następujące oszacowania norm odwrotnego:

$$\left\|(B-\lambda I)^{-1}\right\| \geqslant \sup_j |\lambda|^{j-1}\sup_k\prod_{i=1}^{j}\frac{1}{|a(k-i)|}, \qquad (26)$$

oraz

$$\left\|(aW-\lambda I)^{-1}\right\|\leqslant(|\lambda|M_2)^{\nu_2}\frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{1}{|\lambda|M_2-1}+\frac{1}{1-t_2}\right). \qquad (27)$$

Reasumując, w przypadku gdy $\lambda\notin\Sigma(aW)$, oszacowanie z góry normy operatora odwrotnego do operatora $aW-\lambda I$ zależy od wartości ν_1, M_1, t_1 lub ν_2, M_2, t_2.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

3.2 Operator jednostronnie odwracalny

Przytoczymy wyniki dotyczące oszacowania normy operatora prawostronnie odwracalnego do operatora $B - \lambda I$, czyli przypadek $\lambda \in \Sigma(B)$. Wówczas operator $aW - \lambda I$ nie jest odwracalny, ale może być jednostronnie odwracalny lub może mieć obraz niedomknięty.
Niech

$$a(k) \neq 0 \;\; \forall_{k\in\mathbb{Z}} \;\text{ oraz }\; \lim_{k\to\pm\infty} a(k) = a(\pm\infty) \neq 0.$$

W sytuacji, gdy $a(+\infty) = a(-\infty)$, widmo operatora $B = aW$ to okrąg

$$\Sigma(aW) = \{\lambda : \; |\lambda| = |a(\infty)|\}.$$

Wówczas operator $B - \lambda I$ dla każdego $\lambda \in \Sigma(aW)$ ma niedomknięty obraz. Jeżeli $|a(+\infty)| \neq |a(-\infty)|$ i $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$ to operator $B - \lambda I$ jest prawostronnie odwracalny. Z [4] otrzymaliśmy następujące oszacowanie z góry i z dołu operatora prawostronnie odwracalnego.
Niech $q \in \mathbb{Z}$, P_q^+ będzie operatorem rzutu na podprzestrzeń

$$H_q = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : \; u(k) = 0, \text{ dla k < q}\}$$

a P_q^- będzie operatorem rzutu postaci $P_q^- = I - P_q^+$. Niech M_1, M_2 zdefiniowanych w (8), (21), a wartości $t_1, t_2 \in (0,1)$ wybrane tak aby

$$\frac{|\lambda|}{|a(+\infty)|} < t_1 < 1, \qquad \frac{|a(-\infty)|}{|\lambda|} < t_2 < 1. \tag{28}$$

Ponadto określmy jeszcze wartości $k^{\pm}$, takie że

$$\frac{|\lambda|}{|a(k)|} < t_1 < 1 \;\text{ jeśli }\; k \geqslant k^+, \qquad \frac{|a(k)|}{|\lambda|} < t_2 < 1 \;\text{ jeśli }\; k \leqslant k^-, \tag{29}$$

oraz dla $q \in \mathbb{Z}$ liczby

$$\nu^+(q) = \nu^+(q;t) = card\{k : \; k \geqslant q \;\wedge\; \frac{|\lambda|}{|a(k)|} > t_1\}, \tag{30}$$

$$\nu^-(q) = \nu^-(q;t) = card\{k : \; k \leqslant q \;\wedge\; \frac{|a(k)|}{|\lambda|} > t_2\}. \tag{31}$$

Określmy ciągi w_q^-, w_q^+ w następujący sposób:

$$w_q^-(j) = (P_q^- w_q)(j) = \begin{cases} \lambda^{q-j} \prod_{i=j}^{k-1} a(i) & \text{dla } \; j \leqslant q, \\ 0 & \text{dla } \; j > q, \end{cases} \tag{32}$$

$$w_q^+(j) = (P_q^+ w_q)(j) = \begin{cases} \lambda^{j-q} \left[\prod_{i=q}^{j-1} a(i)\right]^{-1} & \text{dla } \; j > q, \\ 0 & \text{dla } \; j \leqslant q. \end{cases} \tag{33}$$

Wówczas otrzymujemy następującą postać i oszacowanie z góry i z dołu normy operatorów prawych odwrotnych.

Twierdzenie 3.3. *Dla każdego $q \in \mathbb{Z}$ operator R_q postaci*

$$R_q = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1}(aW)^{-j}P_q^+ \; - \; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}}(aW)^j P_q^-, \tag{34}$$

jest prawym odwrotnym do operatora $B - \lambda I$. Mamy następujące oszacowanie z góry normy operatora R_q:

$$\begin{aligned} \|R_q\| \;&\leqslant\; \left(\frac{M_1}{|\lambda|}\right)^{\nu^-(q)} \left(\frac{1}{M_1 - |\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|(1-t_1)}\right) + \\ &+\; (|\lambda| M_2)^{\nu^+(q)} \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{1}{|\lambda| M_2 - 1} + \frac{1}{1-t_2}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

oraz następujące oszacowanie z dołu dla dowolnego operatora prawego odwrotnego R:

$$\|R\| \geqslant \sup_q \frac{1}{|\lambda|} \sqrt{\frac{A_q^2 B_q^2}{A_q^2 + B_q^2}}, \tag{36}$$

gdzie $A_q = \|w_q^+\|$, $B_q = \|w_q^-\|$.

4 Analiza rodziny operatorów zależnych od N

Pokażemy pewne zależności w obliczeniach oszacowań z góry i z dołu normy operatorów prawych odwrotnych analizując następującą rodzinę.

Rozważmy rodzinę dyskretnych operatorów przesunięcia z wagą

$$B_N u(k) = a_N(k) u(k+1),$$

gdzie funkcji a_N zależy od $N \in \mathbb{N}$. Rozpatrzymy dwie sytuacje, gdy funkcja a_N jest zdefiniowana wzorem (37) lub wzorem (38):

$$a_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} = a(-\infty), & \text{gdy} \quad k \leqslant -N; \\ 100, & \text{gdy} \quad -N < k \leqslant 0; \\ \frac{1}{100}, & \text{gdy} \quad 0 < k \leqslant N; \\ 2 = a(+\infty), & \text{gdy} \quad k > N; \end{cases} \tag{37}$$

$$a_N(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} = a(-\infty), & \text{gdy} \quad k \leqslant -N; \\ \frac{1}{100}, & \text{gdy} \quad -N < k \leqslant 0; \\ 100, & \text{gdy} \quad 0 < k \leqslant N; \\ 2 = a(+\infty), & \text{gdy} \quad k > N. \end{cases} \tag{38}$$

Znajdźmy oszacowanie dolne i górne rodziny operatorów prawych odwrotnych R_q do operatora $B_N - \lambda I$, $\lambda = 1$.

Wykorzystując wyniki z poprzedniego podrozdziału określimy liczby M_1, M_2, t_1, t_2, $k^{\pm}$, $\nu^+(q)$, $\nu^-(q)$. W obu przypadkach możemy określić takie same warości $M_1, M_2, t_1, t_2, k^{\pm}$ dla funkcji $a_N(k)$, tzn.

$$M_1 = 100, \quad M_2 = 100, \quad t_1 = t_2 = \frac{1}{2}, \quad k^- = -N, \quad k^+ = N, \tag{39}$$

natomiast wartości $\nu^+(q)$ i $\nu^-(q)$ będą różne. I co za tym idzie otrzymujemy różne wyniki odnośnie możliwości oszacowania normy operatorów prawych odwrotnych do operatora $B_N - I$. Możemy sformułować następujący wniosek:

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Wniosek 4.1. *Niech będzie dana rodzina operatorów przesunięcia z wagą*

$$B_N u(k) = a_N(k)u(k+1),$$

gdzie funkcja $a_N(k)$ zależy od N.

1. *Jeżeli funkcja a_N określona jest wzorem (37) to dowolna rodzina operatorów prawych odwrotnych $R(N)_q$ jest nieograniczona.*

2. *Jeżeli funkcja a_N określona jest wzorem (38) to istnieje $q(N)$ (np. $q(N) = 0$) taki, że rodzina operatorów prawych odwrotnych $R(N)_{q(N)}$ jest ograniczona.*

Reasumując: jeżeli wartości funkcji $a_N(k)$ z początku są duże a potem małe, to dowolna rodzina operatorów prawych odwrotnych jest nieograniczona, natomiast jeżeli wartości funkcji $a_N(k)$ z początku są małe a potem duże, to rodzina operatorów prawych odwrotnych jest ograniczona.

Dowód Wniosku 4.1 podzielimy na dwie części.

Dowód. (Część 1.) Pokażemy, że dla funkcji $a_N(k)$ postaci (37) dowolna rodzina $R(N)_q$, operatorów prawych odwrotnych do $B_N - I$, jest nieograniczona. Znajdziemy oszacowanie dolne operatorów prawych odwrotnych $R(N)_q$ do operatora $B_N - I$ wykorzystując (36). Potrzebujemy zatem wartości w_q^+ i w_q^-.

Niech $j \leqslant q$. Analizujemy następujące przypadki:

$$\begin{aligned}
q \leqslant -N \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^-\right\|^2 = \frac{19}{12}, \\
q \in (-N, 0] \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^-\right\|^2 = 100 \qquad 3 \quad \frac{1}{9999}\Big) - \frac{1}{9999}, \\
q \in (0, N] \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^-\right\|^2 = \frac{1}{100^{2(q-1)}} \quad 1 \qquad \text{——} \qquad \text{——} \\
q > N \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^-\right\|^2 = 4^{|q-1-N|}\left(\frac{5}{3} + \frac{10001}{9999}\left(1 - \frac{1}{100^{2N}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Analogicznie, dla $j > q$, znajdźmy w_q^+ rozważając kolejne przypadki:

$$\begin{aligned}
q \leqslant -N \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^+\right\|^2 = 4^{|q+N|}\left(\frac{17}{12} + \frac{1}{9999} \quad 1 - \frac{1}{100}\Big)\right) - \frac{1}{\ } \\
q \in (-N, 0] \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^+\right\|^2 = \frac{1}{100^{2q}}\Big(1 \qquad \text{——} \qquad \text{——} \\
q \in (0, N] \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^+\right\|^2 = 1 \qquad \left(\frac{1}{9999} + \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{9999}, \\
q > N \quad &\text{to} \quad \left\|w_q^+\right\|^2 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Powinniśmy policzyć

$$\sup_q \sqrt{\frac{\left\|w_q^-\right\|^2 \left\|w_q^+\right\|^2}{\left\|w_q^-\right\|^2 + \left\|w_q^+\right\|^2}} = \sup_q \sqrt{f(q, N)}.$$

Zauważmy, że dla rozważanych przypadków otrzymujemy:

$$
\begin{array}{rcl}
q \leqslant -N & \text{to} & \lim\limits_{N\to\infty} f(q,N) = c(q), \\
q \in (-N, 0) & \text{to} & f(q,N) = 100^{2|} \qquad\qquad N\to\infty \\
q \in (0, N) & \text{to} & f(q,N) = 100^{2|} \qquad\qquad N\to\infty \\
q > N & \text{to} & \lim\limits_{N\to\infty} f(q,N) = c_3.
\end{array}
$$

Reasumując, ograniczenie dolne zależy od wartości N i q, tzn. istnieje $q(N)$, takie że

$$\|R(N)_{q(N)}\| \geqslant 100^{2N} c(q).$$

Zatem w przypadku funkcji $a_N(k)$ zadanej wzorem (37) dowolna rodzina prawych odwrotnych $R(N)_q$ jest nieograniczony (dla dużych N granica oszacowania normy operatora $R(N)_{q(N)}$ z dołu, zbiega do nieskończoności). □

Dowód. (Część 2.) Pokażemy, że dla funkcji $a_N(k)$ postaci (38) istnieje wartość $q(N)$, taka że rodzina $R(N)_{q(N)}$, operatorów prawych odwrotnych do $B_N - I$, jest ograniczona.

Wykorzystując formułę (35) na oszacowanie z góry normy operatorów prawych odwrotnych R_q potrzebujemy wartości M_1, M_2, t_1, t_2, $k^{\pm}$ (zostały określone na początku w (39)) oraz wartości $\nu^+(q)$, $\nu^-(q)$. Zatem znajdujemy liczby $\nu^+(q)$ i $\nu^-(q)$. Zauważmy, że

$$\nu^+(q) = card\{k : k^+ > k \geqslant q,\ \frac{|\lambda|}{|a(k)|} > t_1\} = card\{k : q \leqslant k < N,\ |a(k)| < 2\},$$

zatem

$$\nu^+(q) = \begin{cases} -q & \text{dla} \quad q < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad q > 0. \end{cases}$$

Analogicznie

$$\nu^-(q) = card\{k : k^- < k \leqslant q,\ \frac{|a(k)|}{|\lambda|} > t_2\} = card\{k : -N < k \leqslant q,\ |a(k)| > \frac{1}{2}\},$$

zatem

$$\nu^-(q) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad -q < 0, \\ q & \text{dla} \quad q > 0. \end{cases}$$

Wówczas oszacowanie z góry wynosi

$$\|R(N)_q\| \leqslant \varphi(q) = \begin{cases} \frac{100^{-q}}{99} + \frac{100^{-q}}{1/2} + \frac{100^0}{99} + \frac{100^0}{1/2}, & \text{dla} \quad q < 0, \\ \frac{100^0}{99} + \frac{100^0}{1/2} + \frac{100^q}{99} + \frac{100^q}{1/2} & \text{dla} \quad q \geqslant 0. \end{cases}$$

W tym przypadku funkcja $\varphi(q)$ nie zależy od N, zależy tylko od q i przyjmuje wartość minimalną w punkcie $q = 0$, tzn.

$$\min_q \varphi(q, N) = \min_q \varphi(q) = \varphi(0).$$

Reasumując, w przypadku tak zdefiniowanej funkcji $a_N(k)$ istnieje $q(N)$, takie że rodzina operatorów prawych odwrotnych $R(N)_{q(N)}$ jest ograniczona. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Wyciągnięty wniosek potwierdza zauważony w [4] czy [7] wpływ relacji większy/mniejszy między wartościami $|a(x)|$ a $|\lambda|$ a własnościami spektralnymi operatora przesunięcia z wagą, które są powiązane z ograniczonością lub nieodgraniczonością względem normy rodziny operatorów odwrotnych.

Acknowledgements

Badania były wsparte przez Podlaski Fundusz Stypendialny.

Literatura

[1] A. Antonevich *Linear Functional Equation. Operator Approach.* Birkhauser Verlag, „Operator Theory Advances and Applications" , 1996, V. 83.

[2] A. Antonevich, A. Lebedev *Functional differential equations: I. C^*-theory*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.

[3] A. Antonevich, J. Makowska *Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class.* „Journal of Mathematical Sciences" ,2010, no. 4, 497-517.

[4] A. Antonevich, J. Makowska *On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points*, „Complex Analysis and Operator Theory", 2008, V. 2.

[5] G. Belitskii, Yu. Lyubich *On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces.* „Operator Theory: Advances and Applications", 1998, V. 103, 75-87.

[6] A. Yu. Karlovich, Yu.I. Karlovich *One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces.* „Integral Equations Operator Theory", 2002, V. 42, 201-228.

[7] J. Makowska *On-side invertibility of the weighted shift operators.* „Proceedings of the XXIX Workshop on Geometric Methods in Physics", American Institute of Physics, 2010.

[8] R. Mardiev *A criterion for semi-Noetherity of a class of singular integral operators with non-Carleman shift .* „Dokl. Akad. Nauk UzSSR", 1985, Tom 2, No 2, 5-7.

[9] W. C. Ridge *Spectrum of a composition operator.* „Proc. Amer. Math. Soc." 1973, V. 37, No 1, 121-127.

[10] W. C. Ridge *Approximate point of a weighted shift.* „Trans. Amer. Math. Soc." 1970, V. 147, 349-356.