

MATEMATYKA W CENTRUM UWAGI

JAK MOŻEMY POMÓC DZIECKU W UCZENIU SIĘ?

*„Stosunek do matematyki dzieli ludzi na tych,
którzy się w niej lubują i na takich,
którzy jej nie cierpią,
ponieważ nie potrafią zagustować
w wędrówkach po jej przestworzach”.*

S. Lem

Wiedza i umiejętności matematyczne pełnią w naszym codziennym życiu coraz bardziej istotną rolę. Użyteczność matematyki nabiera coraz większego znaczenia. Oprócz tego ułatwia komunikowanie się w różnych sytuacjach i w różny sposób, zdobywanie informacji i lepsze rozumienie wielu zjawisk. Dzięki niej możliwe staje się radzenie sobie w zaskakująco wielu, czasami nietypowych sytuacjach. Matematyka może uczyć takich metod postępowania i rozumowania, które przenoszą się z sukcesem na wiele innych dziedzin życia.

Edukacja matematyczna w klasach I-III, w starszych klasach matematyka, jest tą dziedziną nauki, która po języku polskim jest wymieniana jako najważniejszy i niejednokrotnie najtrudniejszy przedmiot w szkole. Zdarza się, że ocena z matematyki stanowi kryterium oceny zdolności ucznia. Funkcjonuje powszechne przekonanie, że jeśli dziecko otrzymuje dobre noty z matematyki, to jest ogólnie zdolne i nie powinno mieć problemów z uczeniem się innych przedmiotów. Ale jest też i druga strona medalu – trudności w uczeniu się najczęściej także związane są z matematyką. Często też, matematyka to przedmiot powodujący niepowodzenia szkolne. Zdecydowanie jest to także dziedzina, w uczenie się której najczęściej zaangażowani są rodzice uczniów, jako osoby pomagające dziecku odrabiać pracę domową.

A może my, rodzice możemy przyczynić się do wzbudzenia zainteresowania matematyką, a przynajmniej może nie zbudować w dzieciach postawy niechęci wobec niej.

Uczenie się matematyki, na każdym poziomie kształcenia odbywa się poprzez rozwiązywanie problemów i zadań matematycznych.

Zadania matematyczne występujące w klasach młodszych mają różną strukturę i służą różnym celom. Najczęściej spotyka się dwie duże grupy zadań:

I. **zadania beztekstowe**, a wśród nich:

- zadania ćwiczenia – służące kształtowaniu i utrwalaniu techniki rachunkowej,
- zadania praktyczne – ruchowo-manipulacyjne i graficzne – ujawniające sens pojęć i operacji matematycznych,
- zadania logiczne – gry, zabawy, łamigłówki – rozwijają różne operacje myślowe, uczą pomysłowości i oryginalności w podejściu do zadań.

II. **zadania tekstowe**, nazywane zadaniami z treścią – łączą w sobie wcześniej wymienione cele a ponadto:

- ułatwiają kształtowanie oraz wprowadzanie podstawowych pojęć matematycznych z analizy realnych sytuacji życiowych,
- pozwalają na konkretyzację i pogłębienie rozumienia pojęć poprzez odnoszenie ich do różnych sytuacji praktycznych, zawierających aspekty matematyczne,
- wiążą matematykę z życiem i przygotowują uczniów do rozwiązywania różnych problemów praktycznych,
- umożliwiają uczenie się analizy i rozumienia tekstów matematycznych,
- utrwalają umiejętność wykonywania pamięciowych i pisemnych obliczeń,
- uczą twórczego posługiwania się poznanymi prawami i własnościami działań arytmetycznych,
- sprzyjają wielostronnej aktywizacji i rozwijaniu myślenia, skłaniając uczniów do wykonywania wielu operacji myślowych oraz rozumowań logicznych.

Celem nauczania matematyki w klasach początkowych jest, między innymi, kształcenie umiejętności rozwiązywania problemów, które traktowane są jako specyficzna sytuacja dydaktyczna. E. Gruszczyk-Kolczyńska podkreśla, że w takiej właśnie sytuacji dzieci zdobywają doświadczenie pozwalające im na:

- opanowanie podstawowych pojęć matematycznych,
- wykorzystanie metod w celu rozwiązania określonych problemów,

- oraz na kształtowanie postawy intelektualnej przejawiającej się w logicznym, twórczym i samodzielny myśleniu, pokonywaniu trudności.

Rozwiązywanie zadań jest głównym sposobem uczenia się matematyki i pokonywania trudności z tym związanych. Stanowią one integralną część procesu uczenia się matematyki. Proces rozwiązywania zadań tekstowych nie jest wcale łatwy. Rozwiązywanie zadań matematycznych niejednokrotnie stwarza problemy zarówno uczniom jak i nauczycielom. Uczeń ma problem jak rozwiązać zadanie, a nauczyciel jak nauczyć ucznia rozwiązywania zadań.

Sytuacja dydaktyczna związana z zadaniem odnosi się do sytuacji życiowej, takiej, która jest dziecku znana i naturalna. Trudność, która w niej występuje ma dość indywidualny charakter, gdyż to samo zadanie dla jednych może być łatwe, a dla innych okazać się może jako stosunkowo trudne. Może stać się nawet przeszkodą nie do pokonania. Zadania tekstowe stanowią podstawę pracy za zajęciach matematycznych, zarówno przy wprowadzaniu nowego materiału jak i przy stosowaniu nabytej wiedzy.

W najpopularniejszym ujęciu tego pojęcia uznaje się, że zadanie tekstowe składa się z sytuacji życiowej i warunków matematycznych określonych za pomocą wielkości danych i wielkości poszukiwanej, powiązanych ze sobą takimi zależnościami logicznymi, których ustalenie prowadzi do odpowiedzi na główne pytanie.

Analiza wielu definicji pojęcia *zadanie z treścią* pozwala zauważyć, że każde zadanie tekstowe składa się z dwóch warstw:

1. warstwy werbalnej, dotyczącej różnorodnych sytuacji życiowych (ale zawsze muszą one zawierać elementy, aspekty matematyczne), podanej w formie krótkiego opowiadania na temat różnych form współpracy dzieci i dorosłych (np. zabaw, zajęć szkolnych, czy pracy) lub w formie opisu dotyczącego zdarzeń czy procesów występujących w przyrodzie, technice,
2. warstwy matematycznej, którą stanowią dane i niewiadome (szukane), powiązane takimi zależnościami, że tworzą one problem matematyczny wymagający rozwiązania. Dane matematyczne mogą być wyrażone liczbami lub słownie, za pomocą terminów matematycznych, np. miar wielkości, liczebników głównych, porządkowych. Zależności między tymi danymi wyrażone są słownictwem potocznym, opisującym różne czynności (otrzymał, zgubił, kupił, oddał, odjechał, rozdał itp.) lub słownictwem paramatematycznym, typu: o tyle większy, o tyle mniejszy, starszy – młodszy, dwa razy dłuższy – dwa razy krótszy itp. Wszystkie te terminy i zwroty

mogą być przekładane na język operacji matematycznych – dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia.

Warstwy te, werbalna i matematyczna, wyznaczają strukturę zadania.

W podręcznikach do edukacji matematycznej spotkać można różnorodne zadania tekstowe. Każde z nich ma określoną rolę do spełnienia. Pośród różnych zadań wyróżnić należy zadania o treści statycznej – w formie opisu podanej (*W naszym ogródku jest piękna rabatka. Rosną tam w 7 rzędach kolorowe kwiaty, po 5 w każdym rzędzie. Ile kwiatów rośnie w naszym ogrodzie?*) i dynamicznej – zawierającej jakąś fabułę, „dzianie się” (*Mama zakłada rabatkę kwiatową. Zrobiła już 7 rzędów i sadi na w nich kwiaty, po 5 w każdym rzędzie. Ile kwiatów rośnie na naszej rabatce?*). Zadania przedstawiające sytuację statyczną wydają się być trudniejsze do rozwiązania dzieciom niż te, które prezentują sytuacje dynamiczną. Te pierwsze, w swej treści nie zawierają nazwy żadnych czynności, przez co trudniej jest dzieciom uchwycić, jakie działania matematyczne należy wykonać. Natomiast zadania o fabule dynamicznej są łatwiejsze do rozwiązania, gdyż opisują pewną akcję, zawierają czynność, która ułatwia dzieciom dokonanie wyboru odpowiedniej operacji matematycznej.

Ponadto, w podręcznikach można spotkać zadania z danymi jawnymi, półjawnymi i ukrytymi. Najłatwiejsze do rozwiązania są zadania z danymi jawnymi, gdyż uczniowie mając podane jednoznacznie wszystkie informacje niezbędne dla rozwiązania mogą bezpośrednio dokonywać operacji, obliczeń matematycznych. Trudniejsze są już zadania o danych półjawnych, ponieważ wymagają dodatkowych obliczeń, zanim doprowadza do końcowego wyniku. (*Zosia zebrała 2 kg czarnych jagód, a Kasia o 1 kg więcej. Ile kg jagód zebrały dziewczynki?*) Za to najtrudniejsze, z podanej grupy zadań, są te z danymi ukrytymi. W celu ich rozwiązania niezbędne jest zmienianie kolejności danych i rodzajów wykonywanych operacji matematycznych. Sprawiają uczniom najwięcej kłopotów (Cackowska M, 1993). (*Wieczorem w zagrodzie było kilkanaście owiec. Rano 6 z nich wypuszczono na łąkę a zostało jeszcze 5 owiec. Ile owiec było w zagrodzie wieczorem?*).

Wśród zadań tekstowych, uwzględniając ich stopień złożoności, wyróżnić trzeba zadania proste oraz zadania złożone. Zadania proste to takie, które można rozwiązać przy pomocy jednego działania: mnożenia, dzielenia, dodawania bądź odejmowania. Zadania proste mogą mieć różny charakter i stopień trudności: są wśród nich łatwe zadania, ale mogą być i trudne, np. takie, które sugerują rozwiązanie za pomocą odejmowania, a w istocie wymagają dodawania lub odwrotnie.

Zadanie złożone zaś, najczęściej składa się z dwóch, na początku edukacji, potem trzech i większej liczby zadań prostych. Rozwiązanie zadania złożonego wymaga w związku z tym, wykonania kilku działań arytmetycznych.

Zadania, które posiadają wszystkie informacje, dane, niezbędne do rozwiązania, noszą nazwę standardowych. Zadania, które nie spełniają takiego warunku, są to zadania niestandardowe – zadania, których nie da się rozwiązać. Jest to bardzo ciekawa i cenna grupa zadań matematycznych. Wśród zadań niestandardowych wyodrębnia się następujące grupy:

I. Zadania z nadmiarem danych:

1. zadania z nadmiarem danych nie związanych z rozwiązaniem, np. *Szkoła zasadziła 6 rzędów drzewek owocowych po 12 drzewek w każdym rzędzie i 50 krzewów agrestu. Ile drzewek zasadziła szkoła?*
2. zadania zawierające dane dublujące się, np. *Bartek kupił 3 książki po 12 zł za sztukę. Dał banknot 50 zł i otrzymał 14 zł reszty. Ile zapłacił za książki?*

II. Zadania niestandardowe zawierające za mało danych zadania, których nie można rozwiązać, np. *Pociąg przebył trasę z miasta A do miasta B w ciągu 6 godzin. Jaka była średnia prędkość pociągu?*

Rozwiązanie jest niejednoznaczne wskutek braku pewnych danych, np. *Jacek i Piotrek grali w warcaby. Gdy mama zawołała ich na kolację Jacek miał 5 figur więcej od Piotrka. Ile figur miał Piotrek?*

III. Zadania sprzeczne z treścią zadania bądź pytaniem w zadaniu, np. *Z naczynia odlano 7 litrów wody, a potem jeszcze 5 litrów. Ile litrów wody zostało w naczyniu, jeśli początkowo było w nim 10 litrów?*

W którym warunki są sprzeczne algebraicznie, np. *Tereska kupiła 5 zeszytów i dwa ołówki płacąc za to 16 złotych. Jej koleżanka Lucynka kupiła tę samą ilość zeszytów i ołówków płacąc przy takich samych cenach 20 złotych. Ile kosztował zeszyt a ile oówek?*

IV. Zadania o złej treści:

1. Nie ma związku między danymi a pytaniem, np. *30 uczniów szkoły należy do kółka matematycznego, a 42 do kółka biologicznego. Ilu uczniów ma wydelegować szkoła na wojewódzkie zawody sportowe?*
2. Bezsensowne z punktu widzenia życiowego, np. *turysta pieszy miał do przejścia trasę długości 380 km. Pierwszego dnia przeszedł 240 km. Ile km mu jeszcze zostało?*

3. O nie dość precyzyjnych warunkach, np. *Dwa dźwigi rozładowały barkę z piaskiem. Pierwszy dźwig pracował 5 godzin, drugi 3 godziny. Jak długo trwał rozładunek?*
4. Nie poddające się matematyzacji arytmetycznej, np. *Janek miał 13 lat i mierzył 1m 50 cm. Jaki wzrost ma w wieku 26 lat?* (B. Gleichgewicht, 1988).

Co z takimi zadaniami robić? Z racji ich wielkiej wartości dydaktycznej, należy traktować je z uwagą. Oprócz tego, że się stwierdzi, że zadanie nie jest do rozwiązania, trzeba odpowiedzieć na pytanie, dlaczego nie można go rozwiązać. A potem poprawić błąd, nieścisłość i rozwiązać. Takie działanie pozwala dziecku pogłębić umiejętność analizy treści zadania oraz rozumienia struktury zadania.

Rozwiązywanie i konstruowanie zadań to główne rodzaje aktywności matematycznej. Wyzwalana jest ona szczególnie przez zadania, które wymagają znacznego wysiłku myślowego, ale zapewniają też swobodę działania.

Rozwiązywanie zadań ma charakter poznawczo-decyzyjny. Rozwiązać zadanie tekstowe, bez względu na jego rodzaj, to powiązać ze sobą dane i odpowiedzieć na główne pytanie w nim postawione. Istotą pracy nad rozwiązaniem zadania tekstowego stanowi jego zrozumienie. Zrozumienie znaczenia jego wszystkich słów, pojęć, liczb i powiązań między nimi.

Rozwiązywanie zadań z treścią rozpoczyna się od poznania jego struktury, która zawiera trzy zasadnicze elementy:

- dane wyjściowe, które stanowią „bazę” sytuacji problemowej,
- cel, który wytyczył sobie uczeń w toku rozwiązywania zadania,
- wyjście wynikowe, czyli końcowe rozwiązanie danego problemu (Szpiter M. 1997).

Aby uczeń wiedział, na czym polega rozwiązywanie zadań musi poznać etapy tego postępowania, oczywiście w trakcie rozwiązywania zadań.

Sposób pracy nad rozwiązywaniem zadań z treścią, zdaniem dydaktyków, powinien uwzględniać następujące czynności (M. Cackowska, 1993):

1. Zapoznanie uczniów z treścią zadania.
2. Analiza zadania i układanie planu jego rozwiązania.
3. Wykonanie planu – rozwiązanie zadania.
4. Sprawdzanie rozwiązania i zredagowanie odpowiedzi.

Ad. 1. Zapoznanie uczniów z treścią zadania

Zapoznanie uczniów z treścią zadania, skierowanie ich uwagi na powiązanie pomiędzy danymi, pytaniem i sytuacją życiową zadania, pozwala na ukształtowanie ich właściwej postawy intelektualnej oraz na zdobycie doświadczenia poznawczego.

Ten punkt pracy nad rozwiązaniem zadania może być realizowany w różny sposób. Zapoznać uczniów z zadaniem może sam nauczyciel lub rodzic, w formie ustnej np. głośno je czytając, może to zrobić również w formie pisemnej, zapisując treść zadania na tablicy lub kartce. Może w proces zapoznania zaangażować uczniów, inne dziecko, prosząc, aby któryś z nich przeczytał treść, albo polecić, żeby uczniowie sami „po cichu” przeczytali zadanie. Jednak ten ostatni sposób można stosować tylko wtedy, gdy dzieci opanują technikę czytania cichego ze zrozumieniem. Tekst można czytać kilkakrotnie, powracać do niego, aby ułatwić uczniom zrozumienie i zapamiętanie zadania. Ważne jest słownictwo stosowane w treści zadania. Jeżeli występują wyrazy niezrozumiałe lub skomplikowane to nauczyciel, rodzic powinien je wyjaśnić, aby dziecko było w stanie zrozumieć istotę zadania. Jest jedna uwaga, nie należy cały czas czytać dziecku tekstu zadania. Ono powinno czytać samo, tak, aby wychwycić to, co jest niezbędne do rozwiązania zadania. Należy pamiętać, że każdorazowe przeczytanie tekstu zadania przez osobę dorosłą powinno być wzorem czytania tekstu matematycznego.

Ad. 2. Analiza zadania i układanie planu jego rozwiązania

Analiza zadania dotyczy tego, co uczeń dowiaduje się z jego treści. Wskazane jest wyjaśnienie słownictwa, które występuje w treści zadania. Jest to tzw. analiza warstwy werbalnej, fabuły zadania. Często dzieci nie rozumieją słów zawartych w zadaniu. Ocena, czy warunki podane w zadaniu są wystarczające do jego rozwiązania, czy zadanie jest ułożone poprawnie – stanowi wejście w analizę warstwy matematycznej. Wyodrębnienie tego, co jest dane, a co szukane, co można obliczyć na podstawie danych.

Analiza treści zadania, które zawiera wszystkie te elementy pomaga uczniowi ułożyć plan rozwiązania. Występują plany werbalne i matematyczne. Plany werbalne mogą być sporządzane w formie punktów, które są „tytułami” poszczególnych fragmentów zadania. Bardzo dobrze, jeśli dziecko opowie co należy zrobić nie podając przy tym liczb, a opisując ich znaczenie, które wynika z kontekstu zadania. *(aby obliczyć liczbę kwiatów w ogrodzie należy liczbę rzędów pomnożyć przez liczbę kwiatów w każdym rzędzie)*. Redagowanie słów-

ne planu pozwala utrwalić sposób postępowania podczas rozwiązywania zadań określonego typu. Akcentowane są zależności między liczbami a nie wartości liczbowe. Należy pamiętać, że liczby będą się zmieniały, zakres liczbowy będzie coraz większy a typ zadania tekstowego będzie pojawiał się wielokrotnie. Różne typy zadań prostych połączone ze sobą stanowią zadanie złożone. Umiejętność określania zależności pomiędzy występującymi w zadaniu prostym danymi i szukanyymi a potem poprawne powiązanie ich ze sobą pozwoli na szybsze rozwiązanie zadania złożonego, bez względu na zakres liczbowy. Plan matematyczny, to zapisanie rozwiązań w postaci formuł matematycznych.

Ad. 3. Wykonanie planu – rozwiązanie zadania

Polega na dokonaniu obliczeń arytmetycznych lub rozwiązaniu równania, zgodnie z ułożonym planem, w celu otrzymania wyniku końcowego. Rozwiązanie działań arytmetycznych wymaga znajomości kolejności wykonywania działań, umiejętności ich stosowania oraz sprawności rachunkowych.

Ad. 4. Sprawdzanie rozwiązania i zredagowanie odpowiedzi

To ostatni punkt procesu rozwiązywania zadań. Chodzi tu o sprawdzenie poprawności uzyskanych wyników. Wyniki te sprawdzane są za pomocą działań odwrotnych. Sprawdzanie rozwiązania zadania jest bardzo ważne, gdyż rozwija dokładność, rzetelność i samodzielność uczniów. Odpowiedź jest ważnym elementem spinającym pracę nad rozwiązywaniem zadania tekstowego. Wskazane jest ponowne przeczytanie pytania, bo często dzieci układają odpowiedź do ostatniego działania, i poprawne zredagowania odpowiedzi. Z punktu widzenia gramatyki jest to także ważny moment. Dzieci uczą się poprawnego układania zdań z liczebnikiem, który często jest przez nie sytuowany w różnych dziwnych miejscach.

Dużo kłopotów sprawia uczniom przestawienie się na tzw. myślenie matematyczne. Myśleniem matematycznym, według jest zespół czynności umysłowych wykonywanych przez ucznia samodzielnie, poprzez rozwiązywanie zadań i poszukiwanie problemów matematycznych. (Klus-Stańska D, 2004).

Dużo problemów sprawi dzieciom brak umiejętności koncentrowania uwagi na treści zadania, brak umiejętności planowania. Dodatkowe kłopoty sprawia także tematyka zadań. Uczniowie są bardziej zainteresowani treściami związanymi z najbliższym otoczeniem i bezpośrednimi doświadczeniami w domu i w szkole. Wówczas mają one dla nich sens życiowy i łatwiej mogą je sobie wyobrazić.

Rozwiązanie zadania utrudnia także słaba technika czytania i niski poziom rozumienia przeczytanego przez dziecko tekstu. Tekst matematyczny ma specyficzną budowę i wymaga odpowiednich technik czytania, gdyż w momencie kiedy uczeń przystępuje do czytania lub analizy, styka się ze światem abstrakcji, z odrębnym językiem i pojęciami matematycznymi.

Przeprowadzone badania podkreślają, że kompozycja tekstu matematycznego jest dość sztywna, a jego konstrukcja w dużej mierze „stymulowana jest prawidłami logiki i wymogami składni matematycznego języka” (Konior J. 1995), dlatego nie wszystkie dzieci w jednakowo krótkim czasie są w stanie opanować umiejętność rozumienia i interpretacji tekstu zadań.

Oprócz problemów w czytaniu ze zrozumieniem występują jeszcze innego rodzaju trudności w rozwiązywaniu zadań tekstowych. Oto ich zestawienie:

- trudności związane z brakiem znajomości elementarnych pojęć matematycznych,
- trudności związane z niezajomością logicznej struktury zadania,
- trudności z brakiem umiejętności analizowania, syntetyzowania, porównywania,
- trudności w dostrzeganiu problemu głównego, zależności pomiędzy wielkościami danymi a pytaniem,
- trudności w wyprowadzaniu wniosków,
- trudności związane z brakiem umiejętności ułożenia formuły matematycznej oraz wykonaniem działania,
- trudności w formułowaniu odpowiedzi końcowej. (Stucki E. 1994).

Wiele kłopotów wynika też stąd, że uczniowie nie potrafią właściwie interpretować podanych liczb w zadaniu, mają luki w wiedzy matematycznej. Jeżeli tak się dzieje, to uczeń nie potrafi ułożyć właściwej do danego zadania formuły matematycznej, a przez to i poprawnie go rozwiązać.

Dlatego też wyróżnia się trzy grupy tychże trudności:

1. trudności w rozumieniu języka matematycznego,
2. trudności w uogólnianiu i abstrakcji,
3. trudności w rozumieniu pojęć matematycznych (H. Moroz, 1988).

Uwarunkowania czytania ze zrozumieniem, także zadań matematycznych, a niski poziom tej umiejętności może zaowocować wyżej wskazanymi trudnościami, grupuje się w następujący sposób:

1. czynniki tkwiące w dziecku:
 - wystarczający zasób słownictwa, pojęć i doświadczeń życiowych dziecka,

- różnicowanie liter i umiejętność przełożenia ich na myśli, czyli biegła technika czytania,
 - koncentracja uwagi,
 - pamięć;
2. czynniki zewnętrzne w dużym stopniu zależą od nauczycieli i rodziców:
- warunki w jakich znajduje się dziecko podczas czytania (czynniki, które utrudniałyby skupienie uwagi dziecka),
 - stopień trudności i złożoności tekstu.

Analiza wyników badań dotyczących trudności w rozwiązywaniu zadań tekstowych prowadzi do następujących wniosków:

1. Jako, że niezrozumienie treści czytanego tekstu może wynikać z niejasnego dziecku słownictwa lub ze słabej techniki czytania, każda osoba pracująca z dzieckiem powinna tak dobrać zadanie, lub zanalizować jego warstwę fabularną, aby ona była bliska dziecku i interesująca, osadzona w jego świecie a przez to zrozumiała.
2. Często zdarza się, że dzieci widzą w zadaniu tylko liczby i wykorzystując swoje umiejętności rachunkowe usiłują szybko je w różnorodny, daleki od właściwego dla zależności podanych w zadaniu, sposób połączyć ze sobą, nie umiejąc wyjaśnić swojego rozwiązania. Jest to świadectwo braku szeregu umiejętności niezbędnych do rozwiązania zadania.

Rozwiązywaniu zadań zwykle towarzyszą silne napięcia emocjonalne. Pojawienie się problemu w postaci zadania tekstowego jest dla uczniów zapowiedzią sytuacji trudnej, wymagającej wysiłku intelektualnego. Dlatego uczniowie podchodzą do rozwiązywania zadań bardzo emocjonalnie.

Nieraz jest to strach, lęk, obawa przed nierozwiązaniem zadania, a nieraz satysfakcja i radość z tego, że udało się przezwyciężyć trudność, problem. Kiedy uczniowie nie radzą sobie z rozwiązaniem zadania, wówczas całą swą aktywność kierują na obronę przed nim. Nie podejmują prób jego rozwikłania, bo boją się porażki. Boją się, że nauczyciel będzie znowu krzyczał, a dzieci będą się śmiały, a rodzice uznają go za „lenia” i „nieuka”. „W takiej sytuacji zadania matematyczne zmieniają swój sens. Zamiast być źródłem doświadczeń matematycznych i logicznych, stają się źródłem licznych frustracji” (E. Gruszczyk-Kolczyńska 1989). W wyniku takiego podejścia do zadania, jedne dzieci kierują swoją aktywność na intelektualne poznanie zadania, a inne na obronę przed koniecznością jego rozwiązania.

Dla uczniów, którzy osiągają sukcesy w matematyce rozwiązanie problemu zapowiada potwierdzenie ich umiejętności i przeżycie sukcesu. Jednak dla

dzieci, które nie rozumieją zależności ujętych operacyjnie i mają niski poziom świadomości, doświadczają kłopotów w matematyce, taka sytuacja jest zapowiedzią napięcia i zagrożenia. O zachowaniu dziecka w trakcie przewycięzania trudności decyduje:

1. stan motywacji, a więc to, czy dziecko chce podjąć trud rozwiązywania, czy widzi potrzebę wysiłku dla realizacji tego celu,
2. poziom samooceny, czyli wiara we własne możliwości oraz poczucie, że może podołać wymaganiom,
3. dojrzałość emocjonalna wyrażająca się w zdolności do kierowania swym zachowaniem mimo doznawanych napięć,
4. system nawyków zachowania się w sytuacjach trudnych, wymagających wysiłku intelektualnego,
5. poziom wiadomości i umiejętności matematycznych potrzebnych do rozwiązania tego zadania. (E.Gruszczyk-Kolczyńska, 1989).

Ważne jest również nastawienie do zadania. Jeżeli uczeń od początku będzie podchodził do tego krytycznie, nie podejmie prób rozwiązania, bo i po co, to jego trudności nigdy nie zostaną przewycięzone. W tym już rola nauczyciela, rodzica, aby pomógł dziecku je pokonać, aby zachęcił go do podjęcia próby, zmotywował, zmienił jego negatywne nastawienie na pozytywne.

Wieloetapowość i złożoność procesu rozwiązywania zadań matematycznych sprawia uczniom wiele problemów, a narastające kłopoty i brak pomocy ze strony nauczycieli i rodziców mogą powodować dalsze trudności w kształceniu matematycznym. Chcąc kształtować u dzieci umiejętność rozwiązywania zadań z treścią niezbędną jest znajomość metod postępowania w sytuacji zadaniowej.



Wśród metod rozwiązywania problemów i zadań wyodrębnia się zasadniczo dwie klasy:

Metody algorytmiczne, zwane odtworczymi i heurystyczne, nazywane twórczymi.

Metody algorytmiczne – to reguły o charakterze zamkniętym, rozumiane, jako niezawodne przepisy, jednoznacznie określające, jaki skończony ciąg operacji należy

wykonać, aby rozwiązać wszystkie zadania danej klasy.

Metody heurystyczne – odwołują się do reguły o charakterze otwartym. Przymiotnik „heurystyczny” oznacza „służący do odkrycia”. Metody heury-

styczne nie narzucają niczego uczniowi, wręcz przeciwnie skłaniają do poszukiwania oryginalnych sposobów rozwiązania, tworzenia własnych reguł i zasad wykonywania zadania. Właśnie metody heurystyczne są tym sposobem, który można wykorzystać aby „oswoić” dzieci z procesem rozwiązywania zadań tekstowych, pokazać, że też są w stanie je rozwiązać. (Wojnowska M, 2007).

Metoda heurystyczna jest bardzo przydatna w nauczaniu matematyki, gdyż polega głównie na naprowadzaniu uczniów na drogę samodzielnych poszukiwań i samodzielnego rozwiązywania nurtujących zagadnień. Wymaga od ucznia aktywnej postawy i rozwija samodzielność jego myślenia.

Decydującymi etapami dla tworzenia przez uczniów strategii heurystycznych są: „spojrzenie wstecz” i „spojrzenie w przód”.

Strategia „spojrzenia wstecz” mówi, że „należy wrócić do przebytej drogi”, by odpowiedzieć sobie na pytania:

- czy rozwiązanie jest poprawne?
- czy jest jedyne?
- na czym polega skuteczna metoda rozwiązania, którą można zastosować do innych zadań?
- na czym polegają błędy i jak ich unikać?
- czy zadanie można rozwiązać w prostszy sposób?

Natomiast strategia „spojrzenia w przód” mówi o modyfikowaniu danego zadania, poszukiwaniu zadań podobnych ze względu na układ danych, niewiadomą, metodę czy sposób rozwiązania (G. Treliński, 1995).

Systematyczna praca nad zadaniami tekstowymi ma wysokie walory kształcące i rozwija myślenie dziecka. Różnorodność ćwiczeń w rozwiązywaniu nie tylko uatrakcyjnia pracę z zadaniem, ale także zmusza do uważnego badania treści i sprzyja rozwojowi takich procesów jak: analiza, synteza czy wnioskowanie. Dlatego też nie powinno się zaniedbywać pracy nad zadaniami tekstowymi, lecz poprzez różne przykłady stwarzać sytuację do rozwiązywania problemów matematycznych.

Np. zadanie: *W gospodarstwie jest 5 zwierząt: część królików i część kur. Wszystkie zwierzęta mają razem 14 nóg. Ile jest królików a ile kur?*

Można próbować zgadywać, ile jest których zwierząt. Może to być bardzo szybki sposób, a może trwać długo poszukiwanie rozwiązania.

Można liczyć, ale jak? Można wykorzystać dowolne przedmioty, które będą symbolizowały zwierzęta, można narysować – 5 zwierząt – bez przyporządkowania do rodzaju. Przydzielić każdemu zwierzęciu po 2 (bo każde

z pewnością tyle ma) nogi. Postępując się skrótem myślowym – kury mają już swoje nogi. Pozostały więc nogi królików – a do rozdzielenia są 4 nogi. Każdemu królikowi przydzielić trzeba po dwie – 2 króliki dostaną brakujące nogi. Od liczby wszystkich zwierząt odejmiemy liczbę królików – zostanie nam liczba kur. Teraz należy sprawdzić, czy rzeczywiście otrzymaliśmy poprawny wynik. Nic dziecko nie zapisało, żadnych pytań ani działań. Ale rozwiązało zadanie, potrafi uzasadnić kolejność swoich czynności.

Przykład innego zadania:

Ania, Kasia i Celina przyjaźnią się. Podczas wakacji każda z dziewcząt wysłała do każdej pocztówkę. Ile pocztówek zostało wysłanych?

Uczymy rozważania takiej sytuacji, wykorzystując schemat graficzny obrazujący relację „wysłałam do ciebie”. Zadajemy pytania: do kogo wysłała Ania, do ilu osób? I tak kolejno każdą sytuację analizujemy. Można zliczać wysłane pocztówki, można poszukać strategii liczenia, uwzględniać zależności podane w zadaniu. Zarówno jeden jak i drugi sposób jest dobry.

Na rozwój myślenia uczniów i rozwiązywania przez nich zadań skuteczniej wpływa wszechstronna problematyzacja zadań i stopniowanie trudności za pomocą czynnościowych metod ich analizy, aniżeli rozwiązywanie zadań tekstowych przy dowolnie dobranych formach czynności. Problematyzacja zadań może być wprowadzana przez:

- zmiany konstrukcji tekstu werbalnego zadań: podawanie warunków zadań bez pytania, podawania zadań z różnego typu lukami, korygowanie zadań wadliwie ułożonych, przekształcanie treści zadań tekstowych,
- stawianie uczniów w sytuacjach wymagających samodzielnego układania zadań do: rysunków, schematów, wzorów matematycznych, poleceń słownych nauczyciela,
- modyfikację struktury problemów matematycznych poprzez: podawanie zadań otwartych, mających kilka lub nieograniczona liczbę rozwiązań, podawanie zadań półotwartych charakteryzujących się tym, że problemy matematyczne w nich zawarte nie są do końca określone, bowiem w ich warunkach brakuje pewnych danych.

Rozwiązywanie zadań otwartych, które mają więcej niż jedno poprawne rozwiązanie, a przez to pozwalają uczniowi na poszukiwanie różnych rozwiązań zmierzających do osiągnięcia wyniku końcowego jest czynnikiem indywidualizacji i aktywizacji uczniów. Zadania otwarte pobudzają ich do krytyczne-

go i samodzielnego myślenia oraz zachęcają do pokonywania pojawiających się trudności. (M. Szpiter, 1995).

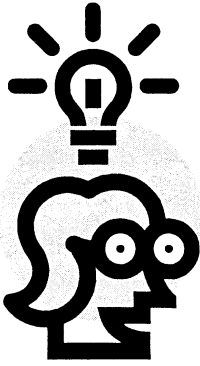
Dziecko potrzebuje być twórcą i wynalazcą, bezustannie poszukiwać nowych sposobów działania oraz wykazywać zainteresowanie tworzeniem i odkrywaniem (D. Lewis, 1988). Taką sposobność dają właśnie zadania otwarte, które pobudzają proces myślenia heurystycznego, odwołują się do wyobraźni. Zaletą tego typu zadań jest to, że pozwalają na osobiste ustosunkowanie się do napotkanych problemów, przez co wdrażają do samodzielności, kształtują aktywną postawę i angażują emocjonalnie (J. Zwiernik, 1996).

Wśród zadań otwartych spotyka się zadania o różnej konstrukcji. Mogą to być na przykład zadania, które pozostawiają uczniom swobodę doboru danych. Brak danych oraz pytania pozwala utworzyć twórczą dyskusję, w czasie której dochodzi do formułowania samodzielnych sądów, przekonań i hipotez połączonych z tworzeniem wielu różnych wersji tego zadania.

Zadania tekstowe o problemach otwartych, to zadania zawierające luki, które mogą być wypełnione dowolnymi liczbami bądź też zwrotami wyznaczającymi różne działania matematyczne. Uzupełnianie zadań otwartych ułatwia ich rozwiązywanie, gdyż zmusza uczniów do wielostronnej ich analizy, stosowania różnorodnych przekształceń i śledzenia jak zmieniają się przy tym sposoby ich rozwiązywania.

Uczniowie przystępując do wytwarzania pomysłów mogą wpisywać dowolne liczby. Zadania tego typu umożliwiają uczniom nie tylko dobór pytania. Rozwiązując nietypowe zadania dzieci zdobywają nawyki poprawnej analizy i syntezy. Sformułowanie bowiem w zadaniu brakującego pytania zmusza je najpierw do przeprowadzenia syntezy danych i wykrycia w zadaniu braków, a następnie do analizy w celu skonstruowania pytania, czyli określenia matematycznego. Uzupełnianie danych ma dodatkową wartość, gdyż wdraża uczniów do rozwiązywania zadań złożonych. Odsłania uczniom zagadnienie zróżnicowania zależności między danymi a niewiadomą.

Punktem wyjścia przy układaniu zadań otwartych są również różne sytuacje zainicjowane przez nauczyciela. Nauczyciel stwarza pewną sytuację: gra, zabawa, bajka, historyjka obrazkowa, może być również „opowiadanie bez sensu”, aktualne wydarzenie. Dzieci je badają, analizują, poprawiają, rozwijają, manipulują, stawiają pytania, wskazują fragmenty, które je zaintrygowały lub wydają się im ważne, ciekawe, określają związki również ilościowe. To prowadzi do odkrycia przez dzieci wielu zależności i ułożenia ciekawych zadań.



Układanie zadań przez uczniów pozwala im zdobywać nowe doświadczenie w procesie uczenia się matematyki. Pobudza ich do selekcjonowania zdobytych już wiadomości i wykorzystania tylko tych, które są naprawdę niezbędne do ułożenia zadania. Uczniowie układając zależności pomiędzy danymi a szukanymi łatwiej je dostrzegają, a przez to lepiej poznają różne struktury zadań tekstowych. Inny jest również stosunek uczniów do zadań, które ułożyli samodzielnie. Pobudza ich to do większej aktywności, zapewnia swobodę działania i zastosowania poznanej wiedzy matematycznej w praktyce.

Celem układania zadań jest wspieranie dzieci w zrozumieniu istoty zadania tekstowego, zapoznanie z elementami jego struktury, uwzględnienie związków i zależności pomiędzy tymi elementami. Ważne jest także to, że sztuka układania zadań pozwala uczniom lepiej zapamiętać sposób jego rozwiązania, ponieważ potrafią sami je rozwiązać.

Układanie zadań pobudza płynność i giętkość myślenia. Stanowi dobrą podstawę do działań rozwijających operacje myślenia twórczego: kojarzenia, abstrahowania, przekształcania. Łączy się ono ściśle z ich przekształcaniem w kierunku ich rozwijania i rozbudowywania, bądź też upraszczania. Tworzenie zadań przez uczniów jest bardzo ważne. Każdy uczeń w toku rozwiązywania zadań otwartych ma szansę osiągnięcia choćby drobnego sukcesu. Twórcza aktywność wytwarza silne, samoistne nagrody i nie potrzebuje już żadnych dodatkowych wzmocnień zewnętrznych. Jednak, aby te nagrody mogły zadziałać musi być spełniony podstawowy warunek: zadanie nie może być ani za trudne, ani za łatwe. Praca z tym typem zadań może być środkiem do eliminowania negatywnych napięć i trudności w uczeniu się matematyki.

Problematyzacja zadań stanowi możliwość rozwijania u uczniów wrażliwości na rozwiązywanie problemów, spełnia jeden z głównych postulatów postawionych do realizacji współczesnej szkole. Uczeń powinien być przygotowany do rozwiązywania problemów stawianych mu przez życie.

Wielu dydaktyków podkreśla rolę metod symulacyjnych w rozwiązywaniu zadań matematycznych. Polegają one na posługiwaniu się modelem, schematem, rysunkiem. Opierają się na czynnościach wykonywanych na konkretnych, gdyż są one bliższe doświadczeniu dziecka. Metody symulacyjne ułatwiają zrozumienie treści zadania przez przełożenie ich na prostszy język modelu. Stosowanie rysunków schematycznych i schematów graficznych pozwala

uczniom na lepsze zrozumienie symboli i pojęć abstrakcyjnych. Posługiwanie się schematami graficznymi oparte jest na teorii reprezentacji Brunera, według której rozwój dzieci polega na opanowywaniu kolejnych reprezentacji poprzez dostrzeganie powtarzających się prawidłowości w swoim otoczeniu, a potem łączenia ich z przeszłością i przyszłością. J. Bruner wyróżnia trzy systemy reprezentacji:

- enaktywny, czyli poprzez działanie ruchowo-manipulacyjne na przedmiotach,
- ikoniczny, czyli przez obrazy, umowne schematy i rysunki,
- symboliczny, czyli wiedza zawarta w formie werbalnej i symbolicznej (Bruner J., 1978).

Wykorzystanie tych sposobów reprezentacji w procesie rozwiązywania zadań, ułatwia dzieciom przechodzenie od czynności wykonywanych na konkretnych przedmiotach do form umysłowych, bardziej abstrakcyjnych. Rysunki i schematy ułatwiają uczniom sporządzanie formuł matematycznych, które dalej należy zastąpić czynnościami werbalnymi.

W jaki sposób można zachęcić dzieci do rozwiązywania zadań? Otóż, zadania tekstowe powinny zawierać tematykę, która interesowałaby dzieci, zachęcała do poszukiwania rozwiązań. Zadania same w sobie, powinny budzić zainteresowania i pozytywne emocje, a organizowany przez nauczyciela proces ich rozwiązywania powinien dostarczać informacji o możliwościach dziecka w tym obszarze i przyczyniać się do budowania sytuacji, kiedy uczeń może przeżyć satysfakcję z osiągniętego wyniku. Wtedy na pewno uczniowie będą je chętniej rozwiązywali, a przez to być może wzrośnie ich zainteresowanie matematyką.

Rozwiązywanie zadań matematycznych wymaga od uczniów sporo wysiłku, ale dostarcza również wiele radości i satysfakcji z osiągniętych sukcesów.

Najlepiej by było, gdyby nauczyciel pracował z każdym dzieckiem indywidualnie, ale rzadko bywa to możliwe. Dobrym sposobem na pobudzenie dziecka do działalności matematycznej jest pozostawienie dziecku swobody działania przy rozwiązywaniu zadania. Nie powinno podsuwać się mu gotowych rozwiązań, bo to nie skłania do twórczości, do poszukiwania nowych sposobów „rozsuptywania” problemu. Powinno się także zachęcać dziecko do manipulowania konkretnymi pomocami, robienia zadania rozumianego bardzo dosłownie – wykonania czynności, o których jest mowa w zadaniu, oraz do przedstawiania rozwiązań na rysunkach. Należałoby także uatrakcyjnić zajęcia (na przykład poprzez gry i zabawy dydaktyczne), a przez to podnieść

motywuując dziecko do nauki. Gry pobudzają uczniów do wysiłku, wywołują dodatnie emocje. W takiej sytuacji wyciszają się reakcje obronne dziecka, a przez to rozwijają aktywność matematyczną.

Często bywa też tak, że dzieci po prostu nie rozumieją, w jakim celu rozwiązują zadanie, do czego jest im to potrzebne. Muszą rozwiązać zadanie, bo nauczyciel tak każe, choć w najmniejszym stopniu nie mają na to ochoty. Nie zawsze zdają sobie sprawę, że w ten sposób rozwijają myślenie i zdobywają nowe doświadczenia matematyczne.

Emocje wpływają na przygotowanie organizmu do działania. Determinują koncentrację uwagi, pamięć, zdolność myślenia. Zbyt duże ich natężenie może prowadzić do tego, że dzieci będą funkcjonowały na niższym poziomie, niż wskazywałyby na to ich możliwości intelektualne (E. B. Hurlock, 1985). Wzrost emocji przyczynia się do wzrostu możliwości intelektualnych. Trzeba jednak uważać, aby wzrost tychże emocji nie przekraczał odporności dziecka.

Trudnościom zwykle towarzyszą napięcia i emocje ujemne, które powodują spadek aktywności uczniów. Zadaniem nauczyciela jest mu pomóc przezwyciężyć te trudności. Jeżeli zaś tak się nie stanie to rozwiązywanie zadań sprzyja powstawaniu frustracji, co z kolei prowadzi do obniżenia uwagi i sprawia, że uczeń zaczyna bać się matematyki i nauczyciela.

Po dłuższym okresie borykania się z niepowodzeniami uczeń zmienia się z pełnego dobrego chęci i motywacji do nauki w ucznia, który nie lubi szkoły, nie chce się uczyć i nie potrafi już sprostać nawet niewielkim wymaganiom szkolnym.

Nie zawsze przyczyny trudności muszą tkwić w dziecku. Często zdarza się tak, że wpływ ma na to wiele czynników zewnętrznych. Dużą rolę w tym względzie odgrywają nauczyciele i rodzice. To w dużej mierze od nich zależy, jaki stosunek do szkoły będzie miał uczeń, jakie nastawienie do rozwiązywania problemów.

Nauczyciel powinien przede wszystkim zwrócić uwagę na to, aby dobór zadania był dostosowany do możliwości uczniów. Jeśli zadania są zbyt trudne, dziecko nie jest w stanie ich zrozumieć i zapamiętać, a to zniechęca je do podejmowania wysiłków zmierzających do rozwiązania. Problem zawarty w zadaniu powinien mobilizować dzieci do pracy umysłowej. Nie powinien być ani za łatwy, ani za trudny.

Wpływ na trudności w uczeniu się matematyki ma także zły dobór metod nauczania. Nauczyciele w dalszym ciągu bazują na metodach słownych, zamiast zastępować je czynnościowymi.

Dużo błędów przypisuje się organizacji pracy nauczyciela. Nie bez znaczenia jest również fakt, że nauczyciel stosuje jednakowe tempo pracy do wszystkich uczniów, a to z kolei powoduje, że słabsi uczniowie nie radzą sobie z zadaniami „stawianymi” im przez nauczyciela i w związku z tym rezygnują z prób ich rozwiązania.

Najczęściej dzieje się tak, że nauczyciel razem z najzdolniejszym uczniem rozwiązuje zadanie na tablicy, a pozostali uczniowie tylko się temu przyglądają, przepisując otrzymane wyniki. Nauczyciel ma zbyt mało czasu, jest za bardzo ograniczony wytyczonym programem nauczania, kartami pracy, które dają zestaw zadań na każdy dzień pracy, aby „przysiąc” z uczniem i rozwiązać zadanie. Z tego też powodu najczęściej nie rozwiązuje się zadań różnymi sposobami, bo po co skoro rozwiązanie jest już znane. A to z kolei hamuje rozwój aktywności matematycznej uczniów (K. Skurzyński, 2001).

Nauczyciel powinien starać się pomagać pokonywać trudności, jakich doświadcza uczeń. Dużą rolę w tym względzie odgrywa postawa nauczyciela. J. Zwiernik wyróżnia się dwie reakcje nauczycieli na trudności uczniów:

1. pierwsza ma miejsce, gdy nauczyciel dostrzega i uznaje podmiotowość dziecka. Potrafi dostrzec w uczniu osobę, która jest zdolna do zrozumienia problemu i będzie podejmowała wysiłki, aby go rozwiązać. Nauczyciel natomiast będzie się starał mu w tym pomóc, zadając pytania pomocnicze, naprowadzając na właściwy tok rozumowania, nie hamując przy tym aktywności dziecka,
2. druga postawa jest odmienna. W takim przypadku nauczyciel stara się ochronić dziecko przed trudnościami, gdyż uważa, że nie poradzi sobie z problemem. Kładzie większy nacisk na zminimalizowanie niepowodzeń niż na pokonanie przeszkody. Uczenie się jest procesem za który w równym stopniu odpowiedzialność ponoszą nauczyciel i uczeń. Stopień trudności uczenia się w znacznej mierze zależy od sposobu przedstawienia go, ale bez zaangażowania ucznia nie ma co mówić o sukcesie. (J. Zwiernik, 1996).

O powodzeniu bądź też niepowodzeniu uczniów w nauce szkolnej może decydować także postawa rodziców. Ich reakcje mogą być czynnikiem zaburzającym rozwój emocjonalny dziecka i jego nastawienie do szkoły.

Postawy rodziców na trudności szkolne uczniów:

1. Rodzice przejawiający postawę lękową charakteryzują się „wpadaniem w panikę”. Każdą najmniejszą porażkę traktują jak katastrofę. Często od-

rabiają za dziecko lekcje, wyręczają je. Pracując za dziecko, oczywiście dla jego dobra, zabierają mu szanse na nauczenie się czegokolwiek.

2. Agresywne reakcje rodziców. Surowo karzą swoje dziecko za niepowodzenia, jakich doświadcza w szkole. Prowadzi to do tego, że dziecko stojąc przed rozwiązaniem problemu, tak bardzo chce go rozstrzygnąć, że nie może się skupić na jego istocie. Boi się kolejnej porażki, a właściwie to jej konsekwencji i zamiast zastanawiać się nad sposobem rozwiązania, myśli o tym jak uniknąć kary. Znowu rodzi się pytanie; Czego nauczy się dziecko, czy aby nie unikania kary? Błędy popełnianie przez dziecko informują nas o tym, z czym ma ono problemy, w czym możemy mu pomóc.
3. Tą postawą charakteryzują się rodzice, którzy bagatelizują, nie przejmują się kłopotami swoich dzieci. Tacy rodzice działają na zasadzie „jakoś to będzie”. Oczekują, że dziecko samo upora się ze swoimi trudnościami. Brak zainteresowania sprawami szkolnymi dziecka może mieć różne przyczyny. Może to być na przykład: zła sytuacja materialna, zapracowanie lub przekonanie, że nauka nie jest w życiu potrzebna. Ale czy dziecko udźwignie cały ciężar swoich porażek, czy może będzie szukało wsparcia gdzie indziej? Czy wtedy będziemy zadowoleni? (H. Spionek, 1985). Rodzice odgrywają ważną rolę w życiu każdego dziecka, dlatego też ich stosunek do nauki i trudności jakie przeżywają, ma wpływ na postawę dziecka do szkoły.

Trudności od zawsze towarzyszą uczniom w toku nauki szkolnej. Nieraz pobudzają do działania, zwiększają aktywność dziecka, a innym razem, wręcz odwrotnie – hamują. Ważne jest, aby nie gromadziły się i nie zniechęcały uczniów do uczenia się matematyki. Nagromadzone trudności mogą w konsekwencji prowadzić do pojawiania się nowych, pogarszać ogólną sprawność umysłową uczniów, powodować obniżenie motywacji do nauki i ogólnej odporności nerwowej. Dlatego też ważne jest, aby skutecznie i w porę im przeciwdziałać, nie pozwalając, żeby dochodziło do takich sytuacji.

Uczenie się matematyki opiera się na aktywności, działaniu w świecie matematyki, twórczym doświadczeniu, które uczeń zdobywa w toku rozwiązywania zadań.

Literatura

Bruner J., *Poza dostarczone informacje*, Warszawa 1978.

Gleichgewicht B., *Arytmetyczne zadania tekstowe dla nauczycieli klas 1-4*, Warszawa 1988.

- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci z klas początkowych. Diagnoza i terapia*, Katowice 1985.
- Gruszczyk-Kolczyńska E., *Dlaczego dzieci nie potrafią uczyć się matematyki?*, Warszawa 1989.
- Hurlock E.B. *Rozwój dziecka*, T. 1, Warszawa 1985.
- Klus-Stańska D., *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów*, Warszawa 2004.
- Konior J., *Badania nad tekstem matematycznym i jego lektura – stan obecny i perspektywy (W:) Dydaktyka Matematyk” Roczniki P T M, seria V, 1995/17.*
- Lewis D. *Jak wychować zdolne dziecko?*, Warszawa 1988.
- M. Cackowska, *Rozwiązywane zadań tekstowych, Poradnik metodyczny*, Warszawa 1993.
- Moroz H., *Czynniki różnicujące efektywność procesu kształcenia matematycznego uczniów klas I-III szkoły podstawowej (W:) Moroz H. (red.) Czynniki różnicujące szanse edukacyjne dzieci w młodszy wieku szkolnym*, Katowice 1988.
- Skurzyński K., *Niektóre metody rozwijania matematycznej aktywności uczniów*, Szczecin 2001.
- Spionek H., *Zaburzenia rozwoju uczniów a niepowodzenia szkolne*, Warszawa 1985.
- Stucki E., *Metodyka nauczania matematyki w klasach niższych, cz. III*, Bydgoszcz 1994.
- Szpiter M., *Edukacja matematyczna w klasach początkowych*, Słupsk 1997.
- Treliński G., *Kształcenie matematyczne w klasach początkowych*, Kielce 1995.
- Wojnowska M., *Między przekazem a odkryciem. Twórcze sposoby na rozwiązywanie zadań matematycznych przez dzieci*. Kraków 2007.
- Zwiernik J., *Alternatywa w edukacji przedszkolnej: studium teoretyczno-empiryczne*, Wrocław 1996.