

## ROZDZIAŁ 12

# INNOWACJE I POSTĘP TECHNICZNY

„Ręka twoja zatriumfuje nad twymi wrogami.  
I wszyscy nieprzyjaciele twoi będą wycięci.”

*Księga Micheasza, 5, 8*

### 12.1. INNOWACYJNOŚĆ GOSPODARKI

Postęp techniczny to taka zmiana techniki (metody) wytwarzania, która prowadzi do wzrostu efektywności.

Wyodrębnia się, z punktu widzenia źródeł, dwa rodzaje postępu technicznego: postęp substytucyjny i niezależny. Źródłem postępu substytucyjnego jest proces zastępowania pracy żywej kapitałem. Źródła postępu niezależnego znajdują się poza procesem substytucji a ściśle biorąc są nimi zachowania i postawy ludzi w działaniach gospodarczych. Praktycznym nośnikiem postępu technicznego są tak zwane innowacje, czyli nowe produkty oraz nowe sposoby ich wytwarzania. Te pierwsze nazywają się w związku z tym innowacjami produktowymi, natomiast te drugie procesowymi. Innowacje procesowe mogą oczywiście przyjmować formę usprawnień technicznych, technologicznych lub organizacyjnych.

Strumień innowacji jednostkowych określa w skali społecznej tak zwany poziom innowacyjności gospodarki narodowej. Innowacyjność gospodarki czyli określona proefektywnościowa postawa wszystkich uczestników procesu gospodarczego jest więc ważną przesłanką postępu efektywności. Niestety innowacyjność nie jest najsilniejszą stroną gospodarki polskiej o czym najlepiej świadczy fakt, że jej poziom jest jednym z najniższych w krajach OECD. Przykładowo, uzyskuje ona obecnie rocznie ok. trzech razy mniej patentów zagranicznych niż Luksemburg, 25 razy mniej niż Hiszpania, ok. 30 razy mniej niż Korea i 400 razy mniej niż Niemcy (patrz: Tabela 12.3). Ogółem, polskie patenty uzyskane zagranicą stanowiły w 1996 roku tylko nieco ponad 0,02% (dwie setne procenta!) wszystkich patentów zagranicznych uzyskanych przez kraje OECD.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Obliczenia na podstawie danych OECD zawartych w Tabeli 12.3.

Tabela 12.1. Udział produktów przemysłowych, produktów tzw. wysokiej technologii w eksporcie towarowym w roku 2000 oraz wydatków na naukę i rozwój w wybranych krajach w procentach

Kraj	Udział produktów przemysłowych przetworzonych w eksporcie towarów danego kraju w 2000 r.	Udział produktów w wysokiej technologii w eksporcie produktów przemysłowych przetworzonych w 2000 r. <sup>1)</sup>	Wydatki na badania i rozwój w latach 1989-2000 jako proc. produktu narodowego brutto
Austria	83	14	1,64
Belgia	78	10	1,55
Dania	64	21	1,94
Finlandia	85	27	2,78 <sup>2)</sup>
Francja	81	24	2,21
Grecja	50	9	0,48
Hiszpania	78	8	0,84
Holandia	70	35	2,01
Irlandia	86	48	1,54
Niemcy	85	18	2,31
Portugalia	85	5	0,63
Szwecja	85	22	3,76
W. Brytania	82	32	1,81
Włochy	88	9	1,04
Euroland	82	16	1,97
Szwajcaria	91	19	2,55
Izrael	94	25	3,69
Japonia	94	28	2,80
Korea Płd.	91	35	2,70
Singapur	86	63	1,13
Stany Zjednoczone	83	34	2,55
Czechy	88	8	1,27
Polska	80	3	0,73
Węgry	86	26	0,71
Estonia	73	30	0,78
Słowacja	85	4	0,98
Słowenia	90	5	1,47

Objaśnienia:

(1) Według Banku Światowego eksport wysokiej technologii obejmuje produkty zawierające duży udział myśli naukowo-badawczej tj. samoloty, komputery, farmaceutyki nowoczesnej generacji, sprzęt naukowo-badawczy, sprzęt elektroniczny, itp.

(2) W latach 1989-1997.

Źródło: Kinga Borzym, *Gonimy Unię w poziomie bogactwa*, „Rynki Zagraniczne” 2003, nr 26-27, s. 3.

Wyniki gospodarki polskiej, ostatniej dekady lat dziewięćdziesiątych są, mimo dominacji optymistycznych tonów w propagandzie, w najlepszym wypadku przeciętne. Stopa wzrostu dochodu narodowego jest wprawdzie dodatnia od 1993 roku ale z tendencją do wygasania.

**Tabela 12.2.** Wydatki brutto na badania i rozwój jako procent PKB

	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Australia	-	1.62	-	1.70	-	-	-
Austria	1.49	1.57	1.59	1.59	1.60	1.63	1.63
Belgia	1.58	1.56	1.58	-	-	-	-
Kanada	1.60	1.60	1.58	1.60	1.60	1.61	-
Czechy	1.23	1.13	1.04	1.06	1.18	1.28	-
Dania	1.74	-	1.83	1.84	1.89	1.91	1.98
Finlandia	2.21	2.34	2.35	2.59	2.78	2.92	-
Francja	2.45	2.38	2.34	2.32	2.24	2.20	-
Niemcy	2.42	2.32	2.31	2.30	2.31	2.32	-
Grecja	0.48	-	0.47	-	0.50	-	-
Węgry	0.98	0.89	0.74	0.66	0.73	0.68	-
Islandia	1.34	1.39	1.54	-	1.84	2.03	1.86
Irlandia	1.20	1.31	1.36	1.42	1.43	-	-
Włochy	1.14	1.06	1.01	1.02	1.00	1.03	1.06
Japonia	2.88	2.84	2.98	2.83	2.91	-	-
Korea	2.30	2.58	2.68	2.79	2.89	-	-
Meksyk	0.22	0.29	0.31	0.31	0.34	-	-
Holandia	2.00	2.03	2.07	2.09	2.12	-	-
Nowa Zelandia	1.02	-	-	0.97	-	1.13	-
Norwegia	1.73	-	1.71	-	1.68	-	-
Polska	-	0.82	-	0.74	0.76	0.76	0.77
Portugalia	-	-	-	0.58	-	0.65	-
Hiszpania	0.91	0.85	0.85	0.87	0.86	0.88	-
Szwecja	3.39	-	3.59	-	3.85	-	-
Szwajcaria	-	-	-	2.74	-	-	-
Turcja	0.44	0.36	0.38	0.45	0.49	-	-
Wielka Brytania 2.15	2.11	2.02	1.95	1.87	-	-	-
Stany Zjednoczone 2.62	2.52	2.61	2.66	2.70	2.77	-	-
Ogółem OECD	2.19	2.14	2.16	2.18	2.21	-	-
Ameryka Pn	2.22	2.14	2.21	2.24	2.27	2.34	-
Unia Europejska 1.92	1.87	1.84	1.83	1.82	-	-	-
Kraje nordyckie 2.39	-	2.51	-	2.65	-	-	-

Źródło: *Main Science and Technology Indicators*, OECD Statistics 1999, No 2, Paris 2000, s. 16.

Przyczyną jest najprawdopodobniej wyczerpywanie się tak zwanych „prostych rezerw”, czyli możliwości wzrostu produkcji w oparciu o dotychczasową strukturę gospodarki.

Odwroćenie spadkowej tendencji stopy wzrostu PKB nastąpiło wprawdzie w 2003 roku ale powrót do jej stosunkowo wysokich wielkości przeciętnych z połowy lat 90-tych XX wieku jest jednak mało prawdopodobny. Tym bardziej, że uporczywie utrzymuje się zarówno ujemne saldo obrotów bieżących z zagranicą (niska konkurencyjność rodzimych towarów na rynkach zagranicznych!), jak i wysokie zadłużenie zewnętrzne gospodarki. Średnia roczna stopa wzrostu produktu krajowego brutto p.c., w latach 1990-1997 (ok. 3%), ciągle była niższa od porównywalnej stopy konsumpcji (ok. 5%).<sup>2</sup> Jaśniejszym punktem jest jedynie systematycznie spadająca stopa inflacji. Przyczyn tego stanu rzeczy jest zapewne wiele ale jedną z podstawowych wydaje się niski poziom innowacyjności gospodarki (por. dane zawarte w Tabelach 12.1 i 12.2).

Wiadomo więc, że istnieje skomplikowany układ współzależności makroekonomicznych między osiągniętym poziomem wzrostu gospodarczego, dynamiką tego wzrostu, poziomem i strukturą oszczędności, dynamiką demograficzną a strukturą instytucjonalną gospodarki.<sup>3</sup> Tym samym istnieje również kulturowe zaplecze procesu gospodarczego!

Nie tylko więc instytucje formalne takie państwo, system prawny i organizacje ale również instytucje naturalne, takie jak postawy ludzi i system wartości oraz struktura realizowanych celów i motywacje wyrastają ze sfery kultury i określają poziom intensywności pracy. A ten z kolei decyduje o poziomie innowacyjności gospodarki.

Istotne wydaje się w tym kontekście, zaproponowanie takiej klasyfikacji czynników wzrostu gospodarczego, która wyeksponuje znaczenie czynników współcześnie kształtujących proces postępu technicznego i w konsekwencji po-

<sup>2</sup> Obliczono na podstawie danych *Rocznika Statystycznego RP 1998*, op. cit., str. LIX.

<sup>3</sup> „Wymienione zmienne makroekonomiczne (stopa wzrostu produktu p.c., stopa oszczędności, stopa wzrostu ludności, produkt per capita – KM) wywierają wpływ na stopę wzrostu gospodarczego w następujący sposób: im wyższa stopa oszczędności, tym wyższa jest ścieżka wzrostu prowadząca do wyższego dochodu na głowę, a tym samym wyższa jest średniookresowa stopa wzrostu gospodarczego. Wyższa stopa wzrostu liczby ludności doprowadza (przy warunku ceteris paribus) do obniżenia zarówno kapitału, jak i produktu per capita. Ujemna zależność między  $g$  i  $y$  opisuje zaś wspomniany wcześniej efekt konwergencji. Niższy wyjściowy poziom dochodu per capita umożliwia wyższe tempo wzrostu produktu w okresie przejściowym, ponieważ wyższa jest krańcowa produktywność kapitału w okresie startu.” (Barbara Liberda, Tomasz Tokarski, *Determinanty oszczędności i wzrostu gospodarczego w Polsce w odniesieniu do krajów OECD*, „*Ekonomista*” 1999, nr 3, s. 256).

zwoli na określenie makroekonomicznych warunków wzrostu innowacyjności (por. Schemat 12.1). Chodzi więc o to, że klasyfikacje tradycyjne wydają się mało przydatne do analizy współczesnej gospodarki i jak należy przypuszczać, wymagają rozwinięcia oraz uzupełnienia. Tym bardziej, że kultura pracy i społeczna świadomość decydują o poziomie innowacyjności zarówno w długim jak i krótkim przedziale czasu.

**Schemat 12.1.** Klasyfikacja czynników produkcji

### **Bezpośrednie czynniki produkcji**

- a. Ilość pracy.
- b. Wydajność pracy.
- c. Innowacyjność.



### **Pośrednie czynniki produkcji**

#### I. Związane z pracą

1. Kultura pracy
  - a. Stosunek do pracy
  - b. Wykorzystanie czasu pracy i intensywność.
2. Kwalifikacje.
  - a. Świadomość społeczna.
  - b. Kwalifikacje zawodowe.
3. Przedsiębiorczość.
4. Organizacja.

#### II. Technika

#### III. Związane z kapitałem

1. Zasoby kapitału
2. Struktura kapitału i technologia.
3. Uzbrojenie.
4. Produktywność kapitału.
5. Zasoby naturalne.

Tradycyjna klasyfikacja czynników wzrostu gospodarczego polega, jak wiadomo, na wyodrębnieniu z jednej strony czynników bezpośrednich, utożsamianych zwykle z kapitałem ludzkim (ilość pracy, wydajność pracy) oraz czynników pośrednich, kojarzonych z kapitałem pieniężno-rzeczowym (ogólne rozmiary kapitału pieniężno-rzeczowego, uzbrojenie pracy, produktywność kapitału).

**Tabela 12.3.** Patenty Zagraniczne (External patent applications)

	1990	1992	1994	1995	1996	1997	1998
Australia	16269	26262	48630	62787	66104	74564	94277
Austria	9111	11602	14048	19342	19416	24492	35034
Belgia	7947	8396	16024	19456	22494	29351	46858
Kanada	18870	25585	43956	52771	65651	85236	112738
Czechy	-	1107	1249	1059	1440	2532	3440
Dania	10240	15403	29474	39530	47597	59267	61584
Finlandia	9753	12991	29479	44041	50887	72889	105096
Francja	67132	69839	83174	99788	120043	-	-
Niemcy	157234	163241	199318	231915	261444	398967	543683
Grecja	536	758	1136	1047	1463	2074	2531
Weery	-	2006	3668	3953	5069	6491	8775
Islandia	-	55	33	48	-	23	14
Irlandia	1226	2062	4755	5247	8261	9000	14712
Włochy	29969	35118	41650	43298	52033	80144	102030
Japonia	129335	129386	140370	154699	193451	320283	434804
Korea	-	5984	12062	14027	20683	29600	38338
Luksemburg	955	1172	2137	2118	2163	3791	5830
Meksyk	-	315	186	567	1042	1688	3137
Holandia	26351	33745	52922	62906	83987	-	-
Nowa Zelandia	739	674	10218	11184	13431	15845	17380
Norwegia	5251	8260	12152	17145	23746	32551	36799
Polska	-	-	836	835	621	1051	1697
Portugalia	66	90	553	374	727	698	717
Hiszpania	4603	6886	9227	10086	16847	21028	28721
Szwecja	25792	32289	56264	83952	110820	154306	205547
Szwajcaria	33421	36477	41557	54551	73417	96684	119799
Turcja	-	23	15	19	197	2558	2195
Wielka Brytania	80320	97773	163420	203274	235862	313164	381096
Stany Zjednoczone	295202	413439	641855	852588	175107	1538886	210554
Ogółem OCDE	899837	1131063	1641417	2048264	2672540	-	-
Ameryka Pn.	293557	409757	655299	867687	1197087	-	-
Unia Europejska	190331	231133	403366	5533033	682498	-	-
Kraje nordyckie	44690	62693	120021	174762	219033	-	-

Źródło: OECD, EAS (MSTI database), April 1999, in: *Main Science and Technology Indicators 1999*, nr 1, OECD, Tab.74, s. 50; *Nauka i technika w 2000 roku*, GUS, Warszawa 2002, s. 138



Czynnikiem pośrednim jest oczywiście również technika, ta jednak stanowi jedynie relację wypadkową nakładów kapitału rzeczowego i ludzkiego.

Czynniki bezpośrednio utożsamiane są zazwyczaj z kapitałem ludzkim natomiast czynniki pośrednie z kapitałem pieniężno-rzeczowym. Tymczasem wśród czynników bezpośrednich należy wymienić również innowacyjność stanowiącą warunek trwałej dynamiki gospodarczej.<sup>4</sup>

Ponadto tak rozumiany kapitał ludzki posiada swoją „głębłą strategiczną” w postaci zaplecza kulturowego. W rozważaniach ekonomicznych nazywane jest ono coraz częściej układem instytucjonalnym gospodarki. Składa się nań kultura pracy, kwalifikacje i organizacja. Innymi słowy, oprócz dwu tradycyjnych form kapitału, istotna jest również trzecia, instytucjonalna jego forma; można by ją nazwać kapitałem zbiorowym.

Jeśli, jak to się przyjmuje najczęściej w tradycji klasycznej, uznać ilość i wydajność kapitału ludzkiego za jedyny bezpośredni czynnik produkcji, to wówczas zarówno kapitał pieniężno-rzeczowy i jego produktywność, jak i kulturowe zaplecze wydajności pracy (kultura pracy, kwalifikacje oraz organizacja) stanowiłyby zespół czynników pośrednich. W ramach tych ostatnich należałoby wyodrębnić właśnie takie elementy kultury jak intensywność pracy i wykorzystanie czasu pracy, posiadające bez wątpienia bezpośredni wpływ na gospodarkę.

Jeśli natomiast przyjąć, jak to jest w tradycji neoklasycznej, że bezpośrednimi czynnikami produkcji są ilości i produktywności zarówno kapitału ludzkiego, kapitału rzeczowego jak i zasobów naturalnych, to proponowana zmiana dotyczy jedynie pierwszego szeregu czynników (bezpośrednich), natomiast struktura szeregu drugiego (czynniki pośrednie) nie ulega właściwie zmianie. Tworzą go bowiem nieodmiennie kultura pracy, kwalifikacje, organizacja oraz technika i technologia.<sup>5</sup>

W gospodarce współczesnej, zasobnej w kapitał, zserwicyzowanej i silnie, ze względu na swoje globalne powiązania ukonkurencyjnionej, znaczenie po-

---

<sup>4</sup> Patrick Francois, Shi Shouyong, *Innovation, Growth and Welfare-Improving Cycles*, „Journal of Economic Theory” 1999, nr 2 (85), pp. 226-257.

<sup>5</sup> „Adam Smith zauważył, że produktywność systemu ekonomicznego zależy od specjalizacji (A. Smith mówił dokładnie o podziale pracy), która jest możliwa tylko wtedy, gdy istnieje wymiana. Im niższe będą koszty wymiany (albo jeśli ktoś woli – koszty transakcyjne), tym większa będzie specjalizacja i wyższa produktywność systemu. Jednakże koszty wymiany są uzależnione od uwarunkowań instytucjonalnych występujących w danym państwie: systemu prawa, systemu politycznego, systemu szkolnictwa i oświaty, kultury, itd.” (Ronald Coase, *Nowa ekonomia instytucjonalna*, „Gospodarka Narodowa” 1999, nr 3, s.102).

staw kreatywnych oraz innowacyjności pracowników wydają się bezsporne. A te zależą od ilości i produktywności kapitału ludzkiego oraz świadomości. Jeśli nawet proces tworzenia kapitału ludzkiego w Polsce jest dostatecznie sprawny, to społeczna świadomość (kultura pracy i struktura postaw społecznych) odbiega niewątpliwie od potrzeb rozwojowych gospodarki. Brak więc na dobrą sprawę, społecznych podstaw rozwoju innowacyjności.

**Innowacyjność, czyli kreatywność ekonomiczna jest elementem mechanizmu gospodarczego ale w swej istocie społecznej stanowi składową część ludzkich zachowań. Jest bezpośrednim ekonomicznym wyrazem kultury.**

Tak więc w kulturze (świadomości, postawach, tradycji, obyczajach, organizacji) należy poszukiwać źródeł i dźwigni innowacyjności. Wywołuje ona przy tym pozytywne skutki zarówno krótko- jak i długofalowe. Krótkofalowym, bezpośrednim efektem wzrostu intensywności pracy jest wzrost innowacyjności odwórczej, czyli upowszechniania znanych skądinań, sprawniejszych rozwiązań technicznych, technologicznych, organizacyjnych i nowych produktów. Długofalowym efektem wzrostu intensywności pracy jest natomiast wzrost innowacyjności właściwej – kreowanie nowatorskich, w sensie absolutnym, rozwiązań procesowych i produktowych.

Co więcej, innowacyjność ta spada. Jeśli na przykład liczba krajowych wynalazków i wzorów użytkowych (domestic inventions and utility models) wyniosła w roku 1990 ponad 4100, to w roku 1995 – ok. 2600, a w 1997 roku tylko ok. 2400.<sup>6</sup> Przy czym, biorąc pod uwagę strukturę zgłoszonych wynalazków (patent applications) według działów techniki, największy spadek liczby zgłoszeń odnotował w latach 1990-1997 dział elektrotechniki, prawie o 60%.<sup>7</sup>

Dominuje powielanie znanych skądinań produktów, technik i technologii a nie ich twórcza adaptacja. Do rzadkości należy doskonalenie czy wręcz tworzenie całkowicie nowych rozwiązań. Niedostatek zachowań innowacyjnych obniża tempo modernizacji i przemian struktury produkcji. Utrudnia także utrzymanie równowagi wewnętrznej i zewnętrznej. Charakterystyczne są trud-

<sup>6</sup> *Rocznik Statystyczny RP 1998*, GUS, Warszawa 1998, s. 303.

<sup>7</sup> *Ibid.*, s.305.



ności z utrzymaniem równowagi bilansu płatniczego, wywoływane głównie niską dynamiką eksportu oraz utrzymywanie się deficytu budżetowego.<sup>8</sup>

Biorąc pod uwagę ogólne warunki rozwoju i funkcjonowania gospodarki polskiej w ostatnich latach oraz potrzeby i społeczne oczekiwania, są to tendencje nie tylko wielce niepokojące ale często również trudne do wyjaśnienia. Jedno jest jednak pewne; gospodarka polska musi w najbliższych latach znacząco zwiększyć swój potencjał innowacyjny; musi wykreować klimat sprzyjający przedsiębiorczości i innowacyjności, klimat którego zapleczem jest, jak wiadomo, odpowiednie kulturowe, intelektualne i naukowe środowisko; musi wreszcie zmobilizować całe swoje zaplecze organizacyjne i polityczne na rzecz innowacyjności.

Zasadna wydaje się przy tym teza, że podstawowym warunkiem wzrostu innowacyjności gospodarki polskiej na przełomie wieku są zmiany kulturowe i rozwój odpowiednich instytucji społecznych a w tym głównie wzrost intensywności pracy. Wszakże konfiguracja czynników strategiczno-politycznych, położenie geograficzne, elastyczność rynków kapitałowych i samego kapitału sprzyjają temu wzrostowi.

## 12.2. WSKAŹNIK OGÓLNEJ EFEKTYWNOŚCI NAKŁADÓW

Jeśli przyjąć, opierając się na założeniach dwuczynnikowej funkcji produkcji pierwszego stopnia, że efektywność jest funkcją efektów (Q) i sumy nakładów (C+L), to:

$$H = \frac{Q}{C + L} \quad (12.1)$$

gdzie:

- H – wskaźnik ogólnej efektywności (na poziomie przedsiębiorstwa  $H > 1$ ),
- Q – wartość efektu produkcyjnego,
- C – wartość nakładów kapitału,
- L – wartość nakładów pracy.

<sup>8</sup> Mimo wyraźnego w ostatnich latach spadku deficytu budżetowego do przyzwoitego poziomu poniżej 3%, budżet państwa ciągle narażony jest na jego „odrastanie”. Na przykład w bieżącym roku (1999) już po pięciu miesiącach deficyt ten osiągnął ponad 78% przewidywanego poziomu rocznego (informacja Ministerstwa Finansów z 16 czerwca 1999 roku, za: *Już ponad 10 mld deficytu*, „Gazeta Wyborcza” 1999, nr 139.)

Od trzech lat systematycznie rośnie również poziom deficytu handlu zagranicznego; w 1996 wyniósł on 12,7 mld USD, w 1997 – 16,5 mld, a w 1998 – 18,8 mld USD. Po czterech miesiącach 1999 roku osiągnął on poziom ponad 5 mld USD (*Ujemne saldo po czterech miesiącach*, „Rynki Zagraniczne” 1999, nr 75). Świadczy to, jak się zdaje, że nie udało się jeszcze zbudować fundamentów stabilnego i zrównoważonego wzrostu.

Postęp techniczny (wzrost efektywności) ma miejsce wówczas, gdy tempo wzrostu licznika (efektów) przewyższa tempo wzrostu mianownika (nakładów), albo gdy tempo spadku licznika jest wolniejsze niż tempo spadku mianownika. Ten drugi przypadek można jednak pominąć jako mało prawdopodobny. W istocie chodzi więc o to, aby w warunkach ekspansji produkt osiągany z jednostki nakładu był coraz większy lub aby nakład na jednostkę produktu był coraz mniejszy. Stąd, po rozliczeniu nakładów na jednostkę:

$$H = \frac{1}{k + r} \quad (12.2)$$

gdzie:

$k$  – współczynnik kapitałochłonności produkcji ( $k = C/Q$ ),

$r$  – współczynnik pracochłonności produkcji ( $r = L/Q$ ).

Mikroekonomiczna funkcja produkcji, uwzględniająca wskaźnik ogólnej efektywności przyjmuje więc postać:

$$Q = H \cdot (C + L) \quad (12.3)$$

lub:

$$1 = H (k + r) \quad (12.4)$$

oraz:

$$1 = H \cdot \left( k + \frac{1}{W} \right) \quad (12.5)$$

gdzie:

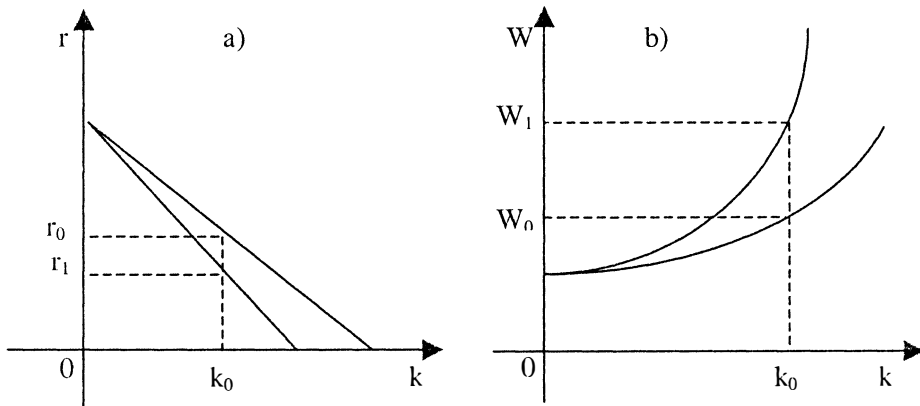
$H$  – stały parametr funkcji (wskaźnik ogólnej efektywności,  $H > 1$ ),

$W$  – wydajność pracy ( $W = 1/r$ ).

Postęp efektywności pozostaje (por. 12.1 i 12.2) rezultatem interakcji między określonym kwantem kapitału (kapitałochłonność, kapitał na jednostkę) i określonym kwantem pracy (pracochłonność). Struktura nakładów może być oczywiście różna zarówno ze względu na rodzaj produktu, jak i przede wszystkim ze względu na stosowaną technikę wytwarzania. W jednym wypadku udział kapitału może być więc dominujący, mówi się wówczas, że stosuje się technikę kapitałochłonną lub że produkcja jest kapitałochłonna, w innym dominujący może być nakład pracy (technika pracochłonna).

Ponieważ funkcja 12.4 uwzględnia jedynie nakłady dwóch czynników przypadające na jednostkę produkcji, to wzrost kapitałochłonności zawsze jest równoznaczny ze spadkiem pracochłonności (wzrostem wydajności pracy).

Jeśli potraktować wskaźnik ogólnej efektywności jako element funkcji produkcji (por. 12.3 i 12.4), to wówczas staje się oczywiste, że stanowi on ilościowy wyraz działania wszystkich czynników wzrostu efektywności.

**Rys. 12.1.** Wskaźnik ogólnej efektywności a pracochłonność i wydajność pracy

Wskaźnik ogólnej efektywności zwiększa sprawność ponoszonych nakładów, co w praktyce oznacza, że przy określonym poziomie kapitałochłonności osiąga się niższy poziom pracochłonności (por. Rys. 12.1a) lub wyższy poziom wydajności pracy (por. Rys. 12.1b).

Wskaźnik ogólnej efektywności nie zawsze wyraża jednak zmiany w gospodarce, które składają się na proces postępu technicznego. Postęp techniczny to, jak wcześniej powiedziano, taka zmiana techniki (relacji między pracą a pozostałymi czynnikami produkcji), która prowadzi do wzrostu efektywności. Chodzi tu więc o wzrost uzbrojenia pracy, skali działalności (koncentracji), organizacji i technologii.

Kategoria ta nie obejmuje więc takich czynników wzrostu efektywności, jak poprawa warunków naturalnych produkcji czy wzrost intensywności pracy. Te ostatnie mają bowiem charakter czynników incydentalnych (rezerw „płytkich”), a nie trwałych, a więc wyrastających z samej gospodarki.

### 12.3. SUBSTYTUCYJNY POSTĘP TECHNICZNY

Ilościowe wyodrębnienie rzeczywistych, niewyczerpalnych czynników postępu technicznego wymaga jednak wyboru odpowiedniej funkcji produkcji. Funkcja liniowa (por. 12.3) zakłada bowiem z definicji stałość reakcji efektów w stosunku do zmian nakładów. Tymczasem istotą postępu technicznego jest właśnie wzmożenie siły reakcji funkcji (produkcji) na wzrost nakładów. Z takiej samej (co do wartości) jednostki nakładu trzeba wszakże osiągnąć większy efekt.

Sprawnym narzędziem analizy jest w tym przypadku tradycyjnie funkcja Cobba-Douglasa. W pierwotnej postaci:

$$Q = H \cdot C^\alpha L^{1-\alpha} \quad (12.6)$$

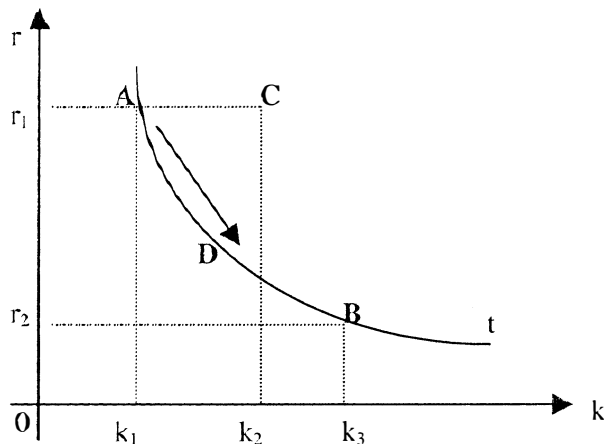
gdzie:

$H$  i  $\alpha$  – stałe parametry funkcji ( $H > 1$  oraz  $0 < \alpha < 1$ ), przy czym,

$\alpha$  – elastyczność produkcji względem nakładów kapitału,

$(1 - \alpha)$  – elastyczność produkcji względem nakładów pracy.

Rys. 12.2. Krzywa jednakowego produktu



A w rozliczeniu jednostkowym (por. Rys. 12.2):

$$H \frac{C^\alpha}{Q^\alpha} \cdot \frac{L^{1-\alpha}}{Q^{1-\alpha}} = 1 \quad (12.7)$$

czyli:

$$H \cdot k^\alpha \cdot r^{1-\alpha} = 1 \quad (12.8)$$

Geometryczną interpretacją równania 12.8 jest hiperboliczna krzywa jednakowego produktu (izokwanta). Stanowi ona zbiór punktów odzwierciedlających rozmaite techniki wytwarzania tej samej jednostki produktu. Od skrajnie kapitałochłonnych, położonych w dolnej części krzywej (na przykład B), do skrajnie pracochłonnych, położonych w górnej części krzywej (na przykład A).

Ściśle biorąc, wszystkie punkty w przedstawionym układzie współrzędnych mogą stanowić ilustrację jakiejś techniki produkcji, reprezentują bowiem połączenie obu czynników produkcji. Nie wszystkie jednak odzwierciedlają realnie istniejące możliwości techniczne (na przykład punkty na lewo od krzy-

wej). Większość z teoretycznie możliwych technik produkcji (punktów) realnie nie istnieje.

Nie wszystkie wszakże korzystne połączenia czynników wytwórczych prowadzą do uruchomienia procesu produkcyjnego. Jest to zrozumiałe, a sytuacja odwrotna byłaby wyrazem braku jakichkolwiek ograniczeń dla wzrostu efektywności produkcji i samej produkcji. Oznaczałoby to, że jednostkę dochodu narodowego wytworzyć można przy dowolnych, nawet bardzo małych nakładach pracy żywej i uprzedmiotowionej. Tymczasem tak nie jest. Na danym etapie rozwoju gospodarka dysponuje ograniczonym zasobem poszczególnych czynników produkcji, a także ograniczonym zestawem techniki produkcji.

Każdy punkt na krzywej jednakowego produktu jest geometrycznym wyrazem pewnej techniki produkcji, oznacza więc połączenie w procesie wytwarzania określonych ilości czynników produkcji, przy czym kombinacja owych ilości w każdym przypadku jest inna. Generalnie biorąc, punkty położone w górnej części krzywej reprezentują techniki charakteryzujące się wyższymi nakładami pracy i niższymi nakładami kapitału na jednostkę produktu, i odwrotnie, punkty położone w dolnej części krzywej reprezentują techniki charakteryzujące się mniejszymi nakładami pracy, ale za to większymi nakładami kapitału na jednostkę produktu.

Te pierwsze noszą nazwę technik pracochłonnych, a drugie kapitałochłonnych. Wynika z tego, że krzywa „t” jest zbiorem technik alternatywnych, to znaczy takich, że wybór między nimi jest obojętny z punktu widzenia sumy ponoszonych nakładów jednostkowych. Im niżej na krzywej „t” położona jest technika, tym mniejszego nakładu pracy, ale jednocześnie większego kapitału, wymaga wytworzenie jednostki produktu, i odwrotnie, im wyżej na krzywej położona jest technika, tym bardziej są to techniki pracochłonne i mniej kapitałochłonne.

Można więc powiedzieć, że praca i kapitał są czynnikami substytucyjnymi, czyli są nawzajem zastępowalne, a wybór takiej lub innej techniki produkcji (konkretnego połączenia tych czynników) w procesie wytwarzania zależy od ilości czynników, jakimi dysponuje gospodarka.

Na przykład przejście od techniki D do techniki A oznaczałoby spadek jednostkowych nakładów kapitału, ale za to wzrost nakładów pracy. Natomiast przejście od techniki A do techniki C oznaczałoby wprawdzie, że nakłady pracy pozostają na tym samym poziomie, ale przy jednoczesnym wzroście nakładów kapitału ( $k_2 > k_1$ ). Praktycznie problem polega więc na wyborze techniki z zestawu technik alternatywnych położonych na krzywej jednakowego produktu.

Pozostałe punkty płaszczyzny nie powinny być brane w krótkim okresie pod uwagę, ponieważ odpowiednie techniki albo nie istnieją, jak to jest w przypadku punktów położonych poza krzywą, bliżej początku układu współrzędnych, albo są mniej sprawne (efektywne), jak to jest w przypadku punktów położonych na prawo od krzywej. Na przykład technika reprezentowana przez

punkt C jest mniej efektywna niż technika A, ponieważ przy jednakowym poziomie pracochłonności jest bardziej kapitałochłonna.

Krzywa jednakowego produktu jest zbiorem punktów reprezentujących techniki realnie istniejące, a więc możliwe do zastosowania w danym miejscu i czasie. Stosując dowolną technikę produkcji (dowolny punkt na krzywej), otrzyma się tę samą jednostkę produktu, a przechodząc od technik przykładowo mniej do bardziej kapitałochłonnych zastępuje się jeden czynnik produkcji drugim, dostosowując technikę do sytuacji gospodarczej (na przykład do aktualnego układu cen).

Krzywa jednakowego produktu odzwierciedla więc również uniwersalną zasadę substytucji czynników produkcji, a przesuwanie się po niej (ruch „punktu” w górę lub w dół) w poszukiwaniu optymalnej techniki produkcji może być interpretowane jako wyraz substytucyjnego postępu technicznego.

Jeżeli będziemy pamiętać, wychodząc z 12.8, że:

$$H \cdot k^\alpha \cdot \frac{1}{W^{1-\alpha}} = 1 \quad (12.9)$$

to:

$$W = H^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot k^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (12.10)$$

co potwierdza wcześniejszy wniosek, że wydajność pracy jest rosnącą funkcją kapitałochłonności (skorygowaną w tym wypadku przez stałe  $H$  i  $\alpha$ ).

Substytucyjny postęp techniczny może być więc traktowany jako wybór (spośród możliwości reprezentowanych przez izokwantę) optymalnego poziomu kapitałochłonności i pracochłonności, mający na celu nie tyle podnoszenie ogólnej efektywności produkcji (bo ta jest jednakowa w każdym punkcie krzywej i wynosi „1”), ile utrzymanie jej na dotychczasowym poziomie. Ruch „punktu” po krzywej jest więc wyrazem dostosowań producenta do zmiennej sytuacji rynkowej i nacisku konkurencji.

Można wykazać, wychodząc z równania 12.6, że w ramach przyjętych założeń modelowych stopa wzrostu wydajności pracy równa jest stopie wzrostu kapitałochłonności. *Ergo*, różniczkując równanie 12.10, a następnie dzieląc wartość przyrostu bezwzględnego przez postać wyjściową, otrzymuje się:

$$w = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot k' \quad (12.11)$$

lub gdy:  $\alpha = 1/2$ ,

$$w = k' \quad (12.12)$$

gdzie:

$w$  – stopa wzrostu wydajności pracy,

$k'$  – stopa wzrostu kapitałochłonności.



Okazuje się, iż substytucyjny postęp techniczny (ruch po izokwancie) może wprawdzie powodować wzrost wydajności pracy, ale jej tempo nie przekracza w zasadzie tempa wzrostu kapitałochłonności.

Lub jeśli pamiętać się, że  $W = 1/q$  oraz  $w = -r'$ :

$$r' + k' = 0 \quad (12.13)$$

gdzie:

$r'$  – stopa wzrostu pracochłonności.

Sumy stóp wzrostu kapitałochłonności i pracochłonności wynoszą zero, co oznacza, że określona zmiana efektywności jednego czynnika zawsze idzie w parze z odpowiednią zmianą efektywności drugiego czynnika, tak że zmiany te redukują się do zera. Albo inaczej: stopa wzrostu wydajności pracy równa jest stopie wzrostu kapitałochłonności produkcji, stąd ich różnica zawsze wynosi zero.

#### 12.4. NIEZALEŻNY POSTĘP TECHNICZNY

W długim okresie czasu zmieniać się mogą jednak nie tylko ceny czynników produkcji, ale przede wszystkim ich podstawa, realne proporcje zasobów tych czynników. Ten sam produkt otrzymuje się wówczas przy mniejszych nakładach pracy i (lub) kapitału albo z tych samych zasobów otrzymuje się produkt większy niż poprzednio. Oznacza to spadek nakładochłonności jednostki produktu, czyli spadek kapitałochłonności lub (i) pracochłonności.

Chodzi o to, że w długim okresie pojawiają się w gospodarce nowe, sprawniejsze od dotychczasowych rozwiązania techniczne i organizacyjne. Powiększa się przede wszystkim wartość kapitału ludzkiego. Nie musi to znajdować natychmiast swe odzwierciedlenie we wzroście nakładów lub (i) zmianie wartościowej struktury kapitału. Wzrost wartości kapitału ludzkiego nie przekłada się bowiem bezpośrednio i natychmiast na wzrost płac. Skutkuje to natomiast wzrostem efektów.

Nawet przy tym samym poziomie nakładów pracy i kapitału można w związku z tym osiągnąć wyższą wartość efektów. Lub inaczej, ten sam efekt można otrzymać przy mniejszych nakładach rzeczowych czynników produkcji. Wzrost efektywności może więc być wyrazem tak zwanego niezależnego postępu technicznego.

Typowym przykładem funkcji produkcji, w której efektywność została wyodrębniona jako niezależny czynnik produkcji, jest rozwinięta postać funkcji Cobba-Douglasa:

$$Q = H \cdot C^\alpha \cdot L^{1-\alpha} \cdot e^{ht} \quad (12.14)$$

gdzie:

oznaczenia  $Q$ ,  $C$ ,  $L$ ,  $\alpha$ ,  $(1 - \alpha)$  – jak poprzednio,

$h$  – stopa niezależnego postępu technicznego,  
 $t$  – parametr czasu,  
 $e$  – podstawa logarytmu naturalnego,  
 $H$  – stały parametr funkcji (wskaźnik ogólnej efektywności).

Efektywność, czyli stosunek efektów do nakładów, wyniesie więc:

$$e^{ht} = \frac{Q}{H \cdot C^\alpha \cdot L^{1-\alpha}} \quad (12.15)$$

Stąd:

$$e^{ht} = \frac{Q^\alpha \cdot Q^{1-\alpha}}{H \cdot C^\alpha \cdot L^{1-\alpha}}$$

czyli:

$$e^{ht} = \frac{W^{1-\alpha}}{H \cdot k^\alpha} \quad (12.16)$$

stąd:

$$e^{ht} = \frac{l}{H \cdot k^\alpha \cdot r^{1-\alpha}} \quad (12.17)$$

Wskaźnik efektywności odzwierciedlający działanie niezależnego postępu technicznego jest więc (por. 12.16) wprost proporcjonalny do odpowiednio zmodyfikowanego współczynnika wydajności pracy ( $W$ ) i odwrotnie proporcjonalny do współczynnika kapitałochłonności ( $k$ ) albo (por. 12.17) odwrotnie proporcjonalny do iloczynu odpowiednio ważonych współczynników pracochłonności ( $r$ ) i kapitałochłonności ( $k$ ).

Rośnie on, gdy wypadkowa zmian produktywności kapitału i pracy jest dodatnia, czyli gdy:

- 1) rośnie zarówno produktywność kapitału, jak i wydajność pracy (spada zarówno kapitałochłonność jak i pracochłonność);
- 2) produktywność kapitału nie ulega zmianie lub nawet spada, ale z nadwyżką powiększa się wydajność (kapitałochłonność nie zmienia się lub nawet rośnie, ale z nadwyżką obniża się pracochłonność);
- 3) wydajność pracy nie ulega zmianie lub nawet spada, ale z nadwyżką powiększa się produktywność kapitału (pracochłonność nie zmienia się albo nawet rośnie, ale z nadwyżką zmniejsza się kapitałochłonność).

Natomiast stopa niezależnego postępu technicznego ( $h$ ), wyprowadzona z równania (12.17):

$$h = -\alpha \cdot k' - (1 - \alpha) \cdot r' \quad (12.18)$$

lub

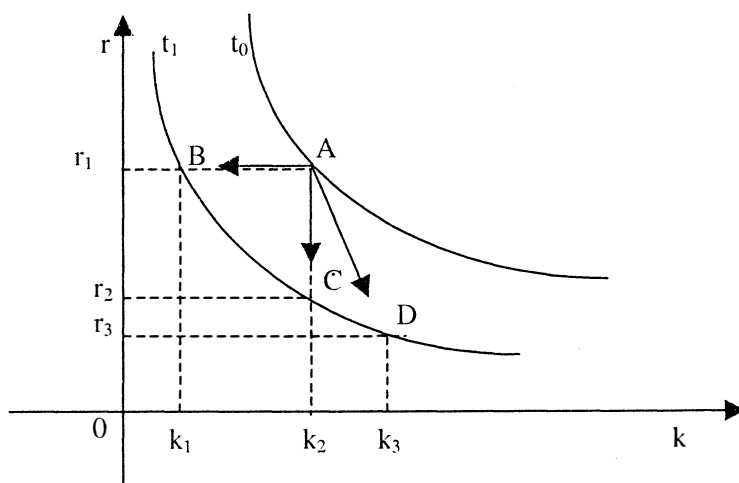
$$h = (1 - \alpha) \cdot w - \alpha \cdot k' \quad (12.19)$$

przy założeniu, oczywiście, że  $\Delta t = 1$ .

Stopa wzrostu efektywności ( $h$ ) jest więc jednoznacznie ujemnie sprzężona z kapitałochłonnością i pracochłonnością, to znaczy jest ona dodatnia tylko wówczas, gdy suma odpowiednio ważonych stóp wzrostu kapitałochłonności ( $k'$ ) i pracochłonności ( $r'$ ) jest ujemna lub gdy stopa wzrostu jednostkowych nakładów jednego czynnika (na przykład kapitałochłonności) jest z nadwyżką rekompensowana przez ujemną stopę wzrostu nakładów jednostkowych drugiego czynnika (na przykład pracochłonności).

Jednocześnie stopa niezależnego postępu technicznego ( $h$ ) stanowi nadwyżkę stopy wzrostu wydajności pracy ( $w$ ) nad stopą wzrostu kapitałochłonności ( $k'$ ).

Rys. 12.3. Niezależny postęp techniczny



W rozliczeniu jednostkowym funkcja produkcji uwzględniająca działanie niezależnego postępu technicznego przyjmuje postać następującą:

$$l = H \cdot k^{\alpha} \cdot r^{1-\alpha} \cdot e^{ht} \quad (12.20)$$

a jej interpretację graficzną stanowi przesuwająca się w czasie w kierunku początku układu współrzędnych krzywa jednakowego produktu (por. Rys. 12.3).

Analiza parametrów dowolnie wybranych technik reprezentowanych przez odpowiednie punkty na izokwancie  $t_1$  wskazuje, że w każdym wypadku są one sprawniejsze od technik reprezentowanych przez punkty na izokwancie  $t_0$ . Na przykład technika A jest mniej sprawna zarówno od techniki B, jak i od techniki C oraz D. W porównaniu z techniką B jest ona bowiem bardziej kapitałochłonna (przy tym samym poziomie pracochłonności). W porównaniu z techniką C jest ona bardziej pracochłonna (przy jednakowym poziomie kapitałochłonności),

natomiast w porównaniu z techniką D jest ona wprawdzie mniej kapitałochłonna, ale przy dużo większej pracochłonności.

Tak więc pojawienie się nowych, sprawniejszych technik wytwarzania, czego geometrycznym wyrazem jest przesuwanie się zbioru technik alternatywnych w kierunku początku układu współrzędnych, jest świadectwem postępu efektywności.

Jeżeli ów spadek nakładów (wzrost efektywności) jest wynikiem przede wszystkim oszczędności pracy żywej przy tych samych nakładach kapitału, jak w przypadku przejścia od techniki A do techniki C, to taka zmiana techniki nosi nazwę postępu technicznego pracooszczędnego. Jeżeli wzrost efektywności jest wynikiem przede wszystkim zmniejszenia nakładów kapitału na jednostkę produktu przy podobnych nakładach pracy żywej, jak to w przypadku przejścia od techniki A do techniki B, to taka zmiana techniki nosi nazwę postępu technicznego kapitałoszczędnego.

Postęp techniczny może mieć również charakter zarazem kapitałochłonny, jak i pracooszczędny (przejście od techniki A do techniki D).

Przyjmując za kryterium klasyfikacji zachowanie się współczynnika kapitałochłonności, wyróżnia się więc trzy typy niezależnego postępu technicznego:

- 1) postęp techniczny kapitałochłonny (gdy współczynnik kapitałochłonności rośnie);
- 2) postęp techniczny neutralny (gdy współczynnik kapitałochłonności nie ulega zmianie);
- 3) postęp techniczny kapitałoszczędny (gdy współczynnik kapitałochłonności maleje).

Warto podkreślić, że postęp techniczny ma najczęściej charakter postępu pracooszczędnego (i kapitałochłonnego).

W aspekcie wdrożeniowym (na poziomie przedsiębiorstwa) postęp techniczny pojawia się w formie innowacji produktowych, technicznych, technologicznych i organizacyjnych.

## Zadania sprawdzające

### Zadanie 1

Które z wymienionych sposobów zwiększania wydajności zaliczymy do postępu technicznego

- a. wzrost doświadczenia pracownika
- b. wzrost kwalifikacji pracownika
- c. zakup nowego urządzenia dla pracownika
- d. wprowadzenie nowego oprogramowania komputerowego

Zadanie 2

Wprowadzenie na rynek tworzyw sztucznych spowodowany wzrostem cen tworzyw naturalnych jest przykładem innowacji:

- procesowej
- organizacyjnej
- popytowej
- podażowej

Zadanie 3

Wprowadzenie innowacji produktowej doprowadzi do:

- wzrostu sprzedaży produktu w krótkim okresie
- wzrostu kosztów krańcowych
- spadku kosztów krańcowych
- spadku cen produktu

Zadanie 4

Zmiana techniki prowadząca do zmiany relacji czynników produkcji przy niezmiennym poziomie efektywności nazywamy:

- kapitałochłonnym
- pracochłonnym
- substytucyjnym
- niezależnym

Zadanie 5

Przedsiębiorstwo ma do wyboru dwie metody produkcji charakteryzujące się różnymi proporcjami nakładów czynników produkcji (pracy i kapitału). Jednostkowy koszt nakładu pracy wynosi 400, a jednostkowy koszt nakładu kapitału 800.

Ustal technikę produkcji dla każdego poziomu produkcji.

Jak zmieni się technika produkcji jeżeli nastąpi zmiana relacji cen czynników: cena pracy wzrośnie do 600, a cena kapitału nie zmieni się.

Wskaż, która technika produkcji jest optymalna dla każdej wielkości produkcji.

Produkcja	Technika A		Technika B	
	Nakład pracy	Nakład kapitału	Nakład pracy	Nakład kapitału
2	18	4	12	8
4	38	6	20	16
6	58	8	28	24
8	82	10	36	32
10	118	12	48	44
12	170	14	66	58
14	240	16	90	76

**Zadanie 6**

Tabela przedstawia dane dotyczące działalności przedsiębiorstwa. Określ wielkość wydatków firmy na B+R gwarantujące możliwość wprowadzania innowacji. Jaki warunek musi być spełniony, aby doszło do takiej sytuacji?

Produkcja	Cena	Koszt całkowity
1	12	5
2	11	11
3	10	19
4	9	27
5	8	38
6	7	49

Ustalenie poziomu wydatków na B+R wymaga określenia wielkości produkcji, przy której utarg krańcowy jest równy kosztowi krańcowemu.

**Zadanie 7**

Funkcja produkcji przedsiębiorstwa:  $Q = 10L^{0.5}C^{0.5}$ . Wiedząc, że koszt pracy wynosi 100, a koszt kapitału 200 ustal, jaki poziom nakładów czynników produkcji odpowiada wielkości produkcji 200 jednostek. Jaki charakter ma wykorzystywana w przedsiębiorstwie technika produkcji?

**Odpowiedzi****Zadanie 1**

a, b, c, d

**Zadanie 2**

c

**Zadanie 3**

b

**Zadanie 4**

d

**Zadanie 5**

W celu wskazania najlepszej techniki produkcji należy obliczyć koszt całkowity dla każdej wielkości produkcji. Mniejsza wartość kosztu całkowitego wskaże odpowiednią dla danej produkcji technikę.

Produkcja	Koszt całkowity		Wybrana technika
	Technika A	Technika B	
2	10.400	11.200	A
4	20.000	20.800	A
6	29.600	30.400	A
8	40.800	40.000	B
10	56.800	54.400	B
12	79.200	72.800	B
14	108.800	96.800	B



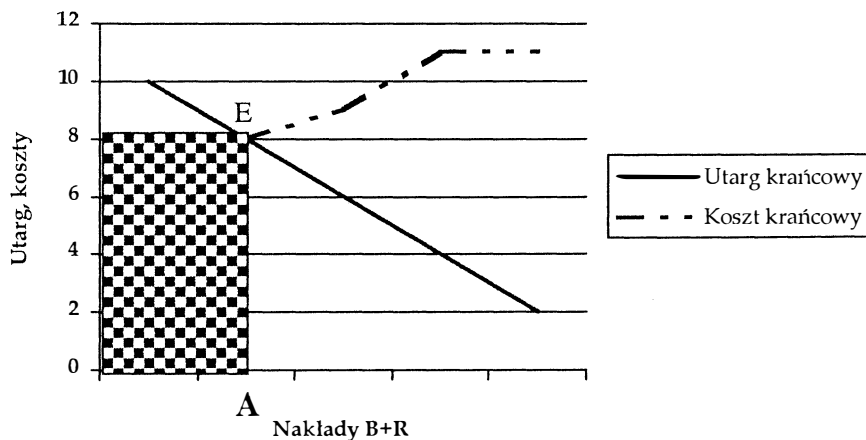
Przy niskiej produkcji odpowiednią jest technika produkcji A, czyli bardziej pracochłonna. Przy większej produkcji przedsiębiorstwo wybierze technikę B, w której udział kapitału i pracy jest w miarę równomierny.

W przypadku zmiany relacji cen czynników produkcji wielkość kosztu całkowitego i wybór techniki produkcji będzie następujący:

Produkcja	Koszt całkowity		Wybrana technika
	Technika A	Technika B	
2	14.000	13.600	B
4	27.600	24.800	B
6	41.200	36.000	B
8	57.200	47.200	B
10	80.400	64.000	B
12	113.200	86.000	B
14	156.800	114.800	B

W przypadku wzrostu ceny pracy przy każdym poziomie produkcji wybór techniki będzie zmierzał do kapitałochłonności. Optymalną techniką będzie więc tylko technika B, zawierająca więcej kapitału.

#### Zadanie 6



Obliczenia przedstawia tabela.

Produkcja	Utarg całkowity	Utarg krańcowy	Koszt krańcowy	Zysk
1	12	---	---	7
2	22	10	6	11
3	30	8	8	11
4	36	6	9	9
5	40	4	11	2
6	42	2	11	7

Wielkość nakładów na działalność B+R przedstawia obszar 08EA wyznaczony przez przecięcie kosztów krańcowych i utargu krańcowego.

Zadanie 7

Funkcja kosztów wygląda następująco:

$K = v \cdot L + s \cdot C$ , gdzie:  $v$  – jednostkowa cena pracy,  $s$  – jednostkowa cena kapitału;

Funkcja kosztów przyporządkowuje cenom czynników produkcji wielkość kosztów przy założeniu minimalizacji kosztów:

$$K = K(Q, v, s)$$

Biorąc pod uwagę te założenia można utworzyć funkcję Lagrange'a:

$$E = f(L, C) + \lambda(K - v \cdot L - s \cdot C), \text{ gdzie: } \lambda - \text{mnożnik Lagrange'a;}$$

Natomiast warunki konieczne ekstremum funkcji:

$$1) \frac{\delta E}{\delta L} = \frac{\delta Q}{\delta L} - \lambda \cdot v = 0$$

$$2) \frac{\delta E}{\delta C} = \frac{\delta Q}{\delta C} - \lambda \cdot s = 0$$

$$3) \frac{\delta E}{\delta \lambda} = K - v \cdot L - s \cdot C = 0$$

Dzieląc warunek 1) przez 2) uzyskamy:  $\frac{C}{L} = \frac{v}{s}$

Dla danych z zadania funkcja Lagrange'a:  $E = 10L^{0.5}C^{0.5} + \lambda(K - vL - sC)$

oraz warunki ekstremum:

$$1) \frac{\delta E}{\delta L} = \frac{10}{2}L^{-0.5}C^{0.5} - \lambda \cdot v = 0$$

$$2) \frac{\delta E}{\delta C} = \frac{10}{2}L^{0.5}C^{-0.5} - \lambda \cdot s = 0$$

$$3) \frac{\delta E}{\delta \lambda} = K - vL - sC = 0$$

Relacja  $C/L$  wyniesie  $\frac{v}{s} = \frac{1}{2}$ , czyli  $L = 2C$ .

Stąd:

$$200 = 10L^{0.5}C^{0.5} = 10(2C)^{0.5}C^{0.5} = 10(2)^{0.5}C$$

czyli:  $C = 14,142$ ,  $L = 28,284$

Stosowana technika produkcji ma charakter pracochłonny.