Modelowanie systemów wieloagentowych w terminach granul informacyjnych*

Anna Gomolińska
Uniwersytet w Białymstoku

1 Wstęp

Konstruowanie modeli jest metodą stosowaną w naukach w celu uproszczenia problemów zwiększającego szanse ich rozwiązania.

(W. Marciszewski [17], s. 128)

Modelowanie systemów wieloagentowych oraz działania takich systemów stanowi trudny, lecz interesujący problem badawczy. Struktura i natura opisywanych obiektów jest skomplikowana, w związku z tym (choć nie jest to jedyna przyczyna) liczne szczegółowe zagadnienia związane z tematyką wieloagentową są bardzo złożone i nie poddają się łatwo formalizacji ani analizie. Mimo to — a może właśnie dlatego — podjęto wiele prób, i wciąż podejmowane są nowe, które zaowocowały powstaniem szeregu teorii i modeli[1]. Także w tym artykule zajmiemy się zagadnieniem modelowania inteligentnych jednostek, zwanych agentami, oraz ich zachowań w środowisku społecznym. W proponowanym podejściu stosujemy metody i narzędzia oparte na teorii zbiorów przybliżonych [19, 20, 21, 22].

W zasadzie przez system wieloagentowy rozumiemy tutaj grupę ludzką. Pojęcie „agent" obejmuje jednak dowolne jednostki lub grupy jednostek, traktowane jak jednostki wyższego rzędu, obdarzone pewną formą inteligencji, naturalnej czy sztucznej[2]. Poniższa charakterystyka dotyczy głównie ludzi i ich grup, a w mniejszym stopniu innych rodzajów agentów.

*Praca ta powstała w ramach projektu „Nierozstrzygalność i algorytmiczna niedostępność w naukach społecznych", finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji, nr 2 H01A 030 25.

[1] Ze względu na wysoką złożoność obliczeniową proponowanych formalizmów, znaczna część wyników ma charakter wyłącznie teoretyczny.

[2] Na przykład agent może być inteligentnym programem komputerowym.

Agenci przede wszystkim obdarzeni są zdolnością rozumowania, ich możliwości w tym zakresie są jednak ograniczone. Nie są też w pełni racjonalni, gdyż mogą ulegać emocjom. Korzystają z posiadanych już baz wiedzy, jak też pozyskują nową wiedzę w trakcie działania i współdziałania w oparciu o dostępne dane i informacje. Ponieważ agenci działają i współdziałają w warunkach niepełnej i niepewnej informacji oraz w różnych kontekstach sytuacyjnych, ich rozumowania mają często charakter niemonotoniczny[3], mogą być lokalnie sprzeczne, a zwykle są mocno zależne od kontekstu. Działając w środowisku społecznym, agenci podejmują działania jednostkowe i grupowe, skierowane na cel (typ instrumentalny) lub na prawidłowy sposób wykonania (typ normatywny). Ich (współ)działanie może opierać się na gotowych procedurach i algorytmach (typ proceduralny), może być planowane bądź przeciwnie — spontaniczne[4]. Agenci są introspektywni, gdyż potrafią analizować działanie swoje i innych oraz adaptatywni, jako że posiadają umiejętność przystosowania się do zmiennych warunków. Ponadto mogą się porozumiewać. Ważnymi aspektami działalności agentów są: podejmowanie decyzji, klasyfikacja i — ogólniej — formułowanie sądów. Aktywność agentów odznacza się dynamicznością i kreatywnością.

W dalszej perspektywie naszym celem jest zbudowanie modelu systemu wieloagentowego, opartego na regułach oraz uwzględniającego niepewność i niepełność informacji, kontekstowość działania agentów i zmiany zachodzące w środowisku, jak i w samych agentach. Tworząc modele pojedynczego agenta, grupy agentów oraz zachowań grupowych, należy uwzględnić takie kwestie, jak reprezentacja wiedzy, przekonań, systemu wartości i systemu podejmowania decyzji, modelowanie (współ)działania oraz dynamika systemu agentowego i jego części. Proponujemy zastosowanie metod przybliżonych, zarówno opartych na teorii zbiorów przybliżonych, jak też łączących techniki zbiorów przybliżonych z innymi podejściami, np. zbiorami rozmytymi, sieciami neuronowymi, metodami statystycznymi. Warto podkreślić, że tradycyjne metody logiczne, czy ogólniej matematyczne, można z powodzeniem zastosować do rozwiązania niektórych zagadnień związanych z modelowaniem. Metody te nastawione są na precyzyjny opis i dokładne rozwiązanie problemu. Niestety, im większa precyzja, tym zwykle większa złożoność modelu. Ponadto wiele zjawisk jest zbyt skomplikowanych, by w ogóle można myśleć o rozwiązaniu dokładnym. Dlatego sięgamy po metody przybliżone, które proponują co prawda rozwiązania mniej dokładne, i stąd mniej pewne, ale są bardziej skuteczne w wypadku problemów złożonych.

[3]To znaczy, że nowo przyjęte przekonanie może spowodować usunięcie pewnych wcześniejszych przekonań z bazy wiedzy.

[4]Obserwuje się też różne pośrednie typy działania.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Podstawowym pojęciem syntaktycznym, służącym do budowy naszego modelu, jest reguła przyjętego języka reprezentacji wiedzy. Natomiast elementarnym pojęciem semantycznym, na którym opieramy model jest granula informacyjna, pojęcie wprowadzone przez Zadeha [43] w kontekście obliczeń na słowach [45, 46, 47]. Granule informacyjne, rozważane w tym artykule, związane są z przestrzeniami przybliżeń w sensie Skowrona i Stepaniuka. Idea granulacji w przestrzeni przybliżeń polega na tym, że w zależności od potrzeb czy możliwości, zmieniając poziom zgranulowania, dostrzegamy mniej lub więcej szczegółów. Elastycznie dopasowując stopień uszczegółowienia opisu badanego fragmentu rzeczywistości, można by uniknąć wykonywania zadań nadmiernie złożonych w wypadku, gdy mniejsza dokładność rozwiązania jest zadowalająca. Podsumowując, agenci i ich systemy oraz schematy zachowań grupowych są formalizowane z syntaktycznego punktu widzenia jako kompleksy reguł, czyli hierarchiczne struktury zbudowane z reguł [4, 8], natomiast z semantycznego punktu widzenia — jako granule informacyjne.

Z uwagi na szczupłość miejsca, nie dokonamy tutaj przeglądu istniejących modeli systemów wieloagentowych, nawet tych najbardziej znanych. Przedstawimy natomiast w zarysie koncepcję modelu opartego na regułach, a w terminach semantycznych — na granulach informacyjnych. W rozdziale 2. przypomnimy takie pojęcia, jak system informacyjny w sensie Pawlaka, przestrzeń przybliżeń w ujęciu Skowrona i Stepaniuka oraz granula informacyjna. W kolejnym rozdziale podamy przykład obiektu złożonego o hierarchicznej strukturze, jakim jest kompleks obiektów (w oryginale — punktów) przestrzeni przybliżeń. Przy odpowiednich założeniach, kompleksy obiektów są pewnymi granulami informacyjnymi. W rozdziale 4. omówimy wybrane aspekty budowania modelu systemu wieloagentowego w terminach kompleksów reguł. Ostatni rozdział zawiera uwagi końcowe.

2 Przestrzenie przybliżeń

Pojęcie przestrzeni przybliżeń wiąże się z *systemami informacyjnymi* Pawlaka [19, 20, 21, 22]. Dowolny taki system jest parą postaci $\mathcal{A} = (U, A)$, gdzie U jest skończonym niepustym zbiorem obiektów, zwanym uniwersum systemu $\mathcal{A}$, natomiast A jest skończonym niepustym zbiorem atrybutów tego systemu. Obiekty oraz atrybuty oznaczamy odpowiednio przez u i a, z indeksami w razie potrzeby. Formalnie rzecz biorąc, atrybuty są funkcjami postaci $a : U \mapsto V_a$, przypisującymi obiektom pewne wartości. Na przykład, wartościami atrybutu *kolor* są *biały, czerwony, niebieski, zielony, żółty, ...*

Każdy podzbiór B zbioru atrybutów A wyznacza na U pewną relację równoważności, ind_B, zwaną relacją *B-nieodróżnialności*, która dzieli U na rozłączne niepuste podzbiory obiektów, takie że u, u' są w tej samej klasie abstrakcji wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall a \in B.a(u) = a(u')$. Relacja ind_B indukuje odwzorowanie Γ_B ze zbioru U do zbioru potęgowego tego zbioru, $\wp U$, przypisujące każdemu obiektowi u, zbiór wszystkich obiektów B-nieodróżnialnych od u, tzn. takich obiektów u', że $(u', u) \in \mathrm{ind}_B$. Zbiór obiektów jest uważany za *B-definiowalny*, jeśli jest sumą mnogościową pewnych klas B-nieodróżnialności. Niektóre zbiory są, a niektóre nie są B-definiowalne. Te ostatnie można przybliżać przez zbiory B-definiowalne za pomocą operacji *dolnego* i *górnego B-przybliżenia*, $\mathrm{low}^{\cup}_B, \mathrm{upp}^{\cup}_B : \wp U \mapsto \wp U$. Dla dowolnego zbioru obiektów X,

$$\mathrm{low}^{\cup}_B X = \bigcup\{\Gamma_B u \mid \Gamma_B u \subseteq X\} \ \& \ \mathrm{upp}^{\cup}_B X = \bigcup\{\Gamma_B u \mid \Gamma_B u \cap X \neq \emptyset\}. \quad (1)$$

Zbiory $\mathrm{low}^{\cup}_B X$ oraz $\mathrm{upp}^{\cup}_B X$ nazywamy odpowiednio *dolnym* i *górnym B-przybliżeniem* zbioru X. Powiemy, że X jest *B-dokładny*, jeśli

$$\mathrm{low}^{\cup}_B X = \mathrm{upp}^{\cup}_B X.$$

W przeciwnym przypadku X jest *B-przybliżony.*

Wzajemnie definiowalne struktury (U, ind_B) i (U, Γ_B), w których możemy przybliżać zbiory obiektów, są przykładami przestrzeni przybliżeń.

Zamiast ind_B możemy rozważać zupełnie dowolną niepustą relację równoważności ϱ na U i odpowiadające jej odwzorowanie Γ_ϱ, zdefiniowane przez

$$\Gamma_\varrho u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varrho^{\leftarrow}\{u\}.$$

Z drugiej strony, moglibyśmy zacząć od dowolnego odwzorowania $\Gamma : U \mapsto \wp U$, którego zbiór wartości, $\Gamma^{\rightarrow} U$, tworzy podział U oraz $u \in \Gamma u$ dla każdego $u \in U$. Operacje dolnego i górnego przybliżenia, $\mathrm{low}^{\cup}$ i $\mathrm{upp}^{\cup}$, można zdefiniować jak poprzednio.

W [31, 32] i w kolejnych pracach, Skowron i Stepaniuk uogólnili pojęcia przestrzeni przybliżeń, funkcjonujące wcześniej w teorii zbiorów przybliżonych. Zgodnie z naszą notacją, przez *(sparametryzowaną) przestrzeń przybliżeń* rozumiemy trójkę postaci $\mathcal{M}_\$ = (U, \Gamma_\$, \kappa_\$)$, gdzie U jest niepustym zbiorem obiektów, zwanym uniwersum przestrzeni $\mathcal{M}$, $\Gamma_\$: U \mapsto \wp U$ jest funkcją *niepewności*, a $\kappa_\$: \wp U \times \wp U \mapsto [0, 1]$ jest pewną funkcją *inkluzji przybliżonej.* Symbol \$, pomijany dalej dla uproszczenia, oznacza listę parametrów sterujących, za pomocą których można uzyskać odpowiednią jakość przybliżenia. Funkcja niepewności Γ przypisuje obiektom zbiory obiektów w pewnym sensie do nich podobnych. Zakładamy, że każdy obiekt jest podobny sam do siebie oraz że nieodróżnialność jest szczególnym przypadkiem podobieństwa. Zatem $\Gamma^{\rightarrow} U$ stanowi pokrycie, choć niekoniecznie podział

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

zbioru U. Zbiory postaci Γu, składające się z obiektów podobnych w sensie Γ do u, traktowane są jak elementarne „cegiełki", z których buduje się bardziej złożone obiekty. Zbiór obiektów $X \subseteq U$ jest *definiowalny* z uwagi na Γ, jeśli jest sumą mnogościową wartości funkcji Γ dla pewnych obiektów uniwersum.

Funkcje inkluzji przybliżonej mierzą stopień zawierania zbiorów obiektów w zbiorach obiektów. Na specjalną uwagę zasługuje *standardowa funkcja inkluzji przybliżonej*, $\kappa^{\pounds}$, której definicja oparta jest na idei pochodzącej jeszcze od Łukasiewicza [16]. Załóżmy, że U jest zbiorem skończonym. Dla dowolnych zbiorów obiektów X, Y,

$$\kappa^{\pounds}(X,Y) = \begin{cases} \frac{\#(X\cap Y)}{\#X} & \text{dla } X \neq \emptyset \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{2}$$

Jeśli X jest niepusty, $\kappa^{\pounds}(X,Y)$ równa się więc częstości występowania elementów zbioru Y w zbiorze X. Formalne pojęcie inkluzji przybliżonej zostało wprowadzone przez Polkowskiego i Skowrona oraz scharakteryzowane przez aksjomaty *mereologii przybliżonej* [25, 26]. Teoria ta zajmuje się analizą pojęcia „bycia częścią całości w pewnym stopniu" i jest uogólnieniem mereologii Leśniewskiego [13]. Tu zakładamy, że dowolna funkcja inkluzji przybliżonej $\kappa : \wp U \times \wp U \mapsto [0,1]$ spełnia aksjomaty (A1)–(A3) dla wszelkich zbiorów obiektów X, Y, Z: (A1) $\kappa(X,Y) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \subseteq Y$. (A2) Jeśli $X \neq \emptyset$, to $\kappa(X,Y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cap Y = \emptyset$. (A3) Jeśli $Y \subseteq Z$, to $\kappa(X,Y) \leq \kappa(X,Z)$. Jedynie (A2) jest nieco silniejszym założeniem o κ niż jest to postulowane w mereologii przybliżonej.

Zbiory obiektów w przestrzeniach przybliżeń, zwane też *pojęciami*, możemy przybliżać na różne sposoby[5]. Rozważmy przestrzeń przybliżeń $\mathcal{M} = (U, \Gamma, \kappa)$. W podejściu Skowrona i Stepaniuka, operacje *dolnego* i *górnego przybliżenia*, low, upp : $\wp U \mapsto \wp U$ odpowiednio, są dla dowolnego zbioru obiektów X określone następująco:

$$\mathrm{low}X = \{u \in U \mid \kappa(\Gamma u, X) = 1\} \;\;\&\;\; \mathrm{upp}X = \{u \in U \mid \kappa(\Gamma u, X) > 0\}. \tag{3}$$

Jak poprzednio, low$X$ i upp$X$ nazywamy odpowiednio *dolnym* i *górnym przybliżeniem* X. Wobec (A1)–(A3) zachodzi:

$$\mathrm{low}X = \{u \in U \mid \Gamma u \subseteq X\}$$

oraz

$$\mathrm{upp}X = \{u \in U \mid \Gamma u \cap X \neq \emptyset\}.$$

[5]Kwestia ta jest dyskutowana szerzej w pracy [5], zawierającej szereg odnośników do literatury.

Zatem low$X$ zawiera wszystkie obiekty, które na pewno należą do X, natomiast upp$X$ składa się z tych wszystkich obiektów, które być może należą do X. Jeśli przybliżenia mają być dodatkowo zbiorami definiowalnymi z uwagi na Γ, to jako operacje dolnego i górnego przybliżenia można wziąć $\mathrm{low}^{\cup}, \mathrm{upp}^{\cup}$ zdefiniowane następująco:

$$\mathrm{low}^{\cup}X = \bigcup\{\Gamma u \mid \kappa(\Gamma u, X) = 1\} \ \ \& \ \ \mathrm{upp}^{\cup}X = \bigcup\{\Gamma u \mid \kappa(\Gamma u, X) > 0\}. \tag{4}$$

Zatem

$$\mathrm{low}^{\cup}X = \bigcup \Gamma^{\rightarrow}\mathrm{low}X$$

oraz

$$\mathrm{upp}^{\cup}X = \bigcup \Gamma^{\rightarrow}\mathrm{upp}X.$$

Interesującą kwestią są własności operacji przybliżania zbiorów, jednak z uwagi na brak miejsca ograniczymy się do przypomnienia paru najbardziej istotnych. Przede wszystkim, jeśli $\Gamma^{\rightarrow}U$ jest podziałem U, to obie wersje operacji przybliżania, tzn. f i $f^{\cup}$, się pokrywają. Dla dowolnego $X \subseteq U$, zachodzi $\mathrm{low}X \subseteq X \subseteq \mathrm{upp}X$, i analogicznie dla wersji $f^{\cup}$. Następnie, operacje dolnego i górnego przybliżenia są monotoniczne[6] Ponadto low i upp są dualne.

W przestrzeniach przybliżeń, stopień należenia obiektów do pewnego zbioru obiektów X wyznaczany jest za pomocą *funkcji przybliżonego należenia* [23], $\mu_X : U \mapsto [0,1]$, którą można zdefiniować poprzez

$$\mu_X u = \kappa(\Gamma u, X). \tag{5}$$

Ziarko rozwinął model Pawlaka zbiorów przybliżonych w nieco innym kierunku, wprowadzając stopnie precyzji w przybliżaniu zbiorów obiektów innymi zbiorami obiektów. Otrzymany model zyskał miano *zmienno-precyzyjnego modelu zbiorów przybliżonych* [48, 49].

Pojęcie granuli informacyjnej zostało wprowadzone przez Zadeha w pracy [43]. Zgodnie z definicją Zadeha, granula jest gromadą obiektów pewnego rodzaju, zebranych razem z uwagi na ich nieodróżnialność, podobieństwo lub funkcjonowanie. Lin [14] zaproponował, by zastąpić termin „zebranych razem" przez „zebranych wokół pewnego obiektu". Wyróżniony obiekt miałby

[6]Niech $(X, \leq)$, $(Y, \preceq)$ będą zbiorami uporządkowanymi. Powiemy, że funkcja

$$f : X \mapsto Y$$

jest *monotoniczna*, jeśli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, takich że $x_1 \leq x_2$, zachodzi:

$$f(x_1) \preceq f(x_2).$$

więc spełniać rolę centrum kumulacji. Sugestia Lina ma sens, np. gdy dopuszczamy niesymetryczne podobieństwo obiektów. Adaptując oba podejścia, przez *granulę informacyjną* rozumieć będziemy gromadę (zbiorowisko, „klaster") obiektów pewnego rodzaju, zebranych razem czy też wokół pewnego obiektu z uwagi na ich podobieństwo lub funkcjonowanie[7]. Zatem granula informacyjna jest pewnego rodzaju obiektem złożonym, będącym obiektem wyższego rzędu w stosunku do obiektów, z których się składa.

Badania nad różnymi postaciami granul informacyjnych, relacjami oraz operacjami na granulach zyskują coraz szersze zainteresowanie. Nurt badań w informatyce poświęcony tym zagadnieniom nosi angielską nazwę *granular computing*, czyli *obliczenia na granulach* [14, 15, 40, 41, 44, 45, 46, 47]. Tematyka ta jest też intensywnie rozwijana w kontekście przestrzeni przybliżeń [18, 24, 27, 28, 29, 33, 34, 35, 36, 37]. Głównymi zagadnieniami są tworzenie granul z obiektów przestrzeni oraz rozwiązywanie różnych problemów dotyczących obiektów złożonych, wykonując obliczenia na granulach. W związku z pierwszym zagadnieniem, można analizować sposoby tworzenia granul, postacie granul, reprezentację symboliczną, zależności między granulami, jak bliskość, podobieństwo, hierarchię granul. Zagadnienie drugie obejmuje m.in. operacje na granulach. Przykładami takich operacji są składanie i rozkładanie granul oraz przekształcenie polegające na zastąpieniu pewnych części granul przez inne, spełniające określone warunki.

W przestrzeni $\mathcal{M}$ jak poprzednio, dowolny zbiór postaci Γu nazywamy *elementarną* granulą informacyjną związaną z u. Elementarnymi granulami są, w szczególności, klasy abstrakcji dowolnej relacji równoważności na U. Innym przykładem granuli informacyjnej jest dowolny zbiór definiowalny w $\mathcal{M}$, będący sumą mnogościową pewnych granul elementarnych. W najprostszym przypadku granula informacyjna jest zbiorem obiektów z U. Co ciekawe, obiekt nie zawsze musi należeć do granuli z nim związanej [39, 42]. Za granule informacyjne można też uważać zbiory granul, uporządkowane zbiory obiektów i/lub granul, itp. Ogólnie rzecz biorąc, granule mogą mieć bardzo skomplikowaną strukturę matematyczną.

3 Kompleksy obiektów

Pojęcie kompleksu obiektów (w wersji oryginalnej — kompleksu punktów) zostało wprowadzone przez autorkę tego artykułu w [8] jako uogólnienie *kompleksu reguł*. To ostatnie pojęcie jest kluczowe dla *uogólnionej teorii gier społecznych*, rozwijanej przez Burnsa i Gomolińską [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]. Prototyp kompleksu obiektów to program z zagnieżdżonymi procedurami,

[7]Nieodróżnialność uważamy za graniczny przypadek podobieństwa.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

gdzie obiekty są instrukcjami wyrażonymi w pewnym języku programowania. Program, będący (uporządkowanym) zbiorem instrukcji i procedur, jest przykładem granuli informacyjnej utworzonej ze względu na funkcjonowanie.

Teoretycznie nie ma przeciwskazań, aby uważać zbiór pusty za (trywialny) kompleks obiektów. Podobnie zbiór niepusty, zawierający jednak $\emptyset$ jako składnik konstrukcji, można uznać za kompleks obiektów. Z punktu widzenia dalszych zastosowań w modelowaniu systemów wieloagentowych, wygodniej jest jednak ograniczyć się do niepustych i niezawierających zbioru pustego kompleksów obiektów. Definicja zaproponowana poniżej jest zmodyfikowaną wersją definicji z [8]. Klasa wszystkich *kompleksów obiektów* nad niepustym zbiorem U, $\mathcal{C}U$, jest zdefiniowana jako najmniejsza klasa zbiorów niepustych, zawierająca U oraz domknięta na następujące reguły:

(CPL1) Każdy niepusty podzbiór kompleksu obiektów nad U jest też kompleksem obiektów nad U.

(CPL2) Dowolna niepusta rodzina kompleksów obiektów nad U jest kompleksem obiektów nad U.

(CPL3) Suma mnogościowa dowolnej niepustej rodziny kompleksów obiektów nad U jest kompleksem obiektów nad U.

Kompleks obiektów nazywamy *skończonym*, gdy jest skończony jako zbiór, w przeciwnym razie nazywamy go *nieskończonym*. Kompleksy obiektów mogą mieć dowolną, lecz zawsze skończoną liczbę poziomów. Charakterystyczną cechą jest możliwość wielokrotnego występowania pewnych obiektów i kompleksów obiektów w danym kompleksie obiektów. Z perspektywy przestrzeni $\mathcal{M} = (U, \Gamma, \kappa)$, na kompleks obiektów nad U możemy patrzeć jak na złożony obiekt tej przestrzeni zbudowany z obiektów elementarnych, zwanych po prostu obiektami, czyli z elementów zbioru U. Jeżeli przyjmiemy, że (elementarne) obiekty tworzą kompleks X nad U ze względu na podobieństwo lub funkcjonowanie, to X jest ponadto złożoną granulą informacyjną o hierarchicznej strukturze.

Przykład 3.1 Niech $u_i \in U$ $(i = 0, \ldots, 3)$ będą różnymi obiektami. Zbiory:

$$X_1 = \{u_0, u_2\},\ X_2 = \{u_0, u_2, u_3\},\ X_3 = \{u_1, X_2\},\ X_4 = \{u_0, u_1, X_1, X_3\}$$

są kompleksami obiektów nad U. Dla przykładu, ten ostatni kompleks można też zapisać jako $X_4 = \{u_0, u_1, \{u_0, u_2\}, \{u_1, \{u_0, u_2, u_3\}\}\}$. Nawiasy służą do tworzenia nowych obiektów z obiektów już skonstruowanych.

Spośród szeregu pojęć stowarzyszonych z kompleksem obiektów, na szczególną uwagę zasługują pojęcia elementu uogólnionego i podkompleksu. Jak

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

nazwy wskazują, pierwsze jest uogólnieniem pojęcia elementu, a drugie podzbioru. Powiemy, że obiekt lub kompleks obiektów x jest *uogólnionym elementem* (*g-elementem*) lub *g-należy do* kompleksu obiektów X, $x \in_g X$, jeśli x występuje w X, tzn.

$$x \in_g X \Leftrightarrow x \in X \vee \exists n \in \mathbb{N}. \exists X_0, \ldots, X_n . x \in X_0 \in \ldots \in X_n \in X. \tag{6}$$

Każdy element kompleksu obiektów jest też jego g-elementem, ale nie na odwrót. Na przykład, instrukcja należąca do pewnej procedury w programie P jest g-elementem programu P, ale nie musi należeć do P. Zanotujmy, że bycie g-elementem jest własnością przechodnią, a ponadto g-elementy danego kompleksu są również g-elementami dowolnego jego nadzbioru.

Niech X, Y będą dowolnymi kompleksami obiektów nad U. X nazywamy *podkompleksem* Y, $X \sqsubseteq Y$, jeśli $X = Y$ lub X da się otrzymać z Y przez usunięcie pewnych g-elementów, i ewentualnie nawiasów uznanych za zbędne. Na przykład, podkompleksem programu P, traktowanego jako kompleks instrukcji, jest dowolny niepusty program otrzymany z P przez usunięcie niektórych instrukcji i procedur. $\sqsubseteq$ jest rzeczywiście uogólnieniem relacji inkluzji, gdyż każdy podzbiór jest także podkompleksem danego kompleksu, ale nie odwrotnie[8]. Ciekawe, że każdy kompleks obiektów, będący g-elementem kompleksu X, jest jednocześnie jego podkompleksem. Bycie podkompleksem kompleksu obiektów jest ponadto cechą przechodnią.

Przykład 3.2 Dla danych z przykładu 3.1. $X = \{u_1, u_2, \{u_0, u_2\}\}$ jest podkompleksem X_4 przy odpowiedniej interpretacji „zbędności” nawiasów.

Kompleksy obiektów można składać, rozkładać, wymieniać w nich g-elementy. Z perspektywy przestrzeni przybliżeń, ważnym zagadnieniem jest też zdefiniowanie przybliżonych wersji g-należenia i bycia podkompleksem. Dla przykładu, powiemy, że obiekt u jest *uogólnionym elementem* (*g-elementem*) lub *g-należy do* kompleksu obiektów X *w stopniu* $t \in [0,1]$, $\mu^g_X u = t$, jeśli istnieje taki kompleks $Y \in_g X$, że u należy do Y w stopniu t, czyli $\mu_Y u = t$. Oznacza to, że

$$\mu^g_X u = \max\{\mu_Y u \mid Y \in \mathcal{C}U \wedge Y \in_g X\}. \tag{7}$$

Przykład 3.3 Wróćmy do przykładu 3.1. Niech κ będzie standardową funkcją inkluzji przybliżonej, tzn. $\kappa = \kappa^{\pounds}$, a funkcja przybliżonego należenia do zbioru X, μ_X, będzie określona przez (5). Następnie, niech $\Gamma u_2 = \{u_2, u_3, u_4\}$ oraz $\Gamma u_4 = \{u_1, u_2, u_4\}$, gdzie u_4 jest obiektem różnym od $u_0, \ldots, u_3$. Mamy $\mu^g_{X_4} u_2 = \mu^g_{X_2} u_2 = 2/3$ oraz $\mu^g_{X_4} u_4 = 1/3$. Zauważmy, że $u_4 \notin_g X_4$.

[8]Podzbiór otrzymujemy przez usunięcie pewnych elementów.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana w przypadku g-elementów będących kompleksami obiektów oraz w przypadku podkompleksów. Problemem tym zajmiemy się przy innej okazji.

4 Modelowanie agentów, ich grup i zachowań

Reguły opisują elementarne kroki w postępowaniu, czy to w świecie fizycznym, czy abstrakcyjnym. Na instrukcje w algorytmach, programach i procedurach można patrzeć jak na specyficzne reguły[9]. „Reguły gry", „reguły (zasady, instrukcje) postępowania", „reguły wnioskowania", „zasady moralne", „reguły decyzyjne" są terminami często używanymi w kontekście działania (fizycznego lub kognitywnego) i współdziałania. W klasycznym ujęciu von Neumanna i Morgensterna [38], gra jest traktowana jako zbiór pewnych reguł[10]. Kodeksy postępowania można reprezentować matematycznie jako pewne struktury złożone z reguł. W systemach wspomagających podejmowanie decyzji, kluczowymi pojęciami są reguła decyzyjna i klasyfikator[11]. W zakresie formalizacji rozumowań, systemy logiczne są zawsze oparte na jakichś regułach wnioskowania. W ujęciu tradycyjnym, przekonania i wiedzę racjonalnych agentów reprezentuje się za pomocą formuł, a stan ich przekonań i wiedzy przedstawia się w postaci zbioru formuł.

W naszym podejściu, podstawowym pojęciem, na którym opieramy model, zarówno pojedynczego agenta, grupy agentów jak też ich zachowań, jest pojęcie reguły. W celu ujednolicenia konstrukcji, również przekonania i wiedza agentów, są reprezentowane przez reguły. Wstępne idee oraz przykładowe zastosowania proponowanego modelu zostały przedstawione w [1, 2, 3, 4, 8]. Jednak zbudowanie modelu, za pomocą którego można by analizować, a nawet symulować rzeczywiste zachowania grup agentów, działających w obliczu ryzyka, niepewności i niepełności wiedzy, stanowi wciąż jeszcze wyzwanie.

Punktem wyjścia jest określenie odpowiedniego języka reprezentacji wiedzy L, w którym moglibyśmy wyrazić wszystko, co dotyczy rozważanej grupy agentów, a co chcielibyśmy za pomocą naszego modelu badać. W języku tym budujemy formuły i reguły. Pojęcie reguły można zdefiniować na różne sposoby, w zależności od potrzeb. Zawsze jednak reguła składa się z formuł, których część stanowią warunki wstępne, czyli przesłanki, a reszta formuł tworzy wnioski reguły. Na przykład, w aksjomatycznych systemach

[9] Programy logiczne są po prostu zbiorami reguł.

[10] W naszym ujęciu powiedzielibyśmy, że gra jest reprezentowana przez pewną granulę informacyjną złożoną z reguł.

[11] Przez klasyfikator rozumiemy algorytm służący do klasyfikowania obiektów, w tym do podejmowania decyzji.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

logiki klasycznej, przez regułę (wnioskowania) rozumie się pewien zbiór par postaci (X, α), gdzie X jest skończonym zbiorem formuł, zwanych przesłankami, natomiast α jest formułą, zwaną wnioskiem reguły. Przez regułę można też rozumieć parę zbiorów formuł (X, Y), gdzie elementy zbioru X są przesłankami, a elementy zbioru Y — wnioskami reguły[12]. Z założenia, zbiór wniosków jest niepusty. W [4, 6, 7, 8] reguły są zdefiniowane jako trójki postaci (X, Y, α), gdzie X, Y są skończonymi zbiorami formuł, natomiast α jest formułą. W tym ujęciu mamy zawsze jeden wniosek (α), natomiast zbiór przesłanek ($X \cup Y$) jest skończony, ale niejednorodny. Zawiera „mocne" przesłanki tworzące zbiór X, zwane po prostu przesłankami, oraz „słabsze" przesłanki tworzące zbiór Y, zwane uzasadnieniami (ang. *justifications*). Taka definicja, motywowana logiką domniemań Reitera [30], w sposób jawny uwzględnia wyjątki od reguły, reprezentowane przez negacje uzasadnień. Formuły można zapisywać w postaci reguł o pustych zbiorach przesłanek (i uzasadnień). Wszelkie zasady postępowania, instrukcje, proste akcje, wartości, normy, przekonania, wiedzę, reguły decyzyjne itp., związane z pojedynczym agentem czy też z grupą agentów, traktowaną jako agent wyższego poziomu, reprezentujemy jako reguły i meta-reguły języka L. Podobnie, zasady gier i ogólniej interakcji, przedstawiamy w postaci reguł i meta-reguł L.

Przez meta-reguły języka L rozumiemy reguły meta-języka dowolnego poziomu w stosunku do języka L. Są to reguły opisujące wzajemne zależności między regułami i kompleksami reguł, warunki, kolejność i sposób stosowania reguł i ich kompleksów, wnioskowanie, dynamikę zmian (np. aktualizowanie) czy operacje na regułach i kompleksach reguł języka L i jego meta-języków. Meta-reguły mogą też dotyczyć oceny reguł i ich kompleksów, stopnia realizacji celów itd. Jeśli nie doprowadzi to do nieporozumień, to zarówno reguły jak i meta-reguły będziemy dla uproszczenia nazywać regułami.

Z punktu widzenia semantyki języka, reguła może być interpretowana jako para (w przypadku reguł z wyjątkami — trójka) zbiorów obiektów rozważanej przestrzeni przybliżeń $\mathcal{M}$. Reguła jest więc etykietą pewnej granuli informacyjnej w $\mathcal{M}$. Z drugiej strony, zbiór wszystkich reguł branych pod uwagę stanowi uniwersum pewnej nowej przestrzeni przybliżeń $\mathcal{N}$, gdzie obiektami (elementarnymi) są właśnie reguły. Można badać podobieństwo reguł, a następnie odpowiednio zdefiniować funkcję niepewności, przypisującą regułom zbiory reguł do nich podobnych. W ogólnym przypadku, zdefiniowanie znaczenia semantycznego kompleksu reguł w przestrzeni $\mathcal{M}$ nie jest łatwe z powodu złożonej struktury kompleksów reguł. Wstępnie można

[12]Zwykle zakłada się, że X, Y są skończone.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

by interpretować kompleks reguł jako pewien ciąg zbiorów obiektów danej przestrzeni. Podobnie jak reguły, kompleksy reguł są więc etykietami pewnych granul informacyjnych w $\mathcal{M}$. Natomiast z perspektywy przestrzeni $\mathcal{N}$, kompleks reguł jest sam w sobie granulą informacyjną, o ile tylko reguły tworzące ten kompleks zgrupowane są ze względu na podobieństwo lub funkcjonowanie. Na kompleksach reguł jako granulach informacyjnych można wykonywać operacje składania, rozkładania, wymiany podkompleksów na inne. Można też badać podobieństwo i bliskość kompleksów reguł. Zatem kolejny etap, to utworzenie przestrzeni przybliżeń, gdzie obiektami uniwersum są kompleksy reguł.

W modelowaniu agentów i ich zachowań należy uwzględnić kontekst sytuacyjny, w tym przestrzenno-czasowy. W tym artykule przyjmujemy, że sytuacja jest pojęciem pierwotnym. Sytuacje będziemy oznaczać przez s z indeksami w razie potrzeby. W danej sytuacji s, z każdym pojedynczym agentem j ($j = 1, \ldots, n$) można związać cały szereg kompleksów reguł, dających w sumie kompleks wszystkich reguł agenta j w sytuacji s, $\mathrm{AGENT}_{j,s}$, będący matematycznym modelem agenta j w sytuacji s. Kompleks $\mathrm{AGENT}_{j,s}$ określa „profil" agenta j, grane przez niego role, jego język komunikacji, sposoby zachowania i porozumiewania się, procedury, wiedzę, przekonania, interpretację wypowiedzi innych agentów, podejmowanie decyzji, mechanizmy zmiany itp., a wszystko to w kontekście sytuacji s. Głównymi podkompleksami $\mathrm{AGENT}_{j,s}$ są kompleks kontroli i zarządzania regułami i podkompleksami kompleksu $\mathrm{AGENT}_{j,s}$, oznaczany przez $\mathrm{CTRL}_{j,s}$; kompleks komunikowania się agenta j z innymi agentami w sytuacji s, $\mathrm{LINGUA}_{j,s}$; oraz kompleks ról (np. społecznych) granych przez j w sytuacji s, $\mathrm{ROLE}_{j,s}$.

Wśród podkompleksów kompleksu $\mathrm{CTRL}_{j,s}$ wyróżnimy m.in. kompleks $\mathrm{LOGIC}_{j,s}$, złożony z reguł dotyczących wnioskowania logicznego agenta j w sytuacji s. Reguły tego kompleksu precyzują, w jaki sposób wyprowadzać reguły z danych reguł i kompleksów reguł, by zachowane zostały odpowiednie własności logiczne. W [6] badamy pojęcie *wyprowadzalności* reguł z kompleksu reguł w przypadku reguł dopuszczających wyjątki. Kolejnym podkompleksem $\mathrm{CTRL}_{j,s}$ jest kompleks reguł opisujących operacje na regułach i kompleksach reguł w sytuacji s, $\mathrm{TRANSFORM}_{j,s}$. Reguły i ich kompleksy można bowiem przetwarzać łącząc, rozkładając, rozszerzając lub zastępując ich części innymi. W wyniku działań podjętych podczas gry (interakcji), zmienia się sytuacja. Zmiana sytuacji wymusza podjęcie decyzji, czy i w jakim stopniu należy zaktualizować model agentów, ich grup i rozgrywanej gry. Wraz z dopływem nowych informacji, zmianie podlegają, np. bazy przekonań i wiedzy agentów. W związku z zagadnieniem zmiany modelu agenta, modelu grupy agentów lub modelu gry pojawia się problem *(nie)sprzeczności* kompleksu reguł. Można wyodrębnić różne formy (nie)sprzeczności [7]. W skrajnym przypadku, ze sprzecznego kompleksu reguł dadzą się wyprowadzić wszystkie możliwe reguły w rozważanym języku. Oczywiście, agent o takim kompleksie reguł nie mógłby nic zdziałać. W świecie rzeczywistym występują sprzeczności w systemach wartości, norm, podejmowania decyzji, wiedzy i przekonań agentów, którzy mimo to normalnie funkcjonują. Sprzeczności te mają bowiem zwykle charakter lokalny i znikają, gdy uwzględni się kontekst sytuacyjny. Jeszcze innym podkompleksem kompleksu $\mathrm{CTRL}_{j,s}$ jest kompleks decyzyjny, $\mathrm{MDEC}_{j,s}$, służący podejmowaniu decyzji na poziomie meta-językowym i złożony z różnych klasyfikatorów, będących pojedynczymi regułami decyzyjnymi lub ich kompleksami. Przykładem problemu rozstrzyganego przy użyciu $\mathrm{MDEC}_{j,s}$ jest kwestia, czy zmieniać bazę przekonań i wiedzy wobec nowych faktów.

W grach niekooperacyjnych zakłada się brak współpracy między graczami, co oznacza m.in., że nie mogą się oni porozumiewać ani negocjować rozwiązań najbardziej dla siebie korzystnych. W przeważającej liczbie przypadków mamy jednak do czynienia z grami i ogólniej grupowymi zachowaniami, o charakterze kooperacyjnym. Agenci mogą się komunikować oraz dochodzić do porozumienia i rozwiązania gry poprzez negocjacje. Podkompleksami kompleksu komunikowania się, $\mathrm{LINGUA}_{j,s}$, są kompleksy reguł opisujące język komunikacji, sposoby komunikowania się, określające jak interpretować wypowiedzi innych agentów, jak negocjować itp.

Podkompleksami kompleksu $\mathrm{ROLE}_{j,s}$ są natomiast kompleks reguł reprezentujący system wartości i norm, czyli kompleks wartości, agenta j w sytuacji s, $\mathrm{VAL}_{j,s}$; kompleks reguł opisujących podejmowane działania i planowanie (kompleks akcji) przez j w s, $\mathrm{ACT}_{j,s}$; kompleks reguł dotyczących sposobów wykonywania działań i realizacji planów, zwany kompleksem typów działania (np. typ instrumentalny, proceduralny, normatywny czy zabawowy), j w kontekście s, $\mathrm{ACTMOD}_{j,s}$; kompleks decyzyjny (klasyfikacyjny) j w s, $\mathrm{DEC}_{j,s}$; oraz kompleks reguł opisujących stan przekonań i wiedzy agenta (baza wiedzy) j w sytuacji s, $\mathrm{KBASE}_{j,s}$. Wśród podkompleksów bazy wiedzy $\mathrm{KBASE}_{j,s}$ są m.in. podkompleksy reprezentujące stan przekonań i wiedzy j w sytuacji s na temat sytuacji s, gry (współdziałania) G rozgrywanej w tej sytuacji, innych agentów uczestniczących w G oraz samego siebie w sytuacji s.

Z każdą rolą X graną przez j w sytuacji s (np. matka, ojciec, pracownik, członek stowarzyszenia, gracz gry G), związany jest pewien kompleks reguł $X_{j,s}$, który podobnie jak $\mathrm{ROLE}_{j,s}$ zawiera jako podkompleksy następujące kompleksy reguł: kompleks wartości związanych z pełnieniem przez j roli X w sytuacji s, $\mathrm{VAL}_{j,s}(X)$; kompleks akcji charakterystycznych dla X w s, $\mathrm{ACT}_{j,s}(X)$; kompleks odpowiednich dla X typów działania w kontekście s,

$\mathrm{ACTMOD}_{j,s}(X)$; kompleks decyzyjny związany z rolą X w s, $\mathrm{DEC}_{j,s}(X)$; oraz baza wiedzy agenta j w sytuacji s dotycząca roli X, $\mathrm{KBASE}_{j,s}(X)$. Powyższe kompleksy reguł są nie tylko podkompleksami $X_{j,s}$, ale też podkompleksami kompleksów $\mathrm{VAL}_{j,s}, \mathrm{ACT}_{j,s}, \mathrm{ACTMOD}_{j,s}, \mathrm{DEC}_{j,s}, \mathrm{KBASE}_{j,s}$, i oczywiście podkompleksami $\mathrm{ROLE}_{j,s}$. Rola X działa jak filtr powodujący, że „zapominamy" o regułach nieistotnych dla tej roli.

W danej sytuacji s agent zbiorowy J również może być modelowany jako pewien kompleks reguł $\mathrm{AGENT}_{J,s}$, do pewnego stopnia przypominający kompleks reguł pojedynczego agenta. W wypadku, gdy J jest grupą agentów $1, \ldots, n$, kompleks $\mathrm{AGENT}_{J,s}$ zawiera kompleksy reguł poszczególnych członków grupy $\mathrm{AGENT}_{j,s}$ ($j = 1, \ldots, n$) oraz kompleksy reguł opisujące strukturę J (np. hierarchię agentów), role zbiorowe grane przez J, wspólny system wartości i norm, sposoby i tryb współdziałania, procedury podejmowania decyzji, wspólną wiedzę i przekonania, a także kompleks reguł związany z zarządzaniem i kontrolą nad regułami i podkompleksami kompleksu $\mathrm{AGENT}_{J,s}$ w kontekście sytuacji s.

Schematy zachowań grupowych (np. gry) także modelujemy jako kompleksy reguł. Taki kompleks zawiera m.in. opis — w formie reguł i kompleksów reguł — uczestników gry i ich ról w tej grze, warunków rozpoczęcia i zakończenia działań, zasad postępowania i celów gry.

Ważnymi zagadnieniami natury semantycznej, związanymi z pojęciami reguły i kompleksu reguł, są *spełnialność*, czyli zachodzenie formuł i zbiorów formuł dla obiektów (np. sytuacji) oraz *stosowanie* reguł i kompleksów reguł do obiektów. W wyniku zastosowania pewnych reguł lub kompleksów reguł, agent wyciąga wnioski, wyprowadza reguły, pozyskuje wiedzę, dokonuje osądów, klasyfikuje obiekty, decyduje, podejmuje i wykonuje działania, realizuje plany itd. Zagadnienie stosowania reguł i ich kompleksów obejmuje *stosowalność*, czyli potencjalną możliwość zastosowania. Problem stosowalności sprowadza się do analizy warunków, które muszą być spełnione, aby móc zastosować regułę lub kompleks reguł do danego obiektu. Pojęcia spełnialności formuł i ich zbiorów w przestrzeniach przybliżeń są przedmiotem prac [10, 11], natomiast przybliżona stosowalność reguł jest badana w [9, 12]. Przypomnijmy dla przykładu jedno z przybliżonych pojęć spełnialności formuły dla obiektu, analizowane szczegółowo w [10]. Niech α będzie formułą rozważanego języka L, $u \in U$ oraz $t \in [0, 1]$. Przez $||\alpha||$ oznaczmy zbiór wszystkich obiektów spełniających α w sposób dyskretny (dokładny). Powiemy, że α jest spełniona dla u w stopniu nie mniejszym niż t, symbolicznie $u \models_t \alpha$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa(\Gamma u, ||\alpha||) \geq t$, tzn. gdy α jest spełniona w sposób dyskretny dla dostatecznie dużej liczby obiektów podobnych do u, gdzie „dostateczność" jest określona przez wartość progową t.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Dodajmy na koniec, że obiekty, dla których mają być spełnione pewne formuły lub zbiory formuł czy też do których stosujemy reguły lub kompleksy reguł mogą być elementarne lub złożone. Na przykład, gdy U jest zbiorem sytuacji, można badać spełnialność formuł lub zbiorów formuł w (dla) danej sytuacji (obiekt elementarny) bądź dla pewnego zbioru sytuacji (obiekt złożony).

5 Podsumowanie

W artykule przedstawiliśmy w zarysie główne idee modelu pojedynczego agenta, systemu agentów i zachowań grupowych, opartego na pojęciu kompleksu reguł. Przypomnijmy, że kompleks reguł jest granulą informacyjną w pewnej przestrzeni przybliżeń, zbudowaną z reguł przyjętego języka reprezentacji wiedzy. Widząc konieczność uwzględnienia niepewności i niepełności informacji dostępnej agentom, proponujemy użyć metod i narzędzi przybliżonych, opartych na teorii zbiorów przybliżonych. Praca nad modelem nie jest zakończona, a wprost przeciwnie: pojawiają się wciąż nowe interesujące zagadnienia, jak komunikacja między agentami czy dochodzenie do porozumienia drogą negocjacji.

Literatura

[1] T. R. Burns, A. Gomolińska. The theory of socially embedded games: The mathematics of social relationships, rule complexes, and action modalities. *Quality and Quantity Int. J. Methodology*, 34(4):379–406, 2000.

[2] T. R. Burns, A. Gomolińska. Socio-cognitive mechanisms of belief change: Applications of generalized game theory to belief revision, social fabrication, and self-fulfilling prophesy. *Cognitive Systems Research*, 2(1):39–54, 2001.

[3] T. R. Burns, A. Gomolińska, L. D. Meeker. The theory of socially embedded games: Applications and extensions to open and closed games. *Quality and Quantity Int. J. Methodology*, 35(1):1–32, 2001.

[4] A. Gomolińska. Rule complexes for representing social actors and interactions. *Studies in Logic, Grammar and Rethoric*, 3(16):95–108, 1999.

[5] A. Gomolińska. A comparative study of some generalized rough approximations. *Fundamenta Informaticae*, 51(1–2):103–119, 2002.

[6] A. Gomolińska. Derivability of rules from rule complexes. *Logic and Logical Philosophy*, 10:21–44, 2002.

[7] A. Gomolińska. On consistency of rule complexes. *Acta Universitatis Wratislaviensis 2466, seria Logika*, 22:21–36, 2002.

[8] A. Gomolińska. Fundamental mathematical notions of the theory of socially embedded games: A granular computing perspective. S. K. Pal, L. Polkowski, A. Skowron, redaktorzy, *Rough-Neural Computing: Techniques for Computing with Words*, strony 411–434, Berlin Heidelberg, 2004. Springer.

[9] A. Gomolińska. A graded applicability of rules. S. Tsumoto, R. Słowiński, J. Komorowski, J. W. Grzymała-Busse, redaktorzy, *Proc. 4th Int. Conf. Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC'2004), Uppsala, Sweden, 2004, June 1-5, LNAI 3066*, strony 213–218, Berlin Heidelberg, 2004. Springer.

[10] A. Gomolińska. A graded meaning of formulas in approximation spaces. *Fundamenta Informaticae*, 60(1–4):159–172, 2004.

[11] A. Gomolińska. Satisfiability and meaning of formulas and sets of formulas in approximation spaces. *Fundamenta Informaticae*, 67(1–3):77–92, 2005.

[12] A. Gomolińska. Towards rough applicability of rules. B. Dunin-Kęplicz, A. Jankowski, A. Skowron, M. Szczuka, redaktorzy, *Monitoring, Security, and Rescue Techniques in Multiagent Systems*, Advances in Soft Computing, strony 203–214, Berlin, 2005. Springer.

[13] S. Leśniewski. Podstawy ogólnej teoryi mnogości, I. *Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie*, 2, 1916. Patrz też S. J. Surma et al., red., Stanisław Leśniewski Collected Works, strony 128–173, Dordrecht, 1992. Kluwer.

[14] T. Y. Lin. Granular computing: fuzzy logic and rough sets. L. A. Zadeh, J. Kacprzyk, redaktorzy, *Computing with Words in Information/Intelligent Systems*, wolumen 1, strony 183–200, Heidelberg, 1999. Physica.

[15] Q. Liu. Granular language and its applications in problem solving. S. Tsumoto, R. Słowiński, J. Komorowski, J. W. Grzymała-Busse, redaktorzy, *Proc. 4th Int. Conf. Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC'2004), Uppsala, Sweden, 2004, June 1–5, LNAI 3066*, strony 127–132, Berlin Heidelberg, 2004. Springer.

[16] J. Łukasiewicz. Die logischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. L. Borkowski, redaktor, *Jan Łukasiewicz — Selected Works*, strony 16–63, Amsterdam London Warsaw, 1970. North Holland, Polish Scientific Publ. Pierwsze wydanie Kraków, 1913.

[17] W. Marciszewski, redaktor. *Mała encyklopedia logiki.* Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław, 1988. Wydanie drugie.

[18] S. H. Nguyen, A. Skowron, J. Stepaniuk. Granular computing: A rough set approach. *J. Comput. Intelligence*, 17(3):514–544, 2001.

[19] Z. Pawlak. Information systems — Theoretical foundations. *Information Systems*, 6(3):205–218, 1981.

[20] Z. Pawlak. Rough sets. *Int. J. Computer and Information Sciences*, 11:341–356, 1982.

[21] Z. Pawlak. *Systemy informacyjne. Podstawy teoretyczne.* Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1983.

[22] Z. Pawlak. *Rough Sets. Theoretical Aspects of Reasoning About Data.* Kluwer, Dordrecht, 1991.

[23] Z. Pawlak, A. Skowron. Rough membership functions. L. A. Zadeh, J. Kacprzyk, redaktorzy, *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*, strony 251–271, New York, 1994. John Wiley & Sons.

[24] J. F. Peters, A. Skowron, J. Stepaniuk, S. Ramanna. Towards an ontology of approximate reason. *Fundamenta Informaticae*, 51(1–2):157–173, 2002.

[25] L. Polkowski, A. Skowron. Rough mereology. *LNAI 869*, strony 85–94, Berlin, 1994. Springer.

[26] L. Polkowski, A. Skowron. Rough mereology: A new paradigm for approximate reasoning. *Int. J. Approximated Reasoning*, 15(4):333–365, 1996.

[27] L. Polkowski, A. Skowron. Towards adaptive calculus of granules. L. A. Zadeh, J. Kacprzyk, redaktorzy, *Computing with Words in Information/Intelligent Systems*, wolumen 1, strony 201–228, Heidelberg, 1999. Physica.

[28] L. Polkowski, A. Skowron. Rough mereological calculi of granules: A rough set approach to computation. *J. Comput. Intelligence*, 17(3):472–492, 2001.

[29] L. Polkowski, A. Skowron. Rough mereology in information systems. A case study: Qualitative spatial reasoning. L. Polkowski, S. Tsumoto, T. Y. Lin, redaktorzy, *Rough Set Methods and Applications: New Developments in Knowledge Discovery in Information Systems*, strony 89–135, Heidelberg New York, 2001. Physica.

[30] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13:81–132, 1980.

[31] A. Skowron, J. Stepaniuk. Generalized approximation spaces. *Proc. 3rd Int. Workshop on Rough Sets and Soft Computing, San Jose, USA, 1994, November 10-12*, strony 156–163, 1994.

[32] A. Skowron, J. Stepaniuk. Tolerance approximation spaces. *Fundamenta Informaticae*, 27:245–253, 1996.

[33] A. Skowron, J. Stepaniuk. Information granules in distributed environment. N. Zhong, A. Skowron, S. Ohsuga, redaktorzy, *Proc. Conf. New Directions in Rough Sets, Data Mining, and Granular Soft Computing, Yamaguchi, Japan, 1999, November 9-11, LNAI 1711*, strony 357–365, Berlin, 1999. Springer.

[34] A. Skowron, J. Stepaniuk. Towards discovery of information granules. *Proc. 3rd European Conf. Principles and Practice of Knowledge Discovery in Databases, Prague, Czech Republic, 1999, September 15-18, LNAI 1704*, strony 542–547, Berlin, 1999. Springer.

[35] A. Skowron, J. Stepaniuk. Information granules and rough-neural computing. S. K. Pal, L. Polkowski, A. Skowron, redaktorzy, *Rough-Neural Computing: Techniques for Computing with Words*, strony 43–84, Berlin Heidelberg, 2004. Springer.

[36] A. Skowron, J. Stepaniuk, S. Tsumoto. Information granules for spatial reasoning. *Bull. Int. Rough Set Society*, 3(4):147–154, 1999.

[37] A. Skowron, R. Swiniarski, P. Synak. Approximation spaces and information granulation. S. Tsumoto, R. Słowiński, J. Komorowski, J. W. Grzymała-Busse, redaktorzy, *Proc. 4th Int. Conf. Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC'2004), Uppsala, Sweden, 2004, June 1-5, LNAI 3066*, strony 116–126, Berlin Heidelberg, 2004. Springer.

[38] J. von Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behaviour.* Princeton University Press, 1944. Wydanie z 1972.

[39] S. K. M. Wong, L. S. Wang, Y. Y. Yao. On modelling uncertainty with interval structures. *Computational Intelligence*, 11:406–426, 1995.

[40] Y. Y. Yao. Granular computing. *Proc. of CRSSC'2004*, strony 1–5, 2004. ISSN 1002-137X.

[41] Y. Y. Yao, C.-J. Liau. A generalized decision logic language for granular computing. *Proc. of FUZZ-IEEE'2002*, strony 1092–1097, 2002.

[42] Y. Y. Yao, S. K. M. Wong, T. Y. Lin. A review of rough set models. T. Y. Lin, N. Cercone, redaktorzy, *Rough Sets and Data Mining: Analysis of Imprecise Data*, strony 47–75, Boston London Dordrecht, 1997. Kluwer Acad. Publ.

[43] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex system and decision processes. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 3:28–44, 1973.

[44] L. A. Zadeh. Fuzzy sets and information granularity. M. Gupta, R. Ragade, R. Yager, redaktorzy, *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*, strony 3–18, Amsterdam, 1979. North-Holland.

[45] L. A. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 4(2):103–111, 1996.

[46] L. A. Zadeh. Toward a theory of fuzzy information granulation and its certainty in human reasoning and fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:111–127, 1997.

[47] L. A. Zadeh, J. Kacprzyk, redaktorzy. *Computing with Words in Information/Intelligent Systems.* Physica, Heidelberg, 1999.

[48] W. Ziarko. Variable precision rough set model. *J. Computer and System Sciences*, 46(1):39–59, 1993.

[49] W. Ziarko. Probabilistic decision tables in the variable precision rough set model. *J. Comput. Intelligence*, 17(3):593–603, 2001.