mgr Pisarski Andrzej,
Wydział Fizyki,
Uniwersytet w Białymstoku

EFEKTYWNE POKRYCIA SIECIOWE W DETEKCJI SŁABYCH PRAWIE MONOCHROMATYCZNYCH SYGNAŁÓW

We construct efficient bank of templates suitable for all-sky searches of almost monochromatic gravitational waves originating from spinning neutron stars in our Galaxy in data being collected by currently operating interferometric detectors. In the construction we employ simplified model of the signal with constant amplitude and phase which is a linear function of four parameters. Our template bank enables usage of the fast Fourier transform algorithm in the computation of the maximum-likelihood F-statistic for nodes of the grid defining the bank. We have found grid with covering thickness which is less than 19% larger than the thickness of the optimal four-dimensional covering.

Skonstruowane efektywne pokrycia sieciowe mogą znaleźć zastosowanie w poszukiwaniach prawie monochromatycznych fal grawitacyjnych pochodzących z rotujących gwiazd neutronowych znajdujących się w naszej Galaktyce o nieznanym położeniu na sferze niebieskiej w danych zebranych przez obecnie działające detektory interferometryczne. W konstrukcji został wykorzystany uproszczony model sygnału o stałej amplitudzie oraz fazie będącej liniową funkcją czterech parametrów. Otrzymane pokrycie sieciowe pozwala na wykorzystanie algorytmu szybkiej transformaty Fouriera przy obliczaniu F-statystyki. Gęstość pokrycia otrzymanej sieci jest większa o niecałe 19% niż gęstość pokrycia optymalnej czterowymiarowej sieci.

1.

Jedną ze standardowych metod wykrywania słabych sygnałów w szumie jest *metoda filtru dopasowanego*. Przez słaby sygnał rozumiemy sygnał zanurzony w szumie, którego amplituda jest wielokrotnie większa od amplitudy sygnału. Interesować nas będą słabe sygnały *prawie monochromatyczne*, czyli takie, których częstotliwość zmienia się wolno w czasie. W metodzie filtru dopasowanego aby móc stwierdzić czy zebrane dane zawierają poszukiwany sygnał, należy dla analizowanego ciągu danych obliczyć tzw. *iloraz wiarygodności*. Jeśli iloraz wiarygodności przekroczy pewną ustaloną wartość progową to stwierdzamy, że analizowany ciąg danych zawiera poszukiwany sygnał.

Sposób sprawdzania, czy dany segment danych zawiera poszukiwany sygnał, polegający na obliczeniu ilorazu wiarygodności, nazywamy *filtrowaniem*. W naszej pracy będziemy korzystać z tzw. filtrów *dopasowanych*. Nazwa filtr dopasowany związana jest z tym, że dane filtrujemy tym samym sygnałem, który spodziewamy się wykryć. Zakładamy, że poszukiwany sygnał jest deterministyczną funkcją czasu zależną od kilku parametrów, których wartości nie są znane. Dlatego iloraz wiarygodności musimy obliczyć wielokrotnie dla różnych dopuszczalnych wartości tych parametrów i spośród wszystkich obliczonych ilorazów wiarygodności z wartością progową porównujemy te o ekstremalnej wartości. Jeśli wartość progowa zostanie przekroczona, to stwierdzamy obecność poszukiwanego sygnału w danych, natomiast zbiór wartości parametrów dla których iloraz wiarygodności jest ekstremalny, traktujemy jako estymatory rzeczywistych wartości parametrów wykrytego sygnału.

Wszystkie dopuszczalne wartości parametrów sygnału tworzą tzw. *przestrzeń parametrów*, która jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej o wymiarze równym liczbie parametrów. Jednym z takich parametrów sygnału prawie monochromatycznego jest jego częstotliwość. Ustalając wszystkie parametry sygnału poza częstotliwością możemy dla różnych wartości częstotliwości obliczyć ilorazy wiarygodności w bardzo szybki sposób korzystając z algorytmu *szybkiej transformaty Fouriera*. Przestrzeni parametrów nie można próbkować dowolnie gęsto (gęstsze próbkowanie związane jest z większą liczbą ilorazów wiarygodności do obliczenia). Z drugiej strony jeśli nie chcemy przeoczyć szukanego sygnału, przestrzeni parametrów nie możemy próbkować zbyt rzadko. O tym jak gęsto należy próbkować przestrzeń parametrów decyduje *funkcja autokowariancji* ilorazu wiarygodności.

W pracy sygnałami prawie monochromatycznymi są sygnały wywołane oddziaływaniem fal grawitacyjnych z interferometrycznym detektorem tych fal. Źródłem prawie monochromatycznych fal grawitacyjnych są m.in. rotujące gwiazdy neutronowe o nieosiowosymetrycznym rozkładzie masy, znajdujące się w naszej Galaktyce. W cyklu prac [1-5][1] pokazano, że dla czasów obserwacji nie dłuższych niż kilkanaście dni, w konstrukcji sieci filtrów można wykorzystać uproszczony sygnał w postaci *sinusoidalnej funkcji czasu o stałej amplitudzie i fazie będącej liniową funkcją parametrów*. Dla takiego sygnału konstrukcja sieci filtrów polega na podziale przestrzeni parametrów na zbiór przystających *komórek elementarnych* wpisanych w hiperpowierzchnię zamkniętą będącą poziomicą funkcji autokowariancji. Środek tej hiperpowierzchni (dokładniej hiperelipsoidy) stanowią współrzędne filtra którym filtrowane są dane. Jeśli sygnał wyprodukowany przez przyrodę znajdzie się wewnątrz hiperelipsoidy to mamy szansę taki sygnał wykryć. Ponieważ próbkujemy obszar przestrzeni parametrów wielokrotnie większy niż rozmiar pojedynczej hiperelipsoidy to należy tę przestrzeń pokryć zbiorem przystających komórek wypełniających przestrzeń bez dziur. Stosunek objętości hiperelipsoidy do objętości komórki elementarnej nazywa się *gęstością po-*

[1] [1] P. Jaranowski, A. Królak, B. F. Schutz, Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars: The signal and its detection, Physical Review D 58, 063001 (1998).
[2] P. Jaranowski, A. Królak, Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. II. Accuracy of estimation of parameters, Physical Review D 59, 063003 (1991).
[3] P. Jaranowski, A. Królak, Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. III. Detection statistics and computational requirements, Physical Review D 61, 062001 (2000).
[4] P. Astone, K. M. Borkowski, P. Jaranowski, A. Królak, Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. IV. An all-sky search, Physical Review D 65, 042003 (2002).
[5] P. Astone, K. M. Borkowski, P. Jaranowski, M. Pietka, A. Królak, Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. V. A narrow-band all-sky search, Physical Review D 82, 022005 (2010).

krycia. W pracy tej dążymy do uzyskania efektywnych pokryć sieciowych, tzn. takich które mają ten stosunek możliwie najmniejszy. Mniejsza wartość gęstości pokrycia przekłada się na mniejszą liczbę operacji związanych z wyznaczaniem ilorazu wiarygodności a tym samym przy ustalonej mocy obliczeniowej w tym samym czasie możemy przeanalizować większą partię danych.

2.

a) Wykrywanie słabych sygnałów w szumie

Sygnał na wyjściu z detektora otrzymany jako dyskretny ciąg wartości:

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2,\ldots,x_n), \qquad 1.1.$$

traktujemy jako ciąg **x** zmiennych losowych stanowiących realizację *dyskretnego procesu stochastycznego*. Chcąc stwierdzić czy dane **x** zawierają oprócz szumu szukany sygnał, potrzebujemy posłużyć się testem, na podstawie którego stwierdzimy, która z hipotez jest bardziej prawdopodobna: hipoteza, że dane **x** zawierają szukany sygnał, czy też hipoteza, że dane zawierają sam szum. Należy zatem zdecydować, która z dwóch poniższych funkcji lepiej opisuje dane zebrane przez detektor: funkcja łącznej gęstości prawdopodobieństwa, opisująca dane nie zawierające szukanego sygnału (indeks zero):

$$p_0=p_0(x), \qquad 1.2.$$

czy też funkcja opisująca dane zawierające sygnał (indeks 1):

$$p_1=p_1(x). \qquad 1.3.$$

W tym celu rozważamy przestrzeń ***X*** wszystkich możliwych do otrzymania wyników pomiarów. Przestrzeń tę dzielimy na dwa rozłączne i wzajemnie się dopełniające podzbiory ***R*** i ***R'***. Jeśli ***x R*** to mówimy, że dane zawierają sygnał, natomiast jeśli ***x R'*** to mówimy, że dane nie zawierają sygnału. W *podejściu Neymana-Pearsona* podział przestrzeni ***X*** na zbiory ***R*** i ***R'*** dokonujemy ustalając wartość α *prawdopodobieństwa fałszywego alarmu*:

$$P_F(\boldsymbol{R}) = \int_R p_0\,(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \qquad 1.4.$$

i maksymalizując *prawdopodobieństwo detekcji*:

$$P_D(\boldsymbol{R}) = \int_R p_1\,(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\,. \qquad 1.5.$$

W tym celu posługujemy się *ilorazem wiarygodności* zdefiniowanym następująco:

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$$\Lambda[\boldsymbol{x}] := \frac{p_1(\boldsymbol{x})}{p_0(\boldsymbol{x})}. \qquad 1.6.$$

Następnie wyznaczamy wartość progową ilorazu wiarygodności, taką, że dla zbioru **x**-ów spełniających nierówność prawdopodobieństwo fałszywego alarmu wynosi α:

$$P_F[\boldsymbol{x}\colon \Lambda[\boldsymbol{x}] \geq \Lambda_0] = \alpha. \qquad 1.7.$$

Wówczas zbiór ***R*** dany jest przez:

$$R = \{\boldsymbol{x}\colon \Lambda[\boldsymbol{x}] \geq \Lambda_0\}. \qquad 1.8.$$

W celu uproszczenia dalszych rozważań dane z detektora potraktujemy teraz jako realizację *ciągłego* procesu stochastycznego. Wówczas, jeśli sygnał wywołany przejściem fali grawitacyjnej przez detektor oznaczymy przez *h(t)*, a szum detektora jako *n(t)*, dane na wyjściu z detektora, gdy zawierają one sygnał, można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{n}(t) + \boldsymbol{h}(t), \qquad 1.9.$$

natomiast gdy dane nie zawierają sygnału mamy

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{n}(t). \qquad 1.10.$$

Przy konstrukcji sieci korzystamy z następującego uproszczonego modelu sygnału fali grawitacyjnej:

$$h(t; h_0, \psi_0, \boldsymbol{\xi}) = h_0 \sin(\Phi(t; \boldsymbol{\xi}) + \psi_0), \qquad 1.11.$$

gdzie h_0 jest amplitudą sygnału, ψ_0 fazą początkową, Φ (t; ξ) fazą sygnału równą:

$$\Phi(t; \boldsymbol{\xi}) = \omega_0 \frac{t}{T_0} + \omega_1 \left(\frac{t}{T_0}\right)^2 + \alpha_1 \mu_1(t) + \alpha_2 \mu_2(t), \qquad 1.12.$$

gdzie bezwymiarowe parametry ω_0 i ω_1 zdefiniowane są następująco: $\omega_0 := 2\pi f_0 T_O$, $\omega_1 := \pi f_0 T^2_0$, f_0; jest częstotliwością sygnału wziętą w chwili *t*=0; α_1 oraz α_2 są parametrami związanymi z położeniem źródła fali grawitacyjnej na sferze niebieskiej; $\mu_1(t)$ i $\mu_2(t)$ są znanymi funkcjami czasu opisującymi położenie detektora względem środka ciężkości Układu Słonecznego; T_0 jest czasem trwania obserwacji. W celu uproszczenia zapisu parametry ω_0, ω_1, α_1, α_2 zostały zebrane w jeden wektor ξ:

$$\boldsymbol{\xi} := (\omega_0, \omega_1, \alpha_1, \alpha_2). \qquad 1.13.$$

O szumie obecnym w detektorze zakładamy, że jest szumem addytywnym, stacjonarnym i gaussowskim o zerowej wartości średniej. Dla takiego rodzaju szumu można pokazać, że logarytm ilorazu wiarygodności, zwany dalej krótko *F*-statystyką, ma (po pewnych uproszczeniach i w przybliżeniu dostatecznie dokładnym dla naszych potrzeb) następującą postać zespoloną:

$$F(x;\xi) \cong \frac{2}{S_n(f_c)T_O}\left|\int_{t_i-T_O/2}^{t_i+T_O/2} x(t)\exp\left(-i\Phi(t;\xi)\right)dt\right|^2, \qquad 1.14.$$

gdzie t_i jest środkiem przedziału obserwacji, $S_n(f_c)$ *jednostronną gęstością spektralną szumu* detektora wziętą dla pewnej centralnej częstotliwości f_c sygnału.

Problem detekcji sygnału związany jest z szukaniem takich wartości parametrów sygnału ξ, dla których F-statystyka przyjmuje wartość ekstremalną. Ponieważ nie jesteśmy w stanie znaleźć ekstremów F-statystyki w sposób analityczny, dlatego znajdujemy te ekstrema w sposób numeryczny, próbkując przestrzeń parametrów sygnału w sposób zdefiniowany przez pokrycia sieciowe.

b) Funkcja autokowariancji *F*-statystyki

Wiedzy o tym, jak gęsto należy próbkować przestrzeń parametrów sygnału, dostarcza nam funkcja autokowariancji *F*-statystyki, której poziomice w przypadku czteroparametrowego modelu sygnału fali grawitacyjnej (1.11) mają kształt czterowymiarowej elipsoidy. Mając poziomice (hiperelipsoidy) konstruujemy sieci o węzłach wyznaczanych przez środki hiperelipsoid. Można pokazać, że dla sygnału (1.11) funkcja autokowariancji ma następującą postać

$$C_0(\xi,\xi') \cong \langle\sin[\Phi(t;\xi)-\Phi(t;\xi')]\rangle^2 + \langle\cos[\Phi(t;\xi)-\Phi(t;\xi')]\rangle^2, \qquad 2.1.$$

gdzie ξ jest wektorem oznaczającym środek elipsoidy, ξ' jest wektorem o składowych którego wartości wyprodukowane zostały przez przyrodę, nawiasy ⟨ ⟩ oznaczają średniowanie po czasie zdefiniowane następująco:

$$\langle f\rangle := \frac{1}{T_O}\int_{t_i-T_O/2}^{t_i+T_O/2} f(t)\,dt \qquad 2.2.$$

Ponieważ faza Φ sygnału (1.11) zależy liniowo od parametrów ξ, wprowadzając oznaczenie τ := ξ - ξ', możemy zapisać

$$C_0(\tau) \cong \langle\sin\Phi(t;\tau)\rangle^2 + \langle\cos\Phi(t;\tau)\rangle^2, \qquad 2.3.$$

Jednak w praktyce nie jest wygodnie posługiwać się formułą (2.3), dlatego wprowadza się dalsze przybliżenie funkcji autokowariancji za pomocą zredukowanej macierzy Fishera. Przybliżenie polega na rozwinięciu równania (2.3) w szereg Taylora wokół τ=0 do wyrazu kwadratowego w τ. Wówczas dostajemy

$$C_0(\boldsymbol{\tau}) \cong 1 - \sum_{i,j=1}^{4} \widetilde{\Gamma}_{ij}\,\tau_i\tau_j, \tag{2.4.}$$

gdzie $\widetilde{\Gamma}$ jest czterowymiarową zredukowaną macierzą informacji Fishera o elementach równych

$$\widetilde{\Gamma}_{ij} := \left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_i}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_j}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_i}\right\rangle\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_j}\right\rangle, \quad i,j = 1,2,3,4. \tag{2.5.}$$

W dalszych wzorach posługiwać się będziemy bezwymiarową wielkością χ_i:

$$\chi_i := \frac{t_i}{T_0}, \tag{2.6.}$$

oraz zamiast czasu t bezwymiarową zmienną x:

$$x := \frac{t}{T_0} - \chi_i. \tag{2.7.}$$

c) Założenia konstrukcyjne sieci

Konstruując pokrycia sieciowe żądamy, aby węzły sieci ξ dla dowolnego sygnału fali grawitacyjnej o parametrach ξ' spełniały warunek

$$C_0(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}') \geq C_{\min}. \tag{3.1.}$$

Ponieważ w naszym modelu sygnału faza jest liniowa w swoich parametrach to warunek (3.1) możemy zapisać w postaci

$$C_0(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \geq C_{\min}. \tag{3.2.}$$

Znacznie łatwiej jest jednak posługiwać się formułą przybliżoną:

$$\sum_{i,j=1}^{4} \widetilde{\Gamma}_{ij}\left(\xi_i - \xi_i'\right)\left(\xi_j - \xi_j'\right) \leq 1 - C_{\min}. \tag{3.3.}$$

Powyższa nierówność ma być spełniona przez wszystkie punkty ξ' należące do *hiperelipsoidy* o środku ξ.

Naszym celem jest znalezienie efektywnych pokryć sieciowych, tzn. takich pokryć, które:

1. spełniają warunek (3.2);
2. mają możliwie najmniejszą liczbę węzłów w ustalonym obszarze przestrzeni parametrów;
3. spełniają (opisany poniżej) wiąz związany z wykorzystaniem algorytmu szybkiej transformaty Fouriera.

Przy ustalonej wartości funkcji autokowariancji warunki 2 i 3 wpływają na czas obliczeń, czyli na efektywność sieci. Warunek 2 związany jest z tzw. gęstością pokrycia $\boldsymbol{\theta}$, którą definiuje się się jako stosunek objętości hiperelipsoidy do objętości hiperkomórki (bryły wyznaczanej przez wektory bazowe sieci). Mniejsza gęstość pokrycia (przy ustalonym oraz ustalonym obszarze parametrów) prowadzi do mniejszej liczby filtrów wyznaczanych przez środki hiperelipsoid. Ostatni warunek dotyczy sposobu wyznaczania F-statystyki. Ponieważ liczba węzłów sieci w przestrzeni parametrów jest bardzo duża, czas obliczeń F-statystyk dla wszystkich węzłów jest długi. Ze wzoru na F-statystykę (1.14) widać, że znaczną część obliczeń można wykonać obliczając transformatę Fouriera. Oznacza to, że przy wyznaczaniu F-statystyki możemy stosować algorytm szybkiej transformaty Fouriera (FFT – *fast Fourier transform*). Jednak wykorzystanie algorytmu FFT do obliczenia F-statystyki jest możliwe wówczas, gdy węzły sieci są ułożone wzdłuż prostych równoległych do osi częstości i pokrywają się z *częstotliwościami Fouriera.*

Można pokazać, że w przypadku gdy liczba próbek wynosi N, a odstęp między kolejnymi dwoma próbkami wynosi Δt, to rozdzielczość bezwymiarowego parametru częstotliwości ω_0 wynosi

$$\Delta\omega_0 = 2\pi. \qquad 3.4.$$

Natomiast w przypadku, gdy długość transformaty Fouriera N_{FFT} jest różna od liczby danych N, rozdzielczość parametru częstotliwości ω_0 wynosi

$$\Delta\omega_0 = 2\pi N / N_{FFT}. \qquad 3.5.$$

d) Przejście do pokrycia hipersferami

W celu uproszczenia konstrukcji pokryć sieciowych przekształcamy problem pokrycia przestrzeni hiperelipsoidami na problem pokrycia przestrzeni hipersferami o jednostkowym promieniu. Przejście do problemu pokrycia hipersferami dokonujemy za pomocą odwzorowania liniowego F :

$$\boldsymbol{\tau}' = F(\chi_i, C_0) \cdot \boldsymbol{\tau}, \qquad 4.1.$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

gdzie $\boldsymbol{\tau}$ jest wektorem oryginalnej nieprzekształconej przestrzeni Ω, $\boldsymbol{\tau'}$ jest wektorem z przestrzeni z hipersferami Ω'.
Ponieważ chcemy przekształcić powierzchnię hiperelipsoidy o autokowariancji wynoszącej C_0 w powierzchnie hipersfery o promieniu jeden, macierz F musi spełniać równość:

$$F^T(\chi_i, C_0) \cdot F(\chi_i, C_0) = \tilde{\Gamma}(\chi_i)/(1 - C_0) \qquad 4.2.$$

Macierz F obliczamy stosując *rozkład Cholesky'ego* symetrycznej i dodatnio określonej macierzy rzeczywistej. Oznaczymy taką macierz przez A. Wówczas rozkład Cholesky-'ego ma postać

$$A = F^T \cdot F, \qquad 4.3.$$

gdzie F jest macierzą górnotrójkątną o dodatnich wyrazach diagonalnych.
Gęstość pokrycia w przestrzeni Ω' możemy obliczyć ze wzoru

$$\rho(R, d) = \frac{2\pi^{d/2} R^d}{d\,\Gamma(d/2)|\det E|}, \qquad 4.4.$$

gdzie R – promień sfery w d-wymiarowej przestrzeni, E – macierz wektorów bazowych (rozpinających komórkę elementarną), Γ – funkcja gamma Eulera.

e) Konstrukcja efektywnej sieci filtrów S

W rozdziale tym skonstruujemy efektywną sieć filtrów, którą nazwiemy S. Konstrukcja zostanie wykonana dla następujących wartości parametrów[2]:

$$N = 344656,\ N_{FFT} = 2^{20},\ C_0 = 0.75, \Delta\omega_0 \cong 2.06522. \qquad 4.5.$$

W celu uproszczenia przechodzimy do problemu pokrycia przestrzeni Ω' hipersferami o promieniu jeden. Wektor wiąz w przestrzeni Ω' ma postać:

$$(\Delta\omega_0', 0,0,0)^{\mathsf{T}} = F(\chi_i, C_0) \cdot (\Delta\omega_0, 0,0,0)^{\mathsf{T}}, \qquad 5.2.$$

gdzie wartość Δω_0' dla parametrów (5.1) wynosi

$$\Delta\omega_0' \cong 1.19235. \qquad 5.3.$$

[2] Podana wartość odpowiada liczbie danych zebranych przez detektor w ciągu dwóch dni syderycznych z okresem próbkowania 0.5 sekundy. jest liczbą danych uzupełnioną (z powodu stosowania algorytmu FFT) o taką liczbę zer aby otrzymać wartość będącą potęgą liczby 2. (rozdzielczość transformaty Fouriera) jest obliczana na podstawie wzoru 3.5.

W przypadku czterowymiarowym, siecią o najmniejszej gęstości pokrycia jest sieć A_4^*. Macierzą generującą sieć A_4^* (w przypadku pokrycia sferami o promieniu jednostkowym) jest macierz

$$V = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{v}_2^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{v}_3^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{v}_4^{\mathsf{T}} \end{pmatrix}, \tag{5.4.}$$

której wierszami są wektory bazowe o współrzędnych:

$$\boldsymbol{v}_1' = \left(\sqrt{5}, 0,0,0\right)^{\mathsf{T}}, \tag{5.5. a}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}, 0,0\right)^{\mathsf{T}}, \tag{5.5. b}$$

$$\boldsymbol{v}_4' = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}, -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\mathsf{T}}. \tag{5.5. d}$$

Długości tych wektorów bazowych są następujące:

$$\left|\boldsymbol{v}_1'\right| = \left|\boldsymbol{v}_2'\right| = \left|\boldsymbol{v}_3'\right| = \sqrt{5}, \tag{5.6. a}$$

$$\left|\boldsymbol{v}_4'\right| = \sqrt{2}. \tag{5.6. b}$$

Ponieważ macierz F jest macierzą górnotrójkątną, konstrukcja sieci w przestrzeni Ω' zależy tylko od $\Delta\omega_0$ oraz C_0 (C_0 wpływa na długość więzu $(\Delta\omega_0', 0,0,0)^{\mathsf{T}}$).

Konstrukcję sieci S zaczniemy od otrzymania takich wektorów bazowych tej sieci, które umożliwiają zbudowanie komórki Woronoja dla optymalnej w czterech wymiarach sieci A_4^*. Wektory te są krawędziami bocznymi 4-wymiarowego sympleksu o podstawie będącej 3-wymiarowym czworościanem foremnym. Wektory bazowe pokrywające się z krawędziami bocznymi sympleksu nazywać będziemy wektorami krawędziowymi. Mając wektory krawędziowe znajdujemy wektor pokrywający się z wysokością sympleksu. Stosując symetrię odbić względem wybranych hiperpłaszczyzn przekształcamy otrzymane wektory bazowe tak, aby wysokość sympleksu leżała wzdłuż osi ω_0'. Ostatecznie tak otrzymaną bazę sieci A_4^* poddamy ściskaniu w kierunku osi ω_0' otrzymując sieć o żądanych własnościach.

Nowe wektory bazowe, związane konstrukcyjnie z komórką Woronoja, są zdefiniowane następująco:

$$\boldsymbol{m}_1' = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_4', \tag{5.7. a}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$$\boldsymbol{m}_2' = \boldsymbol{v}_2' + \boldsymbol{v}_4', \tag{5.7. b}$$
$$\boldsymbol{m}_3' = \boldsymbol{v}_3' + \boldsymbol{v}_4', \tag{5.7. c}$$
$$\boldsymbol{m}_4' = \boldsymbol{v}_4'. \tag{5.7. d}$$

Macierz generująca sieć A_4^* zbudowana z tak otrzymanych wektorów bazowych ma postać

$$M = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}_1^T \\ \boldsymbol{m}_2^T \\ \boldsymbol{m}_3^T \\ \boldsymbol{m}_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{5.8.}$$

Długości wszystkich wektorów bazowych są takie same i równe

$$|\boldsymbol{m}_1'| = |\boldsymbol{m}_2'| = |\boldsymbol{m}_3'| = |\boldsymbol{m}_4'| = \sqrt{2}. \tag{5.9.}$$

Cosinus kąta β między dowolną dwójką różnych od siebie wektorów bazowych, obliczony na podstawie ich iloczynów skalarnych, jest taki sam dla wszystkich par wektorów i wynosi

$$\cos\beta = -1/4, \tag{5.10. a}$$
$$\beta \cong 1.82348. \tag{5.10. b}$$

Na podstawie równości długości wektorów bazowych $\boldsymbol{m}_i'$ jak i kątów jaki ze sobą tworzą, wnioskujemy, że wektory bazowe $\boldsymbol{m}_i'$ leżą wzdłuż krawędzi bocznych czterowymiarowego sympleksu o podstawie będącej czworościanem foremnym (wektory bazowe $\boldsymbol{m}_i'$ zaczepione są w początku układu współrzędnych). W przypadku gdy podstawą sympleksu jest bryła foremna łatwo jest znaleźć wektor pokrywający się z wysokością sympleksu:

$$\boldsymbol{h}_1' = \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{m}_1' + \boldsymbol{m}_2' + \boldsymbol{m}_3' + \boldsymbol{m}_4'\right) = \left(0,0,0,-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right). \tag{5.11.}$$

Węzły sieci A_4^* są wyznaczane przez współrzędne wektora postaci

$$\boldsymbol{w}'(i,j,k,l) \coloneqq i\,\boldsymbol{m}_1' + j\,\boldsymbol{m}_2' + k\,\boldsymbol{m}_3' + l\,\boldsymbol{m}_4', \qquad 5.12.$$

gdzie *i,j,k,l* przyjmują dowolne wartości całkowite. Szukamy wektora w postaci (5.12) o takich wartościach parametrów *i,j,k,l,* dla których jego długość jest możliwie najbliższa $\Delta\omega_0'$. Istnieje wiele wektorów, które mając różne wartości parametrów i,j,k,l mają tę samą długość bliską $\Delta\omega_0'$. Wybieramy ten, który jest równoległy do wektora h_1'. Jest to wektor odpowiadający *i=j=k=l=1*, jego współrzędne są równe

$$\boldsymbol{m}_5' = \left(0,0,0,-\sqrt{2}\right). \qquad 5.13.$$

Zastępując w macierzy (5.8) wektor $\boldsymbol{m}_4'$ przez $\boldsymbol{m}_5'$ otrzymujemy następującą macierz generującą sieć A_4^*:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad 5.14.$$

Z macierzy (5.14) w trzech opisanych poniżej krokach otrzymamy bazę sieci A_4^* umożliwiającą budowę sympleksu, którego wysokość jest równoległa do osi ω_0', a same wektory bazowe tworzą macierz dolnotrójkątną.

1. Zmieniamy kolejność wektorów bazowych (zamiana wierszy ,):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad 5.15.$$

2. Przekształcamy wektory bazowe za pomocą symetrii względem hiperpłaszczyzn $-\omega_0'+\alpha_2'=0$ oraz $-\omega_1'+\alpha_1'=0$, są to hiperpłaszczyzny prostopadłe odpowiednio do wektorów $(-1,0,0,1)^T$ i $(0,-1,1,0)^T$ (zamiana kolumn 1↔4, 2↔3):

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}. \qquad 5.16.$$

3. Jest rzeczą wygodną otrzymać macierz generującą o dodatnich wyrazach diagonalnych. W tym celu przekształcamy wektory bazowe tworzące macierz (5.16) za pomocą symetrii względem hiperpłaszczyzny $\omega_0' = 0$. Otrzymujemy w ten sposób bazę złożoną z wektorów $\boldsymbol{n}_i'$ (i = 1,2,3,4) tworzącą macierz generującą N postaci:

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1^T \\ \boldsymbol{n}_2^T \\ \boldsymbol{n}_3^T \\ \boldsymbol{n}_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{2} & -\frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}. \qquad 5.17.$$

Sieć A_4^* o macierzy generującej N danej wzorem (5.17) ściskamy następnie w kierunku osi ω_0' stosując macierz diagonalną o elementach

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 5.18.$$

gdzie

$$q_1 = \Delta\omega_0'/\sqrt{2} \cong 0.843122. \qquad 5.19.$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

W języku macierzowym deformacja sieci A_4^* sprowadza się do wykonania mnożenia macierzy:

$$C = N \cdot Q, \tag{5.20.}$$

Otrzymana w ten sposób macierz generująca *C* definiuje sieć, która spełnia wiąz (5.3). Macierz ta ma następujące elementy:

$$C = \begin{pmatrix} 1.192353885 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2980884713 & 1.369306394 & 0 & 0 \\ 0.2980884713 & -0.4564354646 & 1.290994449 & 0 \\ 0.2980884713 & -0.4564354646 & -0.6454972244 & 1.118033989 \end{pmatrix}. \tag{5.21.}$$

f) Wektory bazowe w przestrzeni z hiperelipsoidami

Wektory bazowe w przestrzeni Ω otrzymujemy stosując odwzorowanie odwrotne F^{-1}, odwrotne do odwzorowania określonego w formule (4.1):

$$\boldsymbol{\tau} = F^{-1}(\chi_i, C_0) \cdot \boldsymbol{\tau}' \tag{6.1.}$$

Macierz złożona z wektorów bazowych $\boldsymbol{\tau}$ w przestrzeni Ω jest zawsze macierzą dolnotrójkątną (ponieważ F^{-1} jest dane macierzą górnotrójkątną, a macierz wektorów bazowych w przestrzeni Ω' dolnotrójkątną).

3. Wnioski

Gęstości pokrycia sieci A_4^* oraz *S* wynoszą

$$\rho_{A_4^*} = \frac{\pi^2}{2|\det V|} = \frac{\pi^2}{2|\det N|} \cong 1.765529, \tag{7.1. a}$$

$$\rho_S = \frac{\pi^2}{2|\det C|} \cong 2.094038. \tag{7.2. b}$$

Sieci A_4^* nie ma potrzeby deformować w przypadku, gdy $\Delta\omega_0' = \sqrt{2}$. Taką sieć otrzymujemy dla $C_0 \cong 0.822287$. Wówczas sieci S i A_4^* są identyczne (i jako takie mają jednakową gęstość pokrycia).

Konstrukcja sieci w przestrzeni Ω' nie zależy ani od położenia detektora względem środka masy Układu Słonecznego ani od wyboru χ_i. Stąd dla ustalonego C_0 oraz $\Delta\omega_0'$ w celu otrzymania wektorów bazowych w przestrzeni Ω wystarczy wykorzystać raz obliczoną macierz wektorów bazowych w przestrzeni z hipersferami.

Publikacja powstała w ramach realizacji Podlaskiego Funduszu Stypendialnego.

4. Bibliografia

1. Astone P., Borkowski K. M., Jaranowski P., Królak A., *Data analysis of gravitational--wave signals from spinning neutron stars. IV. An all-sky search*, Physical Review D **65**, 042003 (2002).
2. Astone P., Borkowski K. M., Jaranowski P., Pietka M., Królak A., *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. V. A narrow-band all-sky search*, Physical Review D **82**, 022005 (2010).
3. Jaranowski P., Królak A., *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. II. Accuracy of estimation of parameters*, Physical Review D **59**, 063003 (1991).
4. Jaranowski P., Królak A., *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars. III. Detection statistics and computational requirements*, Physical Review D **61**, 062001 (2000).
5. Jaranowski P., Królak A., Schutz B. F., *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars: The signal and its detection*, Physical Review D **58**, 063001 (1998).