

Barbara Dudel

Uczeń zdolny matematycznie

Prawidłowe funkcjonowanie człowieka we współczesnym, nieustannie zmieniającym się świecie wymaga odpowiedniego przygotowania, jakie zapewnić mu powinna, m.in., współczesna szkoła. Szkoła, dbająca nie tylko o odpowiedni poziom wiedzy i umiejętności przyswojonych przez ucznia, ale nastawiona także na jego indywidualny rozwój. Coraz częściej zwraca się uwagę na zainteresowania uczniów, ich potrzeby i predyspozycje. Rozwijanie zdolności dzieci stanowi zatem poważne wyzwanie dla współczesnej edukacji.

Cechy ucznia zdolnego

W literaturze psychologicznej i pedagogicznej szeroko opisuje się ucznia zdolnego wskazując na cechy wyróżniające go w środowisku szkolnym. Najczęściej zwraca się uwagę na wysoki poziom zdolności ogólnych, szybkość i łatwość nabywania nowych doświadczeń i uczenia się, oraz wysoki poziom osiągnięć szkolnych.

U dzieci zdolnych charakterystyczne jest przyspieszenie rozwoju obserwowane od wczesnych okresów w różnych sferach. W szkole wyróżniają się dobrym koncentrowaniem uwagi na podejmowanych działaniach i osiągnięciami powyżej przeciętnych oraz rozległymi i silnymi zainteresowaniami. Szybko zapamiętują i łatwo przyswajają złożone treści, rozumieją złożone wskazówki. Osoby te mają znacznie większe od przeciętnych szanse twórczych osiągnięć, które nie tylko świadczą korzystnie o ich możliwościach rozwoju, ale mogą mieć bardzo dużą obiektywną wartość społeczną¹. Dziecko zdolne wyróżnia się aktywnością intelektualną, zdol-

¹ G. Lewis, *Jak wychować zdolne dziecko*, Warszawa 1998; W. Limont, J. Cieślukowska, *Czy potrzebna jest pedagogika zdolności?*, [w:] *Teoria i praktyka edukacji uczniów zdolnych*,

nością do abstrakcyjnego i syntetycznego myślenia, z czego wynika upodobanie do rozwiązywania problemów intelektualnych. Charakteryzuje je postawa dociekliwości, intelektualnej ciekawości, wewnętrzna motywacja.

Pojęcie zdolności matematycznych

Matematyka – dziedzina wiedzy, która w społecznej opinii jest trudniejsza do opanowania niż inne. Brak jednoznacznej definicji tego pojęcia, różnorodność i wielość jego określeń, ukazują złożony obraz matematyki jako nauki i jej charakter².

Matematyka jako „wiedza o liczbach i operacjach na nich, o ich związkach, kombinacjach, generalizacjach i abstrakcjach, o przestrzennych konfiguracjach, o ich strukturze, mierzeniu, transformacjach i generalizacjach”³ ma swoją specyfikę, która m.in. wyraża się w następujących cechach:

1. język matematyki jest abstrakcją wyższego rzędu, aniżeli język innych nauk,
2. matematyka nie jest weryfikowalna empirycznie⁴.

Zdolności matematyczne są zdolnościami specjalnymi i odnoszą się tylko do dziedziny matematyki. Już w 1922 roku wyodrębniono dwa typy uzdolnienia matematycznego. Były to „zdolność rozumienia i pamiętania wzorów, twierdzeń i dowodów oraz zdolność wykorzystania tej wiedzy w procesie rozwiązywania zadań”⁵. W 1931 roku wydzielono cztery komponenty: przestrzenny, logiczny, liczbowy, symboliczny. W skład komponentu przestrzennego wchodzi: rozumienie obrazów i figur przestrzennych oraz ich kompleksów, pamięć obrazów przestrzennych, abstrakcje przestrzenne, kombinowanie przestrzenne. Do komponentu logicznego zalicza się kształtowanie pojęć, rozumienie, pamiętanie, samodzielne znajdowanie ogólnych związków pojęciowych, rozumienie, pamiętanie i samodzielne wyprowadzanie twierdzeń i dowodów zgodnie z zasadami logiki formalnej. Kom-

W. Limont (red.), Kraków 2004; B. Lipnicka, *Kształtowanie zdolności i talentu dziecka. Wspierająca funkcja rodziny*, Kraków 2000; W. Panek, *Rozpoznawanie dzieci uzdolnionych i praca z nimi w placówkach wychowania przedszkolnego*, [w:] *Psychologiczne uwarunkowania rozwoju uczniów zdolnych oraz wpływ na ich funkcjonowanie w sytuacjach szkolnych i rodzinnych*, W. Panek (red.), Białystok 1992.

² J. Tocki, *Struktura procesu kształcenia matematycznego*, cz. 1, Rzeszów 2006, s. 140-142.

³ A. Dąbek, *Psychologiczna analiza zdolności matematycznych uczniów, struktura i kształcenie*, Zielona Góra 1984, s. 19.

⁴ K. Kotlarski, *Czynniki oddziałujące na poziom uzdolnień matematycznych*, Poznań 1990.

⁵ A. Dąbek, *Psychologiczna analiza zdolności matematycznych...*, op. cit., s. 22.

ponent liczbowy zawiera: kształtowanie pojęć liczbowych i pamięć liczb i rozwiązań liczbowych. A do komponentu symbolicznego należą: rozumienie symboli, pamiętanie symboli, operacje na symbolach⁶.

Mózg dzieci uzdolnionych matematycznie ukierunkowany jest na wyodrębnianie z otaczającego świata bodźców o charakterze stosunków przestrzennych, liczbowych oraz symboli matematycznych. Wskutek oddziaływania bodźców o charakterze matematycznym powstają łatwo i szybko skojarzenia niewymagające dużego wysiłku i starań. Matematyczny typ umysłowości według B. Hornowskiego⁷ charakteryzuje się: szybkim pojmowaniem struktury zadania i spostrzeganiem materiału matematycznego, szybką przeróbką informacji matematycznej, w tym myśleniem logicznym na materiale liczbowym, przestrzennym oraz symboli matematycznych, zdolnością szybkiego i szerokiego uogólniania stosunków i działań matematycznych, zdolnością streszczania procesu rozumowania matematycznego tj. zdolnością myślenia strukturami zredukowanymi, dążeniem do rozwiązań jasnych, prostych, ekonomicznych i racjonalnych, umiejętnością szybkiego i dowolnego zmieniania kierunku procesu myślowego, długotrwałym przechowywaniem informacji matematycznych: typowych, charakterystycznych schematów, rozumowań i dowodów, metod i zasad rozwiązywania zadań.

W literaturze przedmiotu obecnych jest wiele określeń zdolności matematycznych. Często rozumiane są one jako:

- 1) „właściwości percepcji, myślenia i pamięci, które przejawiają się na materiale przestrzennym, liczb i symboli”⁸;
- 2) „zdolność rozumienia istoty matematycznych i podobnych do nich symboli, metod i dowodów; zdolność wyuczania i zapamiętywania ich, odtwarzania, kombinowania ich z innymi systemami, symbolami, metodami i dowodami; zdolność do wykorzystania ich przy rozwiązywaniu matematycznych i podobnych do nich zadań”⁹;
- 3) „uogólnione, zredukowane i plastyczne myślenie w zakresie stosunków matematycznych, symboli i oznaczeń matematycznych oraz matematyczny typ umysłowości”¹⁰;

⁶ Ibidem.

⁷ B. Hornowski, *Rozwój inteligencji i uzdolnień specjalnych*, Warszawa 1986.

⁸ K. Kollarski, *Czynniki oddziałujące na poziom uzdolnień...*, op. cit.

⁹ E. Stucki, *Edukacja wczesnoszkolna procesem stymulującym rozwój zdolności specjalnych*, Bydgoszcz 1983.

¹⁰ J. Białecki, *Kształtowanie się wybitnych uzdolnień i metody selekcji uczniów wybitnie uzdolnionych a olimpiady matematyczne*, [w:] *Materiały do nauczania psychologii*, seria II, t. 8, L. Wołoszynowa (red.), Warszawa 1979.

- 4) „indywidualno-psychiczne właściwości (przede wszystkim umysłowych czynności), odpowiadające potrzebom matematycznej działalności ucznia i warunkujące przy pozostałych jednakowych warunkach powodzenie w twórczym opanowaniu matematyki jako przedmiotu szkolnego w szczególności stosunkowo szybkie, łatwe i głębokie opanowanie wiedzy, umiejętności i nawyków w dziedzinie matematyki”¹¹.

Edyta Gruszczyk-Kolczyńska zwraca uwagę, iż zdolności matematyczne pozwalają na osiąganie ponadprzeciętnych wyników w działalności matematycznej i wyróżnia dwa poziomy takich uzdolnień:

- uzdolnienia pozwalające na szybkie i dobre wyniki w opanowaniu szkolnego zakresu matematyki (typ szkolny),
- uzdolnienia do twórczej i naukowej działalności matematycznej (typ naukowy)¹².

Struktura zdolności matematycznych

Mimo licznych definicji, zdolności matematycznych nie można dobrze zrozumieć, jeśli nie weźmie się pod uwagę ich wewnętrznej struktury. Zastosowana analiza czynnikowa – jako metoda badania zdolności matematycznych – pozwoliła wyróżnić w nich następujące czynniki, które pozostają ze sobą w ścisłym związku:

- ogólny czynnik matematyczny, który w pewnym stopniu decyduje o powodzeniu w rozwiązywaniu zadań matematycznych;
- czynnik liczbowy, który był wspólny dla wszystkich testów wymagających operacji umysłowych;
- czynniki przestrzenne, które dotyczą zdolności orientowania się we wzrokowo spostrzeganej przestrzeni, obecne w zadaniach geometrycznych;
- czynniki werbalne, przejawiające się w tekstowych zadaniach matematycznych, różne, często złożone sformułowania słowne;
- czynniki rozumowania, które są składnikiem struktury ogólnych zdolności umysłowych,
- czynniki szkolne – wyrażają się w nich osobowościowe cechy

¹¹ W. A. Krutieccki, za: A. Dąbek, *Psychologiczna analiza zdolności matematycznych...*, op. cit.

¹² E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki*, Warszawa 1989.

jednostek, tj. dążenie do sukcesu, ambicja, wytrwałość, motywacja do uczenia się¹³.

Według K. Kotlarskiego uczeń uznany za zdolnego matematycznie odznacza się:

- 1) zdolnością uogólniania,
- 2) zdolnością rozumowania matematycznego, czyli logicznego myślenia na materiale matematycznym,
- 3) zdolnością giętkiego myślenia w obrębie materiału matematycznego,
- 4) zdolnością skracania ogniw myślenia,
- 5) zdolnością zmiany kierunku myślenia w zależności od potrzeb i sytuacji,
- 6) dążeniem do jasności, prostoty i ekonomiki rozwiązań¹⁴.

Kompletny model struktury matematycznych uzdolnień uczniów w wieku szkolnym opracował W. A. Krutiecki. Rozróżniając etapy: poznanie informacji matematycznych i manipulowanie nimi w celu rozwiązania zadania przyporządkował każdemu z nich charakterystyczne zdolności, które najczęściej ujawniają się w tych momentach procesu rozwiązywania problemów o charakterze matematycznym.

Zgodnie z przyjętą podstawą teoretyczną, pierwszemu etapowi rozwiązywania problemu przypisana została zdolność poznawania formalnej struktury zadania. W drugim etapie, dotyczącym manipulacji informacją matematyczną, przejawiają się takie zdolności, jak zdolność uogólniania, logicznego myślenia, giętkość myślenia itd. Jednak w procesie rozwiązywania zadania te dwa etapy zachodzą właściwie równocześnie, gdyż poznanie nie jest bierne, lecz jest procesem aktywnym, mającym na celu znalezienie rozwiązania. Zatem, rozwiązanie zadania następuje już w czasie jego czytania, ponieważ uczeń odnosi poznawane informacje do swojej wiedzy matematycznej, porównuje, wnioskuje, ocenia. Wynika stąd, że zdolność poznawania formalnej struktury zadania jest zdolnością złożoną. Wymaga zdolności do skracania procesu rozumowania i giętkości myślenia. Ponadto uogólnionego poznawania związków i zależności w oderwaniu od ich przedmiotowej i liczbowej formy. Komponenty tej struktury zdolności matematycznych są ściśle ze sobą powiązane, a ich łączne działanie określa aktywność jednostki rozwiązującej zadanie.

¹³ A. Dąbek, *Psychologiczna analiza zdolności matematycznych...*, op. cit.

¹⁴ K. Kotlarski, *Czynniki oddziałujące na poziom uzdolnień...*, op. cit.

**Schemat ogólny struktury uzdolnień matematycznych w wieku szkolnym
(według W. A. Krutieckiego)**

Etapy	Elementy zdolności
Odbieranie informacji matematycznej	Zdolności postrzegania (dostrzegania) materiału matematycznego
	Zdolności pojmowania (chwytania) formalnej struktury zadania
Przeróbka informacji matematycznej	Zdolności logicznego myślenia za pomocą symboli matematycznych (stosunki, liczby, oznaczenia)
	Zdolności (szybkiego i szerokiego) uogólniania materiału matematycznego (przedmiotów, stosunków i działań)
	Zdolności myślenia strukturami zredukowanymi (skracanie procesu rozumowania i działań)
	Zdolności giętkiego myślenia (dążenie do rozwiązań jasnych, prostych, ekonomicznych i racjonalnych)
	Zdolności (szybkiego i dowolnego) zmieniania kierunku myślenia (odwracalność)
Przechowywanie informacji matematycznej	Zdolności do plastycznego myślenia w działaniu matematycznym (dążenie do prostych rozwiązań)
	Pamięć matematyczna (uogólnione pamiętanie stosunków matematycznych, typowych charakterystyk, schematów rozumowań i dowodów, metod i zasad rozwiązywania zadań)
Ogólny składnik syntetyczny-	Matematyczne ukierunkowanie umysłu (zamiłowanie do interpretowania świata w kategoriach logicznych i matematycznych)

Źródło: E. Stucki, *Edukacja wczesnoszkolna procesem stymulującym rozwój zdolności specjalnych*, Bydgoszcz 1983, s. 73

Na podstawie licznych obserwacji uczniów zdolnych matematycznie stwierdza się, że:

- uczeń wykazujący uzdolnienia do matematyki uczy się o wiele łatwiej, bez nadmiernego wysiłku,
- procedura metodyczna związana z wprowadzaniem nowych zagadnień jest dla nich za długa, nieekonomiczna i nużąca,
- uczniowi zdolnemu matematycznie wystarczy kilkudziesięciu wprowadzenie techniki postępowania,
- uczeń rozumie i przyswaja materiał bardzo szybko, wykrywając i ustalając współzależności zawarte w zadaniach,
- specyfika aktywności umysłowej polega na tendencji do myślenia „na skróty”, rozwiązuje zadania z pominięciem proponowanych przez metodykę etapów pośrednich,

- uczeń zdolny wykazuje zwiększoną sprawność w obliczu zadań niestandardowych, wymagających tworzenia nowych, nieznanych dotąd strategii postępowania – alternatywne sposoby rozwiązań,
- intuicyjnie dostrzegane merytoryczne analogie pomiędzy pokrewnymi tematami stanowią inspirację do wykorzystywania poprzednio zdobytej wiedzy,
- odpowiedzi z reguły są poprawne, celne i uderzająco logiczne,
- uczniowi trudno jednak opisać drogę swego rozumowania,
- przejawia też żywą wyobraźnię matematyczną oraz trwałą pamięć przyswojonych wiadomości¹⁵.

Możliwość rozwijania zdolności matematycznych uczniów

W uczeniu się matematyki jako przedmiotu szkolnego występują trzy niemal równoczesne procesy:

- a) nabywanie nowych wiadomości – mogą być one sprzeczne z tym, co uczeń wcześniej wiedział, bądź też stanowić poszerzenie jego wiedzy,
- b) manipulowanie wiedzą tak, by była ona przydatna dla rozwiązywania nowych problemów – uczeń uczy się analizować wiadomości i porządkować je,
- c) ocena jawna, czyli sprawdzenie, czy wiadomości były stosowane w sposób adekwatny do zadania.

Z tymi trzema aspektami uczenia się matematyki, wiąże się jeszcze problem efektywnego pamiętania przyswojonej wiedzy, który jednak w dużym stopniu zależy od osiągnięć w zakresie pozostałych aspektów uczenia się.

Stąd też wynika, iż zagadnienie kształtowania i rozwijania zdolności matematycznych można rozpatrywać z różnych punktów widzenia. Wyróżnia się niejako trzy tory kształcenia zdolności:

- a) kształcenie treściowej strony myślenia – pojęć i konkretnych umiejętności matematycznych, kładąc nacisk na posiadanie różnorodnych informacji,
- b) kształcenie operacyjnej strony myślenia – najczęściej uwagi poświęca się posługiwaniu się wiedzą matematyczną w celu rozwiązywania różnorodnych problemów matematycznych,

¹⁵ D. Klus-Stańska, *Dziecko uzdolnione matematycznie. Adrian – odsłona pierwsza*, [w:] *Światy dziecięcych znaczeń*, D. Klus-Stańska (red), Warszawa 2004.

- c. kształcenie tzw. krytycznego myślenia – wiąże się z oceną wiedzy i jej zastosowania¹⁶.

Duże znaczenie przypisuje się również działaniom zmierzającym do rozwijania właściwej motywacji do uczenia się, opartej na zainteresowaniach, dążeniu do kompetencji. Analiza literatury dotyczącej możliwości motywowania uczniów na lekcjach matematyki wskazuje, że duży potencjał w tym zakresie tkwi w zadaniach matematycznych¹⁷.

Należy pamiętać, że każde zadanie matematyczne zawiera wiele elementów i cech odnoszących się do formy, treści i języka zadania, które stają się środkami motywacji. Na zachowanie się ucznia i jego stosunek do zadania mają również wpływ środki znajdujące się „obok” zadania. Z wypowiedzi i zachowań uczniów wynika, że nie ma środków, które by w jednakowym stopniu wzbudzały u każdego z nich motywację, o jednakowym lub przynajmniej zbliżonym kierunku i sile. Fakt ten podkreśla wagę i konieczność indywidualizacji nauczania¹⁸, traktowania każdego ucznia tak, aby miał on możliwość zaspokajania swoich, indywidualnych, potrzeb poznawczych.

Skuteczność rozwijania zdolności warunkuje potrzeba ich rozwoju w trakcie przyswajania i stosowania wiedzy. Kształcenie zdolności powinno realizować nauczanie matematyki łączące takie podejścia, które w efekcie pozwolą uzyskać precyzyjne, uporządkowane rozumienie pojęć matematycznych i świadome z nich korzystanie.

Problem zdolności matematycznych rozpatrywany jest głównie z punktu widzenia procesów myślowych zachodzących przy rozwiązywaniu problemów. Stąd też postępowanie dydaktyczne mające na celu kształcenie matematycznych zdolności powinno koncentrować się na rozwijaniu operacyjnej strony myślenia, tym bardziej, że matematyka ma charakter operatywny. Uwzględnia to koncepcja tzw. czynnościowego nauczania matematyki, rozumiana jako „postępowanie dydaktyczne uwzględniające stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równoległe z psychologicznym procesem interioryzacji prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażonych do operacji abstrakcyjnych”¹⁹, zakładająca:

- 1) wydobywanie przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie,

¹⁶ A. Dąbek, *Psychologiczna analiza zdolności matematycznych...*, op. cit., s. 31-32.

¹⁷ M. Czajkowska, *Wartości motywacyjne zadań matematycznych*, Kielce 2005.

¹⁸ Ibidem.

¹⁹ Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, Warszawa 1969, s. 118.

- 2) świadome organizowanie sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu matematycznego myślenia ucznia jako specyficznego działania, jako świadomego posługiwania przyswajanymi stopniowo się operacjami²⁰.

Metoda czynnościowa wykorzystuje elementy różnych koncepcji nauczania, m.in.:

- podejście konstruktywistyczne, w którym uczeń konstruuje swoją wiedzę w interakcji z materiałami, zadaniami, na drodze bogatych doświadczeń, pod kierunkiem nauczyciela i w interakcji z kolegami,
- nauczanie realistyczne, gdzie zakłada się wychodzenie w nauczaniu od sytuacji rzeczywistych i stawia się za cel matematyzację pionową, budowanie kolejnych piętér abstrakcji,
- strategię problemową, dzięki której zwiększa się trwałość przyswajanej wiedzy,
- pogląd J. Dewey'a, który podkreśla, że stroną aktywną na lekcji powinien być przede wszystkim uczeń, natomiast nauczyciel powinien pełnić rolę doradcy i inspiratora²¹.

Prawidłowość i efektywność stosowanej koncepcji będzie zapewniona jeśli w organizacji procesu kształcenia zostaną uwzględnione następujące zabiegi dydaktyczne:

- wiązanie treści matematycznych z wyraźnie sformułowanymi schematami postępowania,
- wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi,
- wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy,
- uwzględnianie różnych ciągów operacji prowadzących do tego samego rezultatu,
- stawianie ucznia w sytuacjach konfliktowych, w których przyswojone schematy postępowania zawodzą, i w których uczeń musi dokonać przekształcenia starego schematu lub wypracować nowy,
- opis słowny operacji, którymi uczeń myśli (zwłaszcza w młodszych klasach),
- właściwe i celowe wiązanie czynności konkretnych z operacjami myślowymi,

²⁰ Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, op. cit., s. 118.

²¹ H. Siwek, *Nauczanie czynnościowe matematyki*, Warszawa 1998.

- algorytmizacja rozwiązywania zadania tam, gdzie to jest celowe i możliwe,
- uczenie planowania działań i swobodnego posługiwania się poznanymi operacjami,
- zwrócenie uwagi na to, aby stosowana symbolika miała również charakter operacyjny, tzn. aby wizualnie sugerowała operację²².

Nauczanie czynnościowe, które uwzględni ścisłość i precyzję abstrakcyjnych pojęć matematycznych, w głębokim powiązaniu z uznawanymi dziś psychologicznymi podstawami rozwoju intelektualnego ucznia ma swoje zastosowanie na

Zakończenie

Edmund Stucki opisując czynniki determinujące rozwój zdolności matematycznych uczniów w procesie edukacyjnym proponuje, aby już od pierwszych lat edukacji matematycznej dzieci uwzględniać sytuacje, które dadzą możliwość kształtowania wielu umiejętności stanowiących fundament rzetelnych kompetencji ucznia w dziedzinie matematyki. Sugeruje następujący zestaw czynności:

- uwzględnianie pełnej struktury treści nauczania,
- doprowadzanie do uogólnień,
- uczenie rozumienia ogólnej struktury zadań,
- wdrażanie algorytmu czynności rozwiązywania zadań tekstowych,
- stosowanie ćwiczeń i serii pytań rozwijających myślenie,
- wykorzystanie możliwości każdego ucznia i kształtowanie motywacji uczenia się²³.

Do rozwoju uzdolnień i zainteresowań dochodzi wówczas, gdy uczeń znajdzie się w zespole sprzyjającym zaspokajaniu jego potrzeb edukacyjnych. Ogromną rolę w tym procesie odgrywa także nauczyciel. Kształcenie uczniów zdolnych matematycznie może przebiegać zarówno wewnątrz normalnego systemu szkolnego jak i korzystając z indywidualnego toku kształcenia. Odpowiednie rozporządzenia regulują kwestie kształcenia dzieci zdolnych. Jednoznacznie określają obowiązki, tak szkoły jak i nauczyciela, wobec ucznia zdolnego.

²² Ibidem.

²³ E. Stucki, *Edukacja wczesnoszkolna...*, op. cit.