

ROZPRAWA DOKTORSKA

Symetria cechowania i transformacja
Lorentza dla 2-punktowych funkcji
Wightmana w elektrodynamice kwantowej
dla 2-potencjałowego modelu Zwanzigera

Elżbieta Dzimida-Chmielewska

Promotor: dr hab. Jerzy A. Przeszowski, prof. UwB



WYDZIAŁ FIZYKI
UNIwersytet w Białymstoku

10 marca 2014

*Pragnę serdecznie podziękować mojemu promotorowi
Panu Profesorowi Jerzemu Przeszowskiemu
za życzliwość, opiekę merytoryczną oraz cenne wskazówki
udzielane podczas pisania tej pracy.*

*Szczególne pragnę podziękować mojemu mężowi Robertowi,
córkom Ani i Julce oraz Rodzicom za wsparcie, wyrozumiałość
i motywację do pracy.*

Streszczenie

W pracy przedstawiono opis sektora pól cechowania dla elektrodynamiki kwantowej z prądami elektrycznymi i magnetycznymi. Wykorzystano model Zwanzigera zawierający dwa niezależne potencjały cechowania A_μ i B_μ . Założono, że prądy elektryczne i magnetyczne mają takie same własności transformacyjne, co prowadzi do złamania symetrii P i T , a jedynie złożenie transformacji PT lub ogólniej PTC jest symetrią układu. Dla pól cechowania, badano własności 2-punktowej funkcji Wightmana, czyli próżniowej wartości oczekiwanej dla nieuporządkowanego iloczynu dwóch operatorów pola cechowania. Pokazano ogólną postać diagonalnych funkcji Wightmana, $\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle$ i $\langle 0|B_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle$ dla różnych warunków cechowania, która ma postać symetryczną i zawiera część niezmienniczą proporcjonalną do $g_{\mu\nu}$. Ponadto znaleziono równanie różniczkowe na mieszane funkcje Wightmana $\langle 0|A_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle$ i wykazano, że nie ma ono lorentzowsko-niezmienniczego rozwiązania. Znaleziono sferycznie symetryczne rozwiązanie, które odpowiada cechowaniu Coulomba, co zostało udowodnione na drodze kanonicznego kwantowania metodą Diraca. Dla innych warunków cechowania: planarnym, cechowaniu stożka świetlnego w kierunku 1 oraz 3, została przeprowadzona procedura kwantowania kanonicznego metodą Faddeeva-Jackiwa. Wyznaczone funkcje Wightmana w tych cechowaniach są zgodne z ogólnymi wzorami, wyprowadzonymi wcześniej i znaleziono postać członów zależnych od cechowania.

Summary

This dissertation analyses the gauge field sector for the quantum electrodynamics with electric and magnetic currents. It uses the Zwanziger model with two independent gauge field potentials A_μ and B_μ . The assumption that the electric and magnetic currents have the same transformation properties, effectively leads to the P and T symmetry breaking, while the composed transformation PT or generally PTC recovers the symmetry of the system. The properties of two-point Wightman functions, i.e. the vacuum expectations values of the unordered product two gauge field operators, were intensively studied. The general form of the diagonal Wightman functions $\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle$ and $\langle 0|B_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle$ is found for different choices of gauge fixing conditions - it has a symmetrical form and includes the invariant part proportional to $g_{\mu\nu}$. Furthermore, the differential equation has been found for the mixed Wightman functions $\langle 0|A_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle$. It is shown that this equation has no Lorentz covariant solution. But the spherically symmetric solution has been found and it corresponds to the Coulomb gauge condition - this is proven by the canonical quantization procedure for systems with constraints - the Dirac method. For other gauge conditions: planar, light cone gauge in 1 and 3 direction, the canonical quantization procedure is carried out within the simplified procedure - the Faddeev-Jackiw method. The Wightman functions for the gauge field potentials are found and they are consistent with general formulas derived before. Also the gauge dependent parts are explicitly given for different gauge fixing conditions.

Spis treści

Wstęp	ix
I. Pole elektromagnetyczne w obecności ładunków elektrycznych i magnetycznych	1
1.1. Ładunki magnetyczne w teorii klasycznej	1
1.2. Ładunki magnetyczne w teorii kwantowej	2
1.2.1. Poszukiwania fizycznego monopolu magnetycznego	4
1.2.2. Opis dwupotencjałowy	5
II. Wybrane własności teorii klasycznej	7
2.1. Symetrie dyskretne dla dyonowych równań Maxwella	7
2.1.1. Transformacja parzystości	7
2.1.2. Transformacja inwersji w czasie	9
2.1.3. Transformacja sprzężenia ładunkowego	10
2.1.4. Złożenie transformacji P i T	11
2.2. Model Zwanzigera	12
III. Elektrodynamika kwantowa z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi	15
IV. Wybrane własności funkcji Wightmana	19
4.1. Funkcje Wightmana	19
4.1.1. Translacyjna niezmienniczość	19
4.1.2. Transformacja Lorentza dla pól wektorowych	20
4.1.3. Transformacje dyskretne dla potencjałów	20
4.2. Niezmienniczość względem cechowania	22
4.2.1. Model jednopotencjałowy	22
4.2.2. Model Zwanzigera	24
4.2.3. Nediagonalne funkcje Wightmana	25
4.2.4. Rozwiązanie sferycznie symetryczne	26
4.2.5. Pętle Wilsona dla mieszanych funkcji Wightmana	27
V. Kwantowanie kanoniczne układów z więzami - procedura Faddeeva-Jackiwa	29
5.1. Cechowanie planarne	31
5.1.1. Procedura kanoniczna	32
5.1.2. Funkcje Wightmana	34
5.1.3. Równoważność rozwiązań	35
5.2. Cechowanie dLC_1	36
5.2.1. Procedura kanoniczna	37
5.2.2. Funkcje Wightmana dla wyjściowych pól	44
5.2.3. Równoważność rozwiązań	46
5.3. Cechowanie dLC_3	47
5.3.1. Procedura kanoniczna	47
5.3.2. Funkcje Wightmana	51

5.3.3. Równoważność rozwiązań	52
VI. Kwantowanie kanoniczne układów z więzami - procedura Diraca	55
6.1. Cechowanie Coulomba dla modelu 1-potencjałowego	56
6.2. Cechowanie Coulomba dla modelu Zwanzigera	60
VII Podsumowanie	67
A. Dodatek: Oznaczenia	71
B. Dodatek: Potencjały dla pola elektromagnetycznego wytworzonego przez nieruchomy punktowy monopol magnetyczny	73
B.1. Wstęp do teorii dystrybucji Schwartza	73
B.2. Monopol magnetyczny Diraca w opisie jednopotencjałowym	75
B.3. Monopol magnetyczny Diraca w modelu Zwanzigera	78
B.3.1. Dowód granicy całki (B.48) dla $z \rightarrow 0$	81
C. Dodatek: Własności wybranych funkcji osobliwych	83
C.1. Funkcja osobliwa d'Alamberta D_+	83
C.2. Funkcja osobliwa dla cechowania planarnego E_+	84
C.3. Funkcja osobliwa $\mathfrak{D}_+(x)$	85
C.4. Funkcja osobliwa dla cechowania stożka świetlnego G_+	85
C.5. Odwrotny operator Laplace'a w d wymiarach	87
C.6. Operator Laplace'a z ułamkowym wykładnikiem	88
D. Dodatek: Funkcja $D_+(x)$ jako dystrybucja	91
D.1. Niezmiennicza funkcja osobliwa $D_+(x)$	91
D.1.1. $D_+(x)$ jako dystrybucja w \mathbb{R}	91
D.1.2. Pochodna dystrybucji i pochodna dystrybucyjna	93
D.1.3. Warunek niezmienniczości Lorentza dla $D_+(t, r)$	93
D.1.4. Transformacja skalowania (dylatacji) dla $D_+(t, r)$	94
D.2. $D_+(t, r)$ jako dystrybucja w \mathbb{R}^3	95
D.2.1. Granica $t \rightarrow 0$	98
D.2.2. Pochodna $\partial D_+/\partial t$ i pochodna dystrybucyjna $\mathbf{D}_i D_+(x)$	98
D.2.3. Niezmienniczość Lorentza i transformacja skalowania	99
E. Dodatek: Kwantowanie kanoniczne - szczegóły rachunkowe	103
E.1. Cechowanie dLC ₁	103
E.2. Cechowanie dLC ₃	105
Bibliografia	109

Wstęp

Symetria teorii fizycznej, jest czymś pożądanym, wprowadzającym porządek i piękno do opisu. Świat realny, przynajmniej w niskich energiach, wydaje się być pełen złamanych symetrii. Czasami potrafimy znaleźć powód takiego stanu, a nawet odtworzyć symetrie, by otrzymać pełniejszy obraz. Brak ładunku magnetycznego, analogicznego do ładunku elektrycznego, którego istnienie umożliwia zapisanie równań Maxwella w postaci symetrycznej jest taką złamaną symetrią. Pierwsze informacje o monopolach magnetycznych możemy znaleźć w pracy Petrusa Pelegriniusa z 1269 r. O monopolach magnetycznych pisał Curie w 1894 [1], zaś dwa lata później pojawiła się praca Poincarégo [2]. Jednak współczesna teoria monopoli rozpoczęła się pracą opublikowaną przez Diraca w 1931 [3], który zauważył, że istnienie ładunku magnetycznego pozwala wyjaśnić obserwowane skwantowanie ładunku elektrycznego.

Monopol magnetyczny jest wyjątkową konstrukcją teoretyczną, która przetrwała ponad wiek bez żadnych dowodów eksperymentalnych i pozostała w centrum zainteresowania wielu pokoleń fizyków. Zarówno prace teoretyczne rozważające istnienie ładunków magnetycznych, jak również eksperymenty poszukujące ich istnienia, przyczyniły się do rozwoju kwantowej teorii pola, a powstały w ich wyniku aparat matematyczny wykorzystywany, jest również w wielu teoriach nie związanych z monopolami. Zainteresowanie cząstkami obdarzonymi ładunkami magnetycznymi jest niegasnące. Na poszukiwania monopoli przeznaczają się wciąż wiele czasu, energii i pieniędzy. Szuka się ich zarówno przy użyciu najnowszych zderzaczy cząstek, jak również w docierającym do nas promieniowaniu z przestrzeni kosmicznej, a nawet w skałach wulkanicznych i innych materiałach. Większość teorii wielkiej unifikacji zawiera w swoim opisie tego typu cząstki, które w zależności od założeń, posiadają różne masy i ładunki elementarne. Istnienie cząstek obdarzonych ładunkiem magnetycznym wydaje się być konieczne do stworzenia spójnej teorii opisującej nasz świat. Niedawne wyniki wskazujące na obecność monopoli w kryształach lodu spinowego podsyłyły zainteresowanie tym tematem.

Istnieje kilka alternatywnych teorii cząstek obdarzonych ładunkiem magnetycznym. Początkowo analizowałam dwupotencjałowy model zaproponowany przez Przeszowskiego, jednak wstępne wyniki [4] uzyskane z niesymetrycznej gęstości lagrangianu w tym modelu skłoniły mnie do wyboru modelu zaproponowanego przez Zwanzigera. Model ten pozwala na opisanie lokalnych oddziaływań i jest dualnie niezmienniczy. To sformułowanie QED z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi wprowadza dwa potencjały cechowania oraz wyróżniony wektor pojawiający się w definicji tensora elektromagnetycznego. Poszukiwanie struktury funkcji Wightmana, będącymi prostymi obiektami pozwalającymi zbadać różne własności teorii kwantowej, doprowadziło do wielu interesujących wyników, które przedstawiam w tej rozprawie.

Niniejsza praca składa się z siedmiu rozdziałów. Rozdział pierwszy stanowi wstęp do tematu i przedstawia rozwój teorii klasycznej i kwantowej ładunków magnetycznych oraz genezę warunku kwantyzacji Diraca, który stał się kluczowym argumentem, by zajmować się cząstkami obdarzonymi ładunkiem magnetycznym. W rozdziale drugim przedstawiłam działanie symetrii dyskretnych na pola elektryczne i magnetyczne oraz równania Maxwella w obecności ładunków i prądów magnetycznych. Analizuję tu działanie transformacji pa-

rzystości, inwersji w czasie i sprzężenia ładunkowego oraz ich złożenia. Rozdział ten zawiera również opis modelu dwupotencjałowej elektrodynamiki Zwanzigera, który stał się punktem wyjścia badań zawartych w niniejszej pracy. Rozdział trzeci zawiera pełen lagrangian QED ze źródłami elektrycznymi i magnetycznymi. Podstawowe informacje o funkcjach Wightmana i ich własności transformacyjnych znajdują się w rozdziale czwartym. Zawiera on również transformacje dyskretne potencjałów cechowania i funkcji Wightmana. Przedstawiłam tu wyprowadzenie równania wynikającego z podstawowych założeń modelu Zwanzigera, którego rozwiązaniami są funkcje Wightmana. W rozdziale piątym przedstawione zostały wyniki kanonicznego kwantowania metodą Faddeeva-Jackiwa oraz uzyskane funkcje Wightmana w trzech różnych cechowaniach. Rozdział ten zawiera również porównanie funkcji Wightmana uzyskanych na drodze kanonicznego kwantowania z funkcjami uzyskanymi jako rozwiązania równania w poprzednim rozdziale. Metoda Diraca kwantowania kanonicznego układów z więzami została zastosowana do otrzymania wyników przedstawionych w rozdziale szóstym. Praca kończy się podsumowaniem zawartym w ostatnim, siódmym, rozdziale oraz szeregiem dodatków zawierających uzupełnienia rozdziałów i szczegóły przeprowadzonych rachunków, które wydzieliłam z głównej części pracy, by nie zaciemniały zasadniczej treści.

Podczas pisania niniejszej rozprawy nieocenionym źródłem wiedzy o monopolach magnetycznych oraz dionach okazała się monografia Shnira [5]. Nie mogę również pominąć podręczników Itzyksona i Zuber [6] oraz Białynickiego-Biruli [7], [8], które stanowią doskonałą podstawę do badań w kwantowej teorii pola.

W całej pracy używamy jednostek układu międzynarodowego (SI), prędkość światła oraz stała Plancka $c = \hbar = 1$ o ile w treści nie zaznaczono inaczej. Zarówno wielkości klasyczne jak i odpowiadające im operatory kwantowe oznaczane są tym samym symbolem, co mam nadzieję nie prowadzi do niejasności.

I. Pole elektromagnetyczne w obecności ładunków elektrycznych i magnetycznych

Monopol magnetyczny jako realną, fizyczną cząstkę pierwszy rozważał Pierre Curie w 1894 [1], a w roku 1931 kwantową teorię opisującą układ z elektrycznymi i magnetycznymi ładunkami przedstawił Paul Dirac [3], [9]. W konsekwencji wprowadzenia w teorii Diraca monopoli, pojawił się warunek kwantyzacji ładunku elektrycznego. Przynajmniej jeden ładunek magnetyczny we wszechświecie tłumaczyłby skwantowanie ładunku elektrycznego. Nic zatem dziwnego, że ta teoria znalazła wielu zwolenników.

1.1. Ładunki magnetyczne w teorii klasycznej

Elektrodynamikę klasyczną potrafimy opisać przy użyciu czterech równań Maxwella, które dla układów bez ładunków elektrycznych i magnetycznych mają postać [10]

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0, \quad (\text{I.1a})$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{E}}, \quad (\text{I.1b})$$

jeżeli $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} = 1$, przy czym $\underline{\mathbf{E}}$ i $\underline{\mathbf{B}}$ są wektorami opisującymi pole elektryczne i magnetyczne. Widzimy z (I.1b), że zależne od czasu pole magnetyczne generuje pole elektryczne, a zmienne w czasie pole elektryczne generuje pole magnetyczne.

Heaviside [11] zauważył, że równania Maxwella bez źródeł (I.1) są niezmiennicze względem transformacji

$$\underline{\mathbf{E}} \rightarrow \underline{\mathbf{E}} \cos \theta - \underline{\mathbf{B}} \sin \theta, \quad \underline{\mathbf{B}} \rightarrow \underline{\mathbf{E}} \sin \theta + \underline{\mathbf{B}} \cos \theta. \quad (\text{I.2})$$

Ta symetria $\mathbf{O}(2)$, parametryzowana przez dowolny kąt θ , nazywana jest elektromagnetyczną dualnością. Wybierając $\theta = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy transformację

$$\underline{\mathbf{E}} \rightarrow \underline{\mathbf{B}}, \quad \underline{\mathbf{B}} \rightarrow -\underline{\mathbf{E}}, \quad (\text{I.3})$$

zamieniającą pola elektryczne z magnetycznymi. Widzimy zatem, że jeśli teoria jest dualnie niezmiennicza, to rozdzielenie pól na elektryczne i magnetyczne jest tylko kwestią przyjętej konwencji.

Pole elektryczne wokół ładunku elektrycznego e wynosi

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\mathbf{r}}{r^3}, \quad (\text{I.4})$$

a poruszający się ładunek w polu elektromagnetycznym odczuwa działanie siły Lorentza

$$\mathbf{F} = e(\underline{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \underline{\mathbf{B}}). \quad (\text{I.5})$$

Korzystając z dualności elektromagnetycznej (I.3) możemy wypisać analogiczne związki dla ładunków(monopoli) magnetycznych g , gdyby takie istniały. Tak zdefiniowany monopol jest, tak jak elektron, cząstką punktową obdarzoną ładunkiem magnetycznym zamiast elektrycznego. Pole magnetyczne wyraża się wówczas jako

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{g\mathbf{r}}{r^3}, \quad (\text{I.6})$$

zaś siła działająca na monopol wynosi

$$\mathbf{F} = g(\underline{\mathbf{B}} - \mathbf{v} \times \underline{\mathbf{E}}). \quad (\text{I.7})$$

Równania opisujące cząstki ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi, przy czym jedna cząstka może nieść ładunek elektryczny lub magnetyczny lub oba jednocześnie, mają postać

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = \mu_0 \rho_m, \quad (\text{I.8a})$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}} - \mathbf{J}_m, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_e, \quad (\text{I.8b})$$

i będziemy je nazywać dyonowymi równaniami Maxwella. Oba rodzaje ładunków spełniają prawa zachowania $\nabla \cdot \mathbf{J}_e = -\frac{\partial \rho_e}{\partial t}$ i $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$.

Ładunek magnetyczny nie został do tej pory znaleziony, w związku z tym symetria dualności elektromagnetycznej jest złamana. Pojawia się oczywiście pytanie o powód tej asymetrii. Z punktu widzenia elektrodynamiki klasycznej nie ma powodu dla którego nie powinny istnieć monopole magnetyczne, co więcej ich obecność pozwoliłaby na zachowanie symetrii dualności elektromagnetycznej.

Analiza układów zawierających monopole magnetyczne prowadzi do wielu ciekawych obserwacji. Jeśli będziemy klasycznie rozważać problem rozpraszania elektronu na monopolu okaże się, że jest on w stanie tylko zbliżyć się na pewną odległość do monopolu b , a następnie oddala się do nieskończoności (tzw. efekt lustra magnetycznego). Przy takim rozpraszaniu kierunek momentu pędu nie jest stały, a co więcej jego wartość jest niezerowa, nawet w statycznym układzie elektron-monopol [12].

Naturalnym uogólnieniem monopola byłyby cząstka obdarzona zarówno ładunkiem magnetycznym, jak i elektrycznym, tzw. dyon. Rozpraszanie tego typu dualnych cząstek o ładunkach odpowiednio (e_1, g_1) i (e_2, g_2) prowadzi do trajektorii eliptycznych, które w przeciwieństwie do klasycznego problemu Keplera dla dwóch elektronów, wykonują precesję [13].

1.2. Ładunki magnetyczne w teorii kwantowej

Mechanika kwantowa opisuje pola elektromagnetyczne przy użyciu potencjałów skalarnego ϕ i wektorowego \mathbf{A} zamiast pól \mathbf{E} i \mathbf{B} . Znając potencjały, które są polami zależnymi od

położenia, możemy otrzymać pola elektryczne i magnetyczne

$$\underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad \underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{I.9})$$

Wprowadzenie do opisu potencjałów łamie symetrię dualności, ale potencjały nie są obserwabnymi. Co więcej istnieje nieskończona ilość różnych potencjałów które dają te same pola elektryczne i magnetyczne. Przejście pomiędzy fizycznie równoważnymi opisami nazywa się transformacją cechowania, a ponieważ wielkości fizyczne nie zmieniają się pod działaniem takiej transformacji mówimy, że teoria ma symetrię cechowania. Jedną z podstawowych relacji z analizy wektorowej mówi, że dywergencja rotacji znika $\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, zatem opis przy użyciu potencjałów (I.9) uniemożliwia wprowadzenie ładunków magnetycznych.

Opisując w języku mechaniki kwantowej poruszającą się cząstkę naładowaną elektrycznie, zależność od potencjału wektorowego \mathbf{A} pojawia się w zespolonej fazie funkcji falowej. Jest to zgodne z symetrią cechowania, bo tak jak potencjał wektorowy, faza nie jest wielkością mierzalną. W mechanice kwantowej potrzebujemy więc do opisu potencjałów, a nie pól.

W roku 1932 Paul Dirac [3] pokazał, że w ramach mechaniki kwantowej możemy wprowadzić potencjał, który opisuje ładunki magnetyczne. Jeśli solenoid, przez który płynie prąd, jest dużo dłuższy niż jego średnica, linie pola magnetycznego przy każdym z jego końców wyglądają jak linie pola pochodzące od monopola magnetycznego o ładunku g , równym strumieniowi magnetycznemu. Ponieważ w układzie nie ma ładunków magnetycznych, bez problemu możemy wypisać potencjał wektorowy

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 g}{4\pi|\mathbf{r}|} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{r}| - \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \quad (\text{I.10})$$

gdzie \mathbf{k} jest wektorem skierowanym w kierunku osi solenoidu. Ścisłe wyprowadzenie tego potencjału znajduje się w dodatku (B.2) Możemy więc rozważać bardzo cienki i długi solenoid, tak aby punkt końcowy znalazł się nieskończenie daleko, a następnie zapomnieć o solenoidzie zostawiając generowany przez niego potencjał. Taki potencjał wektorowy opisuje monopol magnetyczny połączony ze struną Diraca doprowadzającą do niego strumień magnetyczny. Struna Diraca jest nieskończenie cienka i potencjał wektorowy ma na niej osobliwość, aby stała się ona nieobserwowalna musimy nałożyć warunek

$$eg = \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{I.11})$$

znany jako warunek kwantyzacji Diraca. W miejsce osobliwego potencjału (I.10) możemy użyć zgodnie z [14] zregulowanej formy potencjału, ale prowadzi on do osobliwych członów w polu magnetycznym.

Dirac udowodnił, że wprowadzenie do teorii kwantowej monopoli magnetycznych nie tylko jest możliwe, lecz również w sposób naturalny prowadzi do obserwowanej kwantyzacji ładunku elektrycznego, niestety teoria ta jest nielokalna i zawiera niefizyczne zmienne dynamiczne - struny.

Kolejne lata przyniosły kilka nowych propozycji opisu elektrodynamiki z monopolami,

m.in. potencjał Schwingera [15] (we współrzędnych sferycznych)

$$\mathbf{A}^{Sch} = -\frac{g \cos \theta}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi = \frac{g}{2r} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad (\text{I.12})$$

który jest złożeniem dwóch potencjałów Diraca. Schwinger uważał, że taki potencjał będzie właściwszy dla relatywistycznej teorii pola.

Możemy również opisać pole wokół monopola przez potencjał, zdefiniowany nie globalnie, ale mający różną postać w różnych obszarach [16]. Żądanie spójności w nakładających się punktach prowadzi do warunku kwantyzacji ładunków (I.11).

Wprowadzenie monopoli do kwantowej teorii pola Maxwella - elektromagnetodynamiki sprawia więcej problemów. Po pierwsze, zostało udowodnione, że nie można skonstruować jawnie kowariantnego, jednopotencjałowego modelu elektromagnetodynamiki [17], [18], [19], [20]. Po drugie, zostały zaproponowane różne modele dwupotencjałowe [21], [15], [22], [23] [24].

Zostały zaproponowane modele opisujące cząstki niosące ładunek elektryczny i magnetyczny - dyony [25], [26], [27], jak również sformułowanie hydrodynamiczne mechaniki kwantowej [28]. Pokazano również modele monopoli z dwoma fotonami [29], [30]. Transformacja dualności dla abelowych i nieabelowych teorii z cechowaniem przedstawiono w [31]. Rozpraszanie elektron-monopol staje się lorentzowsko niezmiennicze [32], gdy spełniony jest warunek kwantyzacji (I.11). W późniejszym czasie teorię tę rozwijali m. in. Cabibbo i Ferrari [21], Schwinger [22] oraz Zwanziger [24] i zaproponowali oni spójny opis kwantowej elektrodynamiki z monopolami przy użyciu dwóch potencjałów.

1.2.1. Poszukiwania fizycznego monopolu magnetycznego

Monopol magnetyczny lub inaczej monopol Diraca, zgodnie z warunkiem kwantyzacji powinien być obdarzony ładunkiem $g = n\hbar c/2e$, gdzie e jest elementarnym ładunkiem elektrycznym, co dla $n = 1$ daje wartość jednostkowego ładunku Diraca. Korzystając z analizy Diraca możemy szacować ładunek monopola, ale nie potrafimy przewidzieć jego masy. Spodziewamy się że jest on bardzo masywny. Analogicznie do stałej struktury subtelnej, $\alpha = e^2/\hbar c 4\pi\epsilon_0$ możemy prowadzić stałą $\alpha_g = g_D^2/\hbar c 4\pi\epsilon_0$ [33], [34].

Obecnie poszukiwania klasycznego monopola Diraca odbywają się trzema drogami [35], [36], [37], [38], [39]. Możemy próbować wytworzyć je w trakcie zderzeń e^+e^- , e^+p , $p\bar{p}$ oraz pp w akceleratorach. Od roku 1931 prowadzono poszukiwania monopola magnetycznego w każdym nowym zderzacz. Wytworzony monopol magnetyczny powinien być cząstką stabilną, silnie oddziałującą z polem elektromagnetycznym. Ponieważ własności monopola znacznie różnią się od innych poszukiwanych cząstek, większość przeprowadzanych eksperymentów nie jest dostosowana do ich detekcji. Aktualnie tylko eksperyment MoEDAL w LHC jest dedykowany poszukiwaniu monopola magnetycznego. W akceleratorach poszukuje się również monopolium, tzn. stanu związanego monopola i antymonopola o stosunkowo małej masie [40], [41] Zamiast wytwarzać monopol możemy próbować znaleźć już istniejące. Spodziewamy się, że we wczesnym stadium rozwoju naszego wszechświata istniały monopole magnetyczne i w związku z tym poszukuje się monopoli w promieniowaniu kosmicznym. Eksperymenty tego typu to m.in. MACRO, AMANDA, Baikal i RICE. Jeśli założymy, że monopole magnetyczne są częścią promieniowania kosmicznego, wówczas oczywiste wydaje się badanie skał wulkanicznych, które mogły wiązać bombardujące Ziemię monopole, wody oceanicznej, meteorów oraz innych materiałów pochodzenia zarówno kosmicznego jak i ziemskiego. Ostatnim sposobem poszukiwania monopoli są obserwa-

cje astronomiczne. Założenie istnienia monopoli magnetycznych daje efekty astrofizyczne, które można zaobserwować. Monopole mogłyby stanowić więc część czarnej materii.

Do tej pory w żadnym z przeprowadzonych eksperymentów nie potwierdzono istnienia monopoli magnetycznych. W roku 1973 pojawiła się informacja o detekcji monopola magnetycznego, jednak okazało się, że było to jądro platyny. W 1982 oraz w roku 1985 w eksperymentach przy użyciu nadprzewodzącego pierścienia zauważono skok przepływającego prądu odpowiadający monopolowi przechodzącemu przez pierścień, jednak ponieważ nie udało się ich powtórzyć uznano to za efekt innych czynników. W 2009 roku pojawiły się doniesienia o detekcji monopoli w lodzie spinowym Dy₂Ti₂O₇ [42], jednak nie są to klasyczne monopole Diraca. Aktualnie największe nadzieje wzbudza eksperyment MoEDAL, jednak na potwierdzenie istnienia monopoli magnetycznych musimy jeszcze poczekać.

1.2.2. Opis dwupotencjałowy

Dwupotencjałowe sformułowanie elektrodynamiki kwantowej należy rozpocząć od równań Maxwella zawierających elektryczne i magnetyczne prądy zewnętrzne J^μ i K^μ

$$(\partial \cdot F)^\mu = \partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (\partial \cdot \tilde{F})^\mu = \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = K^\nu, \quad (\text{I.13})$$

gdzie $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$ jest dualnym tensorem elektromagnetycznym. Równania te są symetryczne pod działaniem elektromagnetycznej transformacji dualności

$$F_{\mu\nu} \mapsto \tilde{F}_{\mu\nu} \mapsto \tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}, \quad J^\mu \mapsto K^\mu \mapsto -J^\mu. \quad (\text{I.14})$$

Niestety, nie jesteśmy teraz w stanie wyrazić $F_{\mu\nu}$ tylko przez jeden potencjał cechowania, stąd pojawiła się potrzeba wprowadzenia **dwóch potencjałów cechowania**, które opisywałyby lokalnie tensor pola elektromagnetycznego.

Przegląd opisów dwupotencjałowych należałoby rozpocząć od propozycji Cabbibo-Ferrarięgo [21], którzy zapostulowali wyrażenie tensora elektromagnetycznego przy pomocy jawnie kowariantnej definicji

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial^\lambda B^\rho. \quad (\text{I.15})$$

Dwa potencjały cechowania A_μ i B_μ są niezależnymi polami i pozwalają wyrazić transformację dualności elektromagnetycznej (I.14) dla $F_{\mu\nu}$ jako transformację

$$\boxed{A_\mu \mapsto B_\mu \mapsto -A_\mu.} \quad (\text{I.16})$$

Niestety w podejściu, który zaproponowali Cabbibo i Ferrari nie ma lagrangianu, więc i działania, a to oznacza, że nie ma możliwości przeprowadzenia procedury kwantowania kanonicznego. Jedynie postać transformacji dualności (I.16) będzie przeze mnie wykorzystywana w dalszej części pracy.

Mamy również propozycję Schwingera [15], gdzie wprowadza się dwa potencjały \mathbf{A} i \mathbf{B} , których rotacje dają poprzeczną część pola elektrycznego i magnetycznego. Natomiast część podłużna tych pól dana jest przez potencjał kulombowski generowany przez ładunki elektryczne i magnetyczne. Wprowadzane są również struny zaczepione w ładunkach elektrycznych i magnetycznych, które są dodawane do potencjałów \mathbf{A} i \mathbf{B} w procedurze minimalnego sprzężenia dla pól fermionowych opisujących ładunki elektryczne i magnetyczne.

Dlatego to podejście wprowadza od początku człony nielokalne do hamiltonianu.

Alternatywne podejście zaproponował w swojej pracy [24] Daniel Zwanziger. Przedstawił lokalny lagrangian opisujący kwantową elektrodynamikę z monopolami umożliwiającą kanoniczne kwantowanie. Jeden z kolejnych rozdziałów pokazuje szczegóły modelu zaproponowanego przez Zwanzigera.

Chcę również wspomnieć o propozycji lagrangianu dwupotencjałowego zaproponowanego w pracy Przeszowskiego [44]. To podejście bazuje na analizie równań Maxwella w podejściu **frontu świetlnego**, gdzie współrzędna $x^+ = (x^0 + x^3)/\sqrt{2}$ stanowi parametr ewolucji czasowej układu. W oparciu o ten lagrangian wyliczyłam propatory dla dwóch warunków cechowania [4]. Jednak w dalszej analizie ten lagrangian okazał się zbyt kłopotliwy podczas analizy własności funkcji Wightmana, szczególnie podczas transformacji Lorentza, dlatego w mojej pracy ograniczyłam się do analizy jedynie modelu Zwanzigera.

II. Wybrane własności teorii klasycznej

2.1. Symetrie dyskretne dla dyonowych równań Maxwella

Przekształceniami symetrii nazywamy takie przekształcenie kanoniczne, czyli transformację zmiennych kanonicznych niezmienną nawiasów Poissona, które zachowują postać równań pola. Przyjrzyjmy się bliżej jak transformacje dyskretne działają na dyonowe równania Maxwella elektrodynamiki z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi [45], które mają następującą postać

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}} - \mu_0 \mathbf{J}_m, \quad (\text{II.1a})$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = \mu_0 \rho_m, \quad \nabla \times \underline{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{E}} + \mu_0 \mathbf{J}_e, \quad (\text{II.1b})$$

przy czym używamy jednostek w układzie SI.

2.1.1. Transformacja parzystości

Pierwszą z badanych transformacji jest transformacja parzystości lub inaczej inwersji przestrzennej P , polegająca na zmianie kierunku wszystkich trzech osi układu odniesienia $x = (\mathbf{r}, t) \rightarrow x^p = (-\mathbf{r}, t)$. We współrzędnych cylindrycznych (ρ, ϕ, z) realizowana jest ona jako $(\rho, \phi, z) \rightarrow (\rho, \phi + \pi, -z)$, co możemy opisać jako odbicie lustrzane w kierunku z i obrót wokół osi z o kąt π . Możemy to sprawdzić dla wektora położenia w postaci $\mathbf{r} = \rho \cos \phi \hat{i} + \rho \sin \phi \hat{j} + z \hat{k}$, gdzie wersory kartezjańskie $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ nie zmieniają się. Wersory cylindryczne $\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}$ i $\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$, podlegają zmianie pod wpływem transformacji parzystości $\hat{\rho} \rightarrow -\hat{\rho}, \hat{\phi} \rightarrow -\hat{\phi}$. Modelujemy rozkład ładunku elektrycznego niezmienniczy pod działaniem transformacji parzystości $\rho_e(\mathbf{r}, t) = \rho_e(\rho, |z|, t)$, może to być rozkład sferycznie symetryczny. Modelujemy rozkład prądu elektrycznego płynącego po okręgu o promieniu r_0 i stałym natężeniu I_0 . Oznacza to, że w każdym punkcie na tym okręgu mamy $d\mathbf{I} = \hat{\phi} I_0 r_0 d\phi$. Przy transformacji parzystości $\phi \xrightarrow{P} \phi + \pi, d\phi \xrightarrow{P} d\phi, \hat{\phi} \xrightarrow{P} -\hat{\phi}$ otrzymujemy

$$d\mathbf{I} \xrightarrow{P} -d\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} \xrightarrow{P} -\mathbf{I}. \quad (\text{II.2a})$$

Stąd wynika, że istnieją takie rozkłady gęstości ładunku elektrycznego i gęstości prądu elektrycznego dla których transformacja parzystości ma postać

$$\rho_e(x) \xrightarrow{P} {}^p\rho_e(x) = \rho_e(x^p), \quad \mathbf{J}_e(x) \xrightarrow{P} {}^p\mathbf{J}_e(x) = -\mathbf{J}_e(x^p). \quad (\text{II.2b})$$

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla ładunków i prądów magnetycznych, stąd zakładamy dla źródeł magnetycznych analogiczne transformacje parzystości

$$\rho_m(x) \xrightarrow{P} {}^p\rho_m(x) = \rho_m(x^p), \quad \mathbf{J}_m(x) \xrightarrow{P} {}^p\mathbf{J}_m(x) = -\mathbf{J}_m(x^p), \quad (\text{II.2c})$$

zaś transformacja parzystości dla pól elektrycznego i magnetycznego dana jest przez

$$\underline{\mathbf{E}}(x) \xrightarrow{P} {}^P\underline{\mathbf{E}}(x) = e_p \underline{\mathbf{E}}(x^p), \quad \underline{\mathbf{B}}(x) \xrightarrow{P} {}^P\underline{\mathbf{B}}(x) = b_p \underline{\mathbf{B}}(x^p). \quad (\text{II.2d})$$

Oczywiście złożenie dwóch transformacji parzystości jest identycznością $P^2 = 1$, więc dla współrzędnych $(x^p)^p = x$, dla źródeł elektrycznych mamy

$$\rho_e(x) \xrightarrow{P^2} {}^{P^2}[\rho_e(x)] = {}^P\rho_e(x^p) = \rho_e(x), \quad (\text{II.3a})$$

$$\mathbf{J}_e(x) \xrightarrow{P^2} {}^{P^2}[\mathbf{J}_e(x)] = -{}^P\mathbf{J}_e(x^p) = (-1)^2 \mathbf{J}_e(x), \quad (\text{II.3b})$$

podobnie dla źródeł magnetycznych, oraz dla pól

$$\underline{\mathbf{E}}(x) \xrightarrow{P^2} {}^{P^2}[\underline{\mathbf{E}}(x)] = e_p {}^P\underline{\mathbf{E}}(x^p) = (e_p)^2 \underline{\mathbf{E}}(x), \quad (\text{II.4a})$$

$$\underline{\mathbf{B}}(x) \xrightarrow{P^2} {}^{P^2}[\underline{\mathbf{B}}(x)] = b_p {}^P\underline{\mathbf{B}}(x^p) = (b_p)^2 \underline{\mathbf{B}}(x). \quad (\text{II.4b})$$

Z powyższych relacji uzyskujemy warunek $(e_p)^2 = (b_p)^2 = 1$. Równanie Ampère'a

$$\nabla \times \underline{\mathbf{B}}(x) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{E}}(x) + \mu_0 \mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.5a})$$

ma symetrię parzystości, jeżeli spełnione jest następujące równanie dla wielkości po transformacji

$$\nabla \times {}^P\underline{\mathbf{B}}(x) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} {}^P\underline{\mathbf{E}}(x) + \mu_0 {}^P\mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.5b})$$

lub równoważnie

$$-b_p \nabla^p \times \underline{\mathbf{B}}(x^p) = e_p \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{E}}(x^p) - \mu_0 \mathbf{J}_e(x^p), \quad (\text{II.5c})$$

gdzie $\nabla^p = -\nabla$. Traktując nowe współrzędne x^p jako jedynie zamianę zmiennych otrzymujemy jako warunek symetrii

$$\boxed{b_p = -e_p = 1.} \quad (\text{II.6})$$

Podobnie mamy dla elektrycznego prawa Gaussa. Ale jeżeli będziemy rozpatrywać równania ze źródłami magnetycznymi, czyli prawo Faradaya

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(x) = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}(x)}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{J}_m(x) \quad (\text{II.7})$$

i magnetyczne prawo Gaussa

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}}(x) = \mu_0 \rho_m(x), \quad (\text{II.8})$$

to jako warunek symetrii parzystości dla nich otrzymamy warunek

$$\boxed{b_p = -e_p = -1,} \quad (\text{II.9})$$

Są to ewidentnie sprzeczne warunki, co oznacza, że w przeciwieństwie do elektrodynamiki tylko ze źródłami elektrycznymi, w obecności źródeł elektrycznych i magnetycznych równania Maxwella nie mają symetrii parzystości. Przy obecności tylko źródeł elektrycznych mamy symetrię parzystości dla wszystkich równań Maxwella z warunkiem (II.6), natomiast przy obecności tylko źródeł magnetycznych mamy symetrię parzystości dla wszystkich równań Maxwella z warunkiem (II.9). Jeżeli mamy pola swobodne, to mamy symetrię parzystości dla wszystkich równań Maxwella, a ponadto swobodę wyboru warunku albo (II.6) albo (II.9). Ten wynik stoi w sprzeczności z rozważaniami, w których **postuluje się symetrię parzystości** dla dyonowych równań Maxwella, np. [12]. Cena jaką płaci się za takie założenie jest konieczność zmiany transformacji parzystości źródeł magnetycznych. Zamiast (II.2c) otrzymuje się

$$\rho_m(x) \xrightarrow{P} {}^P\rho_m(x) = -\rho_m(x^P), \quad \mathbf{J}_m(x) \xrightarrow{P} {}^P\mathbf{J}_m(x) = \mathbf{J}_m(x^P), \quad (\text{II.10})$$

jest to transformacja pseudo-wektora (4-wektora aksjalnego). To oznacza, że dla równań Maxwella z symetrią parzystości źródła magnetyczne (ρ_m, \mathbf{J}_m) muszą mieć charakter pseudowektorowy, co w teorii kwantowej prowadzi do fundamentalnych problemów. Transformację parzystości definiujemy tak jakby były tylko ładunki elektryczne tzn. z warunkiem (II.6)

$$\underline{\mathbf{E}}(x) \xrightarrow{P} {}^P\underline{\mathbf{E}}(x) = -\underline{\mathbf{E}}(x^P), \quad \underline{\mathbf{B}}(x) \xrightarrow{P} {}^P\underline{\mathbf{B}}(x) = \underline{\mathbf{B}}(x^P). \quad (\text{II.11})$$

2.1.2. Transformacja inwersji w czasie

Kolejną rozważaną transformacją jest transformacja inwersji w czasie T , która zmienia znak współrzędnej czasowej $x = (\mathbf{r}, t) \rightarrow x^t = (\mathbf{r}, -t)$. Istnieją takie rozkłady gęstości ładunku elektrycznego i gęstości prądu elektrycznego dla których transformacja inwersji w czasie ma postać

$$\rho_e(x) \xrightarrow{T} {}^t\rho_e(x) = \rho_e(x^t), \quad \mathbf{J}_e(x) \xrightarrow{T} {}^t\mathbf{J}_e(x) = -\mathbf{J}_e(x^t). \quad (\text{II.12a})$$

Podobnie rozumując dla źródeł magnetycznych, postulujemy analogiczne relacje transformacji inwersji w czasie

$$\rho_m(x) \xrightarrow{T} {}^t\rho_m(x) = \rho_m(x^t), \quad \mathbf{J}_m(x) \xrightarrow{T} {}^t\mathbf{J}_m(x) = -\mathbf{J}_m(x^t). \quad (\text{II.12b})$$

Transformacji inwersji w czasie dla pól elektrycznego i magnetycznego będziemy poszukiwać w postaci

$$\underline{\mathbf{E}}(x) \xrightarrow{T} {}^t\underline{\mathbf{E}}(x) = e_t \underline{\mathbf{E}}(x^t), \quad \underline{\mathbf{B}}(x) \xrightarrow{T} {}^t\underline{\mathbf{B}}(x) = b_t \underline{\mathbf{B}}(x^t). \quad (\text{II.12c})$$

Złożenie dwóch transformacji inwersji w czasie jest identycznością $T^2 = 1$, więc przeprowadzając podobną analizę jak w przypadku transformacji parzystości uzyskujemy warunek $(e_t)^2 = (b_t)^2 = 1$. Równanie Ampère'a

$$\nabla \times \underline{\mathbf{B}}(x) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{E}}(x) + \mu_0 \mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.13a})$$

ma symetrię inwersji w czasie, jeżeli spełnione jest równanie dla wielkości po transformacji

$$\nabla \times {}^t\mathbf{B}(x) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} {}^t\mathbf{E}(x) + \mu_0 {}^t\mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.13b})$$

lub równoważnie

$$b_t \nabla \times \mathbf{B}(x^t) = -e_p \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{E}(x^t) - \mu_0 \mathbf{J}_e(x^t), \quad (\text{II.13c})$$

gdzie $\partial/(\partial t') = -\partial/(\partial t)$. Jako warunek symetrii otrzymujemy relację

$$\boxed{b_t = -e_t = -1.} \quad (\text{II.14})$$

Podobnie mamy dla elektrycznego prawa Gaussa. Analiza równań ze źródłami magnetycznymi, tzn. prawo Faradaya i magnetyczne prawo Gaussa, daje warunek symetrii inwersji w czasie

$$\boxed{b_t = -e_t = 1.} \quad (\text{II.15})$$

Są to ewidentnie sprzeczne warunki, co oznacza, że w obecności źródeł elektrycznych i magnetycznych równania Maxwella nie mają symetrii inwersji w czasie. Układ tylko ze źródłami elektrycznymi ma symetrię inwersji w czasie dla wszystkich równań Maxwella z warunkiem (II.14), natomiast przy obecności tylko źródeł magnetycznych mamy symetrię inwersji w czasie dla wszystkich równań Maxwella z warunkiem (II.15). Jeżeli mamy pola swobodne, to mamy symetrię inwersji w czasie dla wszystkich równań Maxwella, a ponadto swobodę wyboru warunku albo (II.14) albo (II.15). W dalszej części będziemy korzystać z transformacji inwersji w czasie z warunkiem (II.14)

$$\mathbf{E}(x) \xrightarrow{T} {}^t\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(x^t), \quad \mathbf{B}(x) \xrightarrow{T} {}^t\mathbf{B}(x) = -\mathbf{B}(x^t). \quad (\text{II.16})$$

2.1.3. Transformacja sprzężenia ładunkowego

Ostatnią z badanych transformacji jest transformacja sprzężenia ładunkowego C , która polega na zamianie wszystkich wartości ładunków elektrycznych i magnetycznych na przeciwne. To oznacza następującą transformację sprzężenia ładunkowego dla źródeł elektrycznych

$$\rho_e(x) \xrightarrow{C} {}^c\rho_e(x) = -\rho_e(x), \quad \mathbf{J}_e(x) \xrightarrow{C} {}^c\mathbf{J}_e(x) = -\mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.17a})$$

i analogiczną dla źródeł magnetycznych

$$\rho_m(x) \xrightarrow{C} {}^c\rho_m(x) = -\rho_m(x), \quad \mathbf{J}_m(x) \xrightarrow{C} {}^c\mathbf{J}_m(x) = -\mathbf{J}_m(x). \quad (\text{II.17b})$$

Transformacja sprzężenia ładunkowego dla pól elektrycznego i magnetycznego

$$\mathbf{E}(x) \xrightarrow{C} {}^c\mathbf{E}(x) = e_c \mathbf{E}(x), \quad \mathbf{B}(x) \xrightarrow{C} {}^c\mathbf{B}(x) = b_c \mathbf{B}(x). \quad (\text{II.17c})$$

Złożenie dwóch transformacji sprzężenia ładunkowego jest identycznością $C^2 = 1$, co prowadzi do warunku $(e_c)^2 = (b_c)^2 = 1$. Mówimy, że równanie Ampère'a

$$\nabla \times \mathbf{B}(x) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(x) + \mu_0 \mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.18a})$$

ma symetrię sprzężenia ładunkowego, jeżeli spełnione jest równanie dla wielkości po transformacji

$$\nabla \times {}^c\mathbf{B}(x) = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{{\partial t}} {}^c\mathbf{E}(x) + \mu_0 {}^c\mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.18b})$$

lub równoważnie

$$b_c \nabla \times \mathbf{B}(x) = e_p \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(x) - \mu_0 \mathbf{J}_e(x) \quad (\text{II.18c})$$

więc otrzymujemy jako warunek symetrii sprzężenia ładunkowego

$$\boxed{b_c = e_c = -1.} \quad (\text{II.19})$$

Ten sam warunek otrzymujemy dla pozostałych równań Maxwella. Możemy więc stwierdzić, że równania Maxwella mają symetrię sprzężenia ładunkowego dla układów z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi.

2.1.4. Złożenie transformacji P i T

Jeśli złożymy transformacje parzystości P i inwersji w czasie T dla pól, to mamy

$$\mathbf{E}(x) \xrightarrow{TP} {}^t[{}^p\mathbf{E}(x)] = e_p {}^t\mathbf{E}(x^p) = e_p e_t \mathbf{E}(-x) \quad (\text{II.20a})$$

$$\mathbf{B}(x) \xrightarrow{TP} {}^t[{}^p\mathbf{B}(x)] = b_p {}^t\mathbf{B}(x^p) = b_t b_p \mathbf{B}(-x), \quad (\text{II.20b})$$

ponieważ $(x^p)^t = -x$. Z poprzednich rozważań otrzymujemy tylko jeden warunek

$$\boxed{e_p e_t = b_p b_t = -1} \quad (\text{II.21})$$

dla wszystkich równań Maxwella. Dla źródeł, np. elektrycznych, otrzymujemy

$$\rho_e(x) \xrightarrow{TP} {}^t[{}^p\rho_e(x)] = {}^t\rho_e(x^p) = \rho_e(-x), \quad (\text{II.22a})$$

$$\mathbf{J}_e(x) \xrightarrow{TP} {}^t[{}^p\mathbf{J}_e(x)] = -{}^t\mathbf{J}_e(x^p) = (-1)^2 \mathbf{J}_e(-x). \quad (\text{II.22b})$$

To prowadzi do konkluzji, że transformacja TP jest symetrią równań Maxwella ze źródłami elektrycznymi i magnetycznymi i mamy

$$\mathbf{E}(x) \xrightarrow{TP} -\mathbf{E}(-x), \quad \mathbf{B}(x) \xrightarrow{TP} -\mathbf{B}(-x), \quad (\text{II.23a})$$

$$\rho_{e,m}(x) \xrightarrow{TP} \rho_{e,m}(-x), \quad \mathbf{J}_{e,m}(x) \xrightarrow{TP} \mathbf{J}_{e,m}(-x). \quad (\text{II.23b})$$

Jeśli do transformacji dyskretnych dołożymy transformację dualności daną przez (I.3), wówczas możemy przedstawić uzyskane wyniki w postaci następujących diagramów przestrzennych:

- Transformacja parzystości $P = DPD$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E} & \xrightarrow{P} & -\mathbf{E} \\ \downarrow D & & \uparrow D \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{P} & \mathbf{B} \end{array} \quad (\text{II.24})$$

- Transformacja odbicia czasu $T = DTD$

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathbf{E}} & \xrightarrow{T} & \underline{\mathbf{E}} \\
 \downarrow D & & \uparrow D \\
 \underline{\mathbf{B}} & \xrightarrow{T} & -\underline{\mathbf{B}}
 \end{array} \quad (\text{II.25})$$

- Transformacja sprzężenia ładunkowego $CD = DC$

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\mathbf{E}} & \xrightarrow{C} & -\underline{\mathbf{E}} \\
 \downarrow D & & \downarrow D \\
 \underline{\mathbf{B}} & \xrightarrow{C} & \underline{\mathbf{B}}
 \end{array} \quad (\text{II.26})$$

- Złożenie transformacji P i T

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{\mathbf{E}} & \xrightarrow{P} & -\underline{\mathbf{E}} & \xrightarrow{T} & -\underline{\mathbf{E}} \\
 \downarrow D & & \uparrow D & & \downarrow D \\
 \underline{\mathbf{B}} & \xrightarrow{P} & \underline{\mathbf{B}} & \xrightarrow{T} & -\underline{\mathbf{B}}
 \end{array} \quad (\text{II.27})$$

Potrąfimy więc powiedzieć jak działają poszczególne symetrie dyskretne oraz ich złożenia na pola $\underline{\mathbf{E}}$ i $\underline{\mathbf{B}}$ dla układów zawierających ładunki elektryczne i magnetyczne.

2.2. Model Zwanzigera

Daniel Zwanziger w swojej pracy [24] z 1971 roku przedstawił opis kwantowej teorii pola cząstek naładowanych elektrycznie i magnetycznie przy użyciu dwóch potencjałów cechowania. Zaproponował lokalną gęstość lagrangianu ¹

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Zw} = & -\frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge A)] \cdot [n \cdot (\partial \wedge B)^d] + \frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge B)] \cdot [n \cdot (\partial \wedge A)^d] - \\
 & -\frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge A)]^2 - \frac{1}{2n^2}[n \cdot (\partial \wedge B)]^2 - j_e \cdot A - j_g \cdot B
 \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

zależną od pary czteropotencjałów A i B oraz źródeł elektrycznych j_e i magnetycznych j_g , które prowadzą do lokalnych równań pola równoważnych równaniom Maxwella. Lagrangian Zwanzigera zależy od ustalonego czterowektora n , jest więc czasoprzestrzenie anizotropowe. Zwanziger wybrał przestrzennie podobny wektor n , by tensory F i F^d zapisane w potencjałach cechowania

$$F = \frac{1}{n^2} \left(\{n \wedge [n \cdot (\partial \wedge A)]\} - \{n \wedge [n \cdot (\partial \wedge B)]\}^d \right), \quad (\text{II.29a})$$

$$F^d = \frac{1}{n^2} \left(\{n \wedge [n \cdot (\partial \wedge A)]\}^d + \{n \wedge [n \cdot (\partial \wedge B)]\} \right). \quad (\text{II.29b})$$

¹W tym podrozdziale zachowuję oryginalną pisownię wzorów pochodzących z pracy Zwanzigera, gdzie $(a \cdot G)^\nu = a_\mu G^{\mu\nu} = -G^{\mu\nu} a_\mu = -(G \cdot a)^\nu$ oraz $(a \wedge b)^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu - a^\nu b^\mu$

zależały tylko od \mathbf{x} . Dopiero po nałożeniu warunku $(e_n g_m - g_n e_m)/4\pi = Z_{nm}$, gdzie e_n i g_m są elektrycznymi i magnetycznymi ładunkami, a Z_{nm} liczbą całkowitą, odzyskujemy izotropię.

Punktem wyjścia dalszej analizy jest więc gęstość lagrangianu Zwanzigera (II.28), z wektorem $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$, która zapisana jawnie we współrzędnych potencjałów przedstawia się następująco

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Zw} &= \frac{1}{2} (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 - A \cdot J \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 - B \cdot K \\ &- \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) (\partial_3 B_j - \partial_j B_3) - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j (\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3) \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_0 B_i - \partial_i B_0) (\partial_3 A_j - \partial_j A_3) + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3), \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

gdzie $\epsilon_{ij} = \epsilon^{ij} = \epsilon^{0ij3}$ z $i, j \in \{1, 2\}$. Równania Eulera-Lagrange'a wynikające z tej gęstości lagrangianu

$$\partial_3 (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3) + \epsilon_{ij} \partial_i \partial_3 C_j = -J^0, \quad (\text{II.31a})$$

$$-\partial_0 (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3) + \partial_i (\partial_3 A_i - \partial_i A_3) = -J^3, \quad (\text{II.31b})$$

$$-\partial_3 (\partial_3 A_i - \partial_i A_3) - \epsilon_{ij} \partial_3 (\partial_0 C_j - \partial_j C_0) = -J^i, \quad (\text{II.31c})$$

$$\partial_3 (\partial_3 C_0 - \partial_0 C_3) - \epsilon_{ij} \partial_i \partial_3 A_j = -K^0, \quad (\text{II.31d})$$

$$-\partial_0 (\partial_3 C_0 - \partial_0 C_3) + \partial_i (\partial_3 C_i - \partial_i C_3) = -K^3, \quad (\text{II.31e})$$

$$-\partial_3 (\partial_3 C_i - \partial_i C_3) + \epsilon_{ij} \partial_3 (\partial_0 A_j - \partial_j A_0) = -K^i, \quad (\text{II.31f})$$

są równaniami Maxwella (I.13). Niezależne składowe tensora elektromagnetycznego wynikające z (II.29) zapisane w potencjałach cechowania mają następującą postać

$$F_{ij} = \epsilon_{ij} (\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3), \quad F_{30} = \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3, \quad (\text{II.32a})$$

$$F_{i0} = \epsilon_{ij} (\partial_3 B_j - \partial_j B_3), \quad F_{3i} = \partial_3 A_i - \partial_i A_3. \quad (\text{II.32b})$$

Możemy sprawdzić jak transformują się potencjały cechowania pod działaniem transformacji dyskretnych. W tym celu musimy zapisać pola $\underline{\mathbf{E}}$ i $\underline{\mathbf{B}}$ przy pomocy potencjałów A_μ i B_ν . Korzystam ze wzoru (II.32) i otrzymuję

$$\underline{E}_1 = \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2, \quad \underline{B}_1 = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3, \quad (\text{II.33a})$$

$$\underline{E}_2 = \partial_3 B_1 - \partial_1 B_3, \quad \underline{B}_2 = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1, \quad (\text{II.33b})$$

$$\underline{E}_3 = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0, \quad \underline{B}_3 = \partial_0 B_3 - \partial_3 B_0 \quad (\text{II.33c})$$

W rozdziale (2.1) sprawdziliśmy działanie poszczególnych transformacji na pole elektryczne i magnetyczne. Możemy więc, korzystając z tych wyników, odczytać jak transformują się potencjały cechowania pod działaniem transformacji parzystości

$$(A_0, \mathbf{A}) \xrightarrow{P} (A_0, -\mathbf{A}), \quad (B_0, \mathbf{B}) \xrightarrow{P} (-B_0, \mathbf{B}), \quad (\text{II.34})$$

transformacji inwersji w czasie

$$(A_0, \mathbf{A}) \xrightarrow{T} (A_0, -\mathbf{A}), \quad (B_0, \mathbf{B}) \xrightarrow{T} (-B_0, \mathbf{B}) \quad (\text{II.35})$$

oraz transformacji sprzężenia ładunkowego

$$(A_0, \mathbf{A}) \xrightarrow{C} (-A_0, -\mathbf{A}), \quad (B_0, \mathbf{B}) \xrightarrow{C} (-B_0, -\mathbf{B}). \quad (\text{II.36})$$

Uzyskałiśmy więc informację jak transformacje dyskretne działają na potencjały cechowania w teorii klasycznej.

Możemy wyznaczyć potencjały dla pola elektromagnetycznego wytworzonego przez nieruchomy, punktowy monopol magnetyczny. Ogólna postać rozwiązania stacjonarnego dla 4-potencjałów wygląda następująco

$$B_0(\mathbf{r}) = -\frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad B_i(\mathbf{r}) = \partial_i \Phi_B(\mathbf{r}), \quad A_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{II.37a})$$

$$A_i(\mathbf{r}) = \partial_i \Phi_A(\mathbf{r}) - \epsilon_{ij3} \frac{g\mu_0}{4\pi} \partial_j \bar{\Lambda}(\mathbf{r}), \quad (\text{II.37b})$$

$$\bar{\Lambda}(\mathbf{r}) = \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} + \Lambda_0(x, y), \quad (\text{II.37c})$$

gdzie $\Phi_A(\mathbf{r})$ i $\Phi_B(\mathbf{r})$ są dowolnymi funkcjami analitycznymi w całej przestrzeni \mathbb{R}^3 , a $\Lambda_0(x, y)$ jest dowolną funkcją analityczną w całej podprzestrzeni \mathbb{R}^2 . Szczegóły rachunku prowadzącego do powyższych wzorów znajdują się w Dodatku B.3.

III. Elektrodynamika kwantowa z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi

Elektrodynamika kwantowa (QED - *quantum electrodynamics*) jest teorią opisującą oddziaływanie pól materii obdarzonych ładunkami elektrycznymi z polem elektromagnetycznym. Najczęściej takimi polami materii są elektrony, które reprezentowane są przez fermionowe operatory pola $\Psi(x)$ i $\Psi^\dagger(x)$, spełniające reguły antykomutacyjne Pauliego-Diraca. Pole elektromagnetyczne reprezentowane jest przez operator pola 4-potencjału A_μ , który spełnia reguły komutacyjne Bosego-Einsteina. Sprzężenie pomiędzy tymi operatorami pojawia się poprzez **pochodną kowariantną** $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, gdzie e jest elementarnym ładunkiem elektrycznym. Gęstość lagrangianu dla elektrodynamiki kwantowej ma postać

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} [i\gamma^\mu D_\mu - m_e] \Psi, \quad (\text{III.1})$$

gdzie m_e jest masą elektronu i γ^μ są macierzami Diraca oraz $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ i $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$. Ta gęstość lagrangianu jest niezmiennicza względem transformacji cechowania

$$\Psi(x) \rightarrow e^{ie\chi_e(x)}\Psi(x), \quad \Psi(x)^\dagger \rightarrow \Psi(x)^\dagger e^{-ie\chi_e(x)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi_e(x) \quad (\text{III.2})$$

oraz jest skalarem pod działaniem transformacji Lorentza. Mówimy, że elektrodynamika kwantowa ma symetrię lokalną cechowania $U(1)$.

Aby rozszerzyć elektrodynamikę, tak aby obejmowała ona również oddziaływanie pól z ładunkami magnetycznymi, dodajemy dodatkowe kwantowe pola fermionowe $\Psi_m(x)$ i $\Psi_m^\dagger(x)$, spełniające reguły antykomutacyjne Pauliego-Diraca oraz wprowadzamy dodatkowy operator pola 4-potencjału B_μ , który spełnia reguły komutacyjne Bosego-Einsteina. Teraz sprzężenie pomiędzy tymi nowymi operatorami pojawia się poprzez **nową pochodną kowariantną** $D_\mu^m = \partial_\mu - igB_\mu$, gdzie g jest elementarnym ładunkiem magnetycznym. To pozwala na podanie gęstości lagrangianu

$$\mathcal{L}_{mag} = \bar{\Psi}_m [i\gamma^\mu D_\mu^m - m_m] \Psi_m, \quad (\text{III.3})$$

gdzie m_m jest masą monopola magnetycznego, która jest niezmiennicza względem **nowej transformacji cechowania**

$$\Psi_m(x) \rightarrow e^{ie\chi_m(x)}\Psi_m(x), \quad \Psi_m(x)^\dagger \rightarrow \Psi_m(x)^\dagger e^{-ie\chi_m(x)}, \quad B_\mu \rightarrow B_\mu + \partial_\mu \chi_m(x). \quad (\text{III.4})$$

Dla opisanego sektora potencjałów cechowania możemy wziąć gęstość lagrangianu zapropon-

nowaną przez Zwanzigera w [24]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Zw}^0 = & \frac{1}{2} (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 + \frac{1}{2} (\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 \\ & - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_0 A_i - \partial_i A_0) (\partial_3 B_j - \partial_j B_3) - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j (\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3) \\ & + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_0 B_i - \partial_i B_0) (\partial_3 A_j - \partial_j A_3) + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j (\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3), \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

gdzie $\epsilon_{ij} = \epsilon^{ij} = \epsilon^{0ij3}$ z $i, j \in \{1, 2\}$. To pozwala na podanie **gęstości lagrangianu dla elektrodynamiki kwantowej z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi**

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{Zw}^0 + \bar{\Psi} [i\gamma^\mu D_\mu - m_e] \Psi + \bar{\Psi}_m [i\gamma^\mu D_\mu^m - m_m] \Psi_m, \quad (\text{III.6})$$

który jest niezmienniczy względem transformacji cechowania $U(1) \times U(1)$, zadanych przez (III.2) i (III.4). To wyrażenie stanowi podstawę do wprowadzenia reguł Feynmana w ramach rachunku zaburzeń. Wtedy zarówno pola fermionowe i pola potencjałów cechowania opisywane są przez operatory pola, które wprowadzamy w procedurze kwantowania kanonicznego. W mojej pracy ograniczam się do badania sektora pól cechowania – potencjałów A_μ i B_μ , dlatego w dalszych rozdziałach pozostawię jedynie wkład od pól materii w postaci prądów: elektrycznego $J^\mu = -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ i magnetycznego $K^\mu = -g\bar{\Psi}_m\gamma^\mu\Psi_m$. (Znak $(-)$, który pojawia się w tych oznaczeniach wynika jedynie z konwencji znaku w członach prądowych w lagrangianie i nie ma żadnego znaczenia fizycznego). Podkreślam tutaj, że oba prądy mają charakter 4-wektorowy, co już wcześniej postulowałam podczas dyskusji transformacji dyskretnych. Uważam, że należy unikać rozpatrywania prądu magnetycznego jako pseudowektora, bo to prowadziło do znanych problemów - anomalii prądu aksjalnego.

Znajomość gęstości lagrangianu pozwala na przeprowadzenie kanonicznego kwantowania. W standardowej elektrodynamice kwantowej potencjał A spełnia równanie różniczkowe drugiego rzędu. Teraz mamy podwojoną ilość zmiennych, zatem mamy równania pierwszego rzędu po narzuceniu warunku cechowania.

Zwanziger w swojej analizie wybrał cechowanie $\partial^2 n \cdot A = \partial^2 n \cdot B = 0$ gdzie n jest ustalonym wektorem o współrzędnych $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$, które eliminuje niechciane człony w równaniach Eulera-Lagrange'a. Oznacza to, że $n \cdot A$ oraz $n \cdot B$ są polami swobodnymi nawet dla teorii oddziałującej. Korzystając z procedury kanonicznej otrzymał on następujące relacje komutacyjne między potencjałami

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), B^\nu(t, \mathbf{y})] = i\epsilon^{\mu\nu}{}_{\kappa 0} n^\kappa (n \cdot \partial)^{-1} (x - y), \quad (\text{III.7a})$$

$$[A^\mu(t, \mathbf{x}), A^\nu(t, \mathbf{y})] = [B^\mu(t, \mathbf{x}), B^\nu(t, \mathbf{y})] = -i(g_0^\mu n^\nu + g_0^\nu n^\mu) (n \cdot \partial)^{-1} (x - y), \quad (\text{III.7b})$$

które są nielokalne, ponieważ pędy sprzężone kanonicznie do jednego z potencjałów są przestrzennymi pochodnymi drugiego potencjału.

Opisywany tu model kwantowej elektrodynamiki cząstek obdarzonych ładunkiem elektrycznym i magnetycznym wynika z zaproponowanej przez Zwanzigera gęstości lagrangianu. W przeciwieństwie do teorii Diraca, która była nielokalna i zawierała niefizyczne zmienne dynamiczne związane ze strunami, teoria Zwanzigera prowadzi do lokalnych równań pola. Praca Zwanzigera zawiera wyznaczone relacje komutacyjne, skończone transformacje Lorentza dla potencjałów cechowania, tensor energii pędu i reguły Feynmana, przy czym wszystkie rachunki przeprowadzone zostały w cechowaniu $\partial^2 n \cdot A = \partial^2 n \cdot B = 0$.

W dalszej części pracy przedstawiona jest procedura kwantowania kanonicznego w kilku wybranych cechowaniach: planarnym, stożka świetlnego oraz Coulomba, przy użyciu dwóch różnych metod kwantowania.

IV. Wybrane własności funkcji Wightmana

4.1. Funkcje Wightmana

W mojej pracy podstawowym obiektem poddanym analizie jest korelacja próżniowa (wartość oczekiwana) nieuporządkowanego iloczynu dwóch operatorów pola $\langle 0|\phi_a(x)\phi_b(y)|0\rangle$, zwana w dalszej części 2-punktową funkcją Wightmana lub w skrócie po prostu funkcją Wightmana [49]. (Tutaj $\phi_a(x)$ oznacza dowolny operator pola.) Funkcja Wightmana jest bardzo dobrym przedmiotem badań. Jest ona rozwiązaniem równania jednorodnego, a uzyskanie z niej propagatorów, funkcji komutatorowej i innych potrzebnych wielkości jest stosunkowo proste. Poniżej omówimy wybrane ogólne własności funkcji Wightmana, które potem będą wykorzystywane w naszej analizie.

4.1.1. Translacyjna niezmienniczość

W relatywistycznej kwantowej teorii pola równaniami Heisenberga nazywa się często relacje¹ $i\hbar\partial_\mu\phi_a(x) = [\phi_a(x), P_\mu]$. Są one uogólnieniem równań Heisenberga w mechanice kwantowej (dla operatorów zależnych od czasu w obrazie Heisenberga). Tutaj operatory P_μ są generatorami translacji, więc zachodzą relacje komutacyjne $[P_\mu, P_\nu] = 0$, bo transformacje translacji są przemienne. Dlatego możemy podać formalne rozwiązanie wszystkich równań Heisenberga w postaci

$$\phi_a(x) = e^{iP_\mu x^\mu/\hbar} \phi_a(0) e^{-iP_\mu x^\mu/\hbar}, \quad (\text{IV.1})$$

gdzie $P_\mu x^\mu = P_0 x^0 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$, a operator wykładniczy definiowany jest przez nieskończony szereg potęgowy. Operatory generatorów translacji P_μ są jednocześnie operatorami całkowitego 4-pędu i istnieją ich stany własne $|p_\mu\rangle$ odpowiadające wartościom całkowitego 4-pędu p_μ , tzn. $P_\mu|p_\mu\rangle = p_\mu|p_\mu\rangle$. **Zakładamy**, że wśród tych stanów własnych istnieje jeden stan z zerowymi wartościami własnymi $p_\mu = 0$, który nazywamy stanem próżni $|0\rangle$. Więc mamy

$$P_\mu|0\rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad e^{-iP_\mu x^\mu/\hbar}|0\rangle = |0\rangle, \quad (\text{IV.2})$$

co oznacza, że stan próżni jest translacyjnie niezmienniczy. Stąd dla translacyjnie niezmienniczej próżni funkcje Wightmana

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_a(x)\phi_b(y)|0\rangle &= \langle 0|e^{iP_\mu x^\mu/\hbar}\phi_a(0)e^{-iP_\mu x^\mu/\hbar}e^{iP_\mu y^\mu/\hbar}\phi_b(0)e^{-iP_\mu y^\mu/\hbar}|0\rangle = \\ &= \langle 0|\phi_a(0)e^{-iP_\mu(x-y)^\mu/\hbar}\phi_b(0)|0\rangle = \end{aligned} \quad (\text{IV.3a})$$

$$= \langle 0|\phi_a(x-y)\phi_b(0)|0\rangle = \langle 0|\phi_a(0)\phi_b(y-x)|0\rangle \quad (\text{IV.3b})$$

¹W tym podrozdziale przywracam we wzorach jawną obecność \hbar .

zależą jedynie od różnicy argumentów $x - y$. W dalszej części będziemy często korzystać z tej własności funkcji Wightmana.

Zakładamy, że operator energii całkowitej ma widmo nieujemne, $p_0 \geq 0$, to oznacza, że funkcje Wightmana mogą być przedłużane analitycznie w składowych czasowych położenia $x^0 - y^0 \rightarrow x^0 - y^0 - i\epsilon$, dla $\epsilon > 0$, bo to wprowadzałoby skończony operator $e^{-\epsilon P_0}$ do wzoru (IV.3a). Ta własność analityczności będzie wykorzystywana w dalszej części pracy, gdy trzeba będzie ustalić np. postać rozkładu operatorów niekowariantnych na operatory kreacji i anihilacji.

4.1.2. Transformacja Lorentza dla pól wektorowych

Transformacja Lorentza opisuje zmianę współrzędnych punktu przy przejściu z jednego układu odniesienia do innego. Z postulatów szczególnej teorii względności wynika, że równania matematyczne opisujące prawa fizyki muszą być współzmiennicze po zastosowaniu do nich transformacji grupy Lorentza, czyli pod wpływem tych transformacji nie mogą zmieniać swojej postaci. Niezmienniczość postaci równań Maxwella ze źródłami elektrycznymi pod wpływem transformacji Lorentza, jeszcze przed sformułowaniem postulatów szczególnej teorii względności, wykazali Lorentz i Poincaré. Współzmienniczość równań elektrodynamiki wymaga, aby wielkości występujące w tych równaniach transformowały się pod wpływem transformacji Lorentza w określony sposób.

Właściwa transformacja Lorentza dla kwantowego pola wektorowego $V_\mu(x)$ jest generowana przez operator unitarny $U(\Lambda)$:

$$U(\Lambda) V_\mu(x) U^{-1}(\Lambda) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} V_\alpha(x') = \Lambda^\alpha_\mu V_\alpha(x'), \quad (\text{IV.4})$$

gdzie $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$. **Zakładamy** niezmienniczość lorentzowską stanu próżni $|0\rangle = U^{-1}(\Lambda)|0\rangle$, a to prowadzi do lorentzowskiej współzmienniczości (kowariantności) funkcji Wightmana

$$\langle 0|V_\mu(x) W_\nu(0)|0\rangle = \langle 0|U(\Lambda)V_\mu(x) W_\nu(0)U^{-1}(\Lambda)|0\rangle = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \langle 0|V_\alpha(x') W_\beta(0)|0\rangle, \quad (\text{IV.5})$$

dla każdej pary pól wektorowych. Ponieważ ta relacja jest spełniona dla dowolnego Λ^μ_ν , więc dla infinytesymalnej transformacji Lorentza, gdzie $\Lambda_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$, a $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ znajdujemy

$$\begin{aligned} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \langle 0|V_\lambda(x) U_\rho(0)|0\rangle &= g_{\lambda\nu} \langle 0|V_\mu(x) U_\rho(0)|0\rangle - g_{\lambda\mu} \langle 0|V_\nu(x) U_\rho(0)|0\rangle + \\ &+ g_{\rho\nu} \langle 0|V_\lambda(x) U_\mu(0)|0\rangle - g_{\rho\mu} \langle 0|V_\lambda(x) U_\nu(0)|0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Jeśli ten warunek lorentzowskiej kowariantności jest spełniany przez funkcje Wightmana, mówimy wtedy o kowariantnych funkcjach Wightmana, nawet jeżeli model opisywany jest przez gęstość lagrangianu, która nie jest lorentzowskim skalarem.

4.1.3. Transformacje dyskretne dla potencjałów

Zakładamy, że po przejściu do teorii kwantowej transformacje dyskretne dają takie same wyrażenia na transformacje potencjałów cechowania jak w teorii klasycznej. W teorii kwantowej transformacje parzystości i sprzężenia ładunkowego generowane są, odpowiednio, przez operatory unitarne \mathcal{P} i \mathcal{C} . Natomiast transformacja inwersji w czasie jest generowana przez operator antyunitarny (antyliniowy) \mathcal{T} . Działanie unitarnego operatora

liniowego \mathcal{P} transformacji parzystości na potencjały cechowania jest następujące

$$\mathcal{P}(A_0, \mathbf{A})\mathcal{P}^\dagger = (A_0, -\mathbf{A}), \quad \mathcal{P}(B_0, \mathbf{B})\mathcal{P}^\dagger = (-B_0, \mathbf{B}), \quad (\text{IV.7a})$$

unitarnego operatora antyliniowego \mathcal{T} transformacji inwersji w czasie

$$\mathcal{T}(A_0, \mathbf{A})\mathcal{T}^\dagger = (A_0, -\mathbf{A}), \quad \mathcal{T}(B_0, \mathbf{B})\mathcal{T}^\dagger = (-B_0, \mathbf{B}), \quad (\text{IV.7b})$$

oraz unitarnego operatora liniowego \mathcal{C} transformacji sprzężenia ładunkowego

$$\mathcal{C}(A_0, \mathbf{A})\mathcal{C}^\dagger = (-A_0, -\mathbf{A}), \quad \mathcal{C}(B_0, \mathbf{B})\mathcal{C}^\dagger = (-B_0, -\mathbf{B}). \quad (\text{IV.7c})$$

Złożenie tych 3 operacji prowadzi do wyrażenia na transformacje potencjałów cechowania

$$\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}A_\mu(x)(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger = -A_\mu(-x), \quad \mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}B_\mu(x)(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger = -B_\mu(-x). \quad (\text{IV.8})$$

Ze względu na obecność antyliniowego operatora \mathcal{T} , operator złożony $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}$ też jest antyunitarny (antyliniowy).

Zakładamy, że stan próżni jest niezmienniczy względem transformacji $\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}$, co oznacza, że $(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger|0\rangle = |0\rangle$, a to z kolei prowadzi do relacji dla mieszanych funkcji Wightmana

$$\begin{aligned} \langle 0|A_\mu(x)B_\nu(y)|0\rangle &= \langle (\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger|0|A_\mu(x)B_\nu(y)|(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger|0\rangle = \\ &= \langle 0|\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}A_\mu(x)(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})B_\nu(y)(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger|0\rangle^* = \\ &= \langle 0|A_\mu(-x)B_\nu(-y)|0\rangle^* = \langle 0|B_\nu^\dagger(-y)A_\mu^\dagger(-x)|0\rangle \\ &= \langle 0|B_\nu(-y)A_\mu(-x)|0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

gdzie ostatnia równość zachodzi dla operatorów hermitowskich. Dalej z translacyjnej niezmienniczości mamy

$$\langle 0|B_\nu(-y)A_\mu(-x)|0\rangle = \langle 0|B_\nu(x-y)A_\mu(0)|0\rangle = \langle 0|B_\nu(x)A_\mu(y)|0\rangle, \quad (\text{IV.10})$$

a następnie dokonujemy transformacji dualności elektromagnetycznej $A_\mu \rightarrow B_\mu \rightarrow -A_\mu$

$$\langle 0|B_\nu(x)A_\mu(y)|0\rangle = -\langle 0|A_\nu(x)B_\mu(0)|0\rangle. \quad (\text{IV.11})$$

Ta sekwencja równości prowadzi do bardzo ważnej własności mieszanych funkcji Wightmana

$$\boxed{\langle 0|A_\mu(x)B_\nu(y)|0\rangle = -\langle 0|A_\nu(x)B_\mu(0)|0\rangle}, \quad (\text{IV.12})$$

z której będziemy bardzo często korzystać w dalszej części pracy. Oczywiście analogiczną

analizę możemy przeprowadzić dla diagonalnych funkcji Wightmana

$$\begin{aligned}
 \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle &= \langle (\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger 0\rangle = \\
 &= \langle 0|\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T}A_\mu(x)(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})A_\nu(y)(\mathcal{P}\mathcal{C}\mathcal{T})^\dagger|0\rangle^* = \\
 &= \langle 0|A_\mu(-x)A_\nu(-y)|0\rangle^* = \langle 0|A_\nu^\dagger(-y)A_\mu^\dagger(-x)|0\rangle \\
 &= \langle 0|A_\nu(-y)A_\mu(-x)|0\rangle = \langle 0|A_\nu(x)A_\mu(y)|0\rangle
 \end{aligned} \tag{IV.13}$$

i widzimy, że są one symetryczne.

4.2. Niezmienniczość względem cechowania

4.2.1. Model jednopotencjałowy

Przejdźmy teraz do badania ogólnej struktury funkcji Wightmana dla potencjałów wektorowych A_μ i B_μ dopuszczonej przez symetrię cechowania. Najpierw, ograniczmy się do elektrodynamiki w sformułowaniu jednopotencjałowym, gdzie $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Teraz **zakładamy** ogólną postać funkcji Wightmana dla potencjału cechowania daną wyrażeniem

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_+(x) + \partial_\mu\Phi_\nu^A(x) + \partial_\nu\Phi_\mu^A(x), \tag{IV.14}$$

gdzie funkcje Φ_μ^A zależą od wyboru cechowania, zaś $D_+(x)$ jest kowariantną funkcją osoblwią dla bezmasowego pola skalarnego. To założenie wynika z zebrania znanych wyników dla różnych warunków cechowania, a ponadto można łatwo sprawdzić, że prowadzi ono do następującej funkcji Wightmana dla tensora pola elektromagnetycznego

$$\langle 0|F_{\mu\nu}(x)F_{\lambda\rho}(y)|0\rangle = [g_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\rho - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\rho + g_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\lambda - g_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\lambda]D_+(x-y). \tag{IV.15}$$

Wyrażenie to zgadza się ze wzorem Peierlsa na komutator $F^{\mu\nu}$ [46], dla pola swobodnego

$$[F_{\mu\nu}(x), F_{\lambda\rho}(y)] = i [g_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\rho - g_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\rho + g_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\lambda - g_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\lambda] D(x-y), \tag{IV.16}$$

gdzie wprowadziliśmy znaną funkcję Jordana-Pauliego $iD(x) = D_+(x) - D_+(-x)$. Możemy również rozważyć liniowy operator Wilsona

$$U(C) = \exp ig \int_C dx^\mu A_\mu(x), \tag{IV.17}$$

dla dowolnej krzywej C . Kenneth G. Wilson, w słynnej pracy dotyczącej uwięzienia kwarków [47], analizuje krzywe zamknięte - pętle i wprowadza chronologiczne uporządkowanie kwantowych operatorów pola. Definiuje w ten sposób obiekty

$$W(C) = \langle 0|T \exp ig \oint_C dx^\mu A_\mu(x)|0\rangle, \tag{IV.18}$$

które nazywamy pętlami Wilsona. Jeśli rozwiniemy operator wykładniczy i policzymy wartości próżniowe, wówczas dla abelowych pól cechowania uzyskujemy

$$W(C) = \exp \left[-g^2 \oint_C dx^\mu \oint_C dy^\nu \mathcal{D}_{F\mu\nu}(x-y) \right], \quad (\text{IV.19})$$

gdzie

$$\mathcal{D}_{F\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle \quad (\text{IV.20})$$

jest propagatorem Feynmana dla abelowych potencjałów cechowania przy ustalonym warunku cechowania. Wiemy, że ogólna postać tych propagatorów wygląda następująco

$$\mathcal{D}_{F\mu\nu}(x-y) = -g_{\mu\nu} D_F(x-y) + \partial_\mu \Phi_\nu(x-y) + \partial_\nu \Phi_\mu(x-y), \quad (\text{IV.21})$$

przy czym funkcja Feynmana dana jest wzorem $D_F(x) = \Theta(x^0) D_+(x) + \Theta(-x^0) D_+(-x)$, zaś człony $\Phi_\mu(x-y)$ zależą od wybranego warunku cechowania. Zgodnie z (IV.19) pętla Wilsona jest obiektem niezależnym od cechowania

$$W(C) = \exp \left[g^2 \oint_C dx^\mu \oint_C dy_\mu D_F(x-y) \right]. \quad (\text{IV.22})$$

Wniosek ten opiera się na pozornie oczywistej obserwacji, że całka liniowa po zamkniętej pętli z gradientu pola znika tożsamościowo

$$\oint_C dy^\nu \oint_C dx^\mu \partial_\mu \Phi_\nu(x-y) = 0, \quad (\text{IV.23})$$

Niestety ogólnie dla krzywych zamkniętych C podwójna całka jest rozbieżna i wymaga regularyzacji. Możemy, na przykład, zastosować regularyzację wymiarową, która polega na zmianie wymiaru czasoprzestrzeni Mińkowskiego z 4 na d i obliczeniu całek dla dowolnej, niecałkowitej wartości d . Regularyzacja ta dobrze pasuje do pętli Wilsona, ponieważ jest ona procedurą niezmienniczą ze względu na wybór cechowania [48]. Jest to podstawa słuszności równania (IV.22).

Podczas naszej analizy chcemy skupić się na niezmienniczości względem transformacji cechowania wielkości $W(C)$, która nie zależy od przepisu na chronologiczne uporządkowanie operatorów. Tak więc chcemy zbadać funkcje Wightmana dla operatora pętli Wilsona, który definiujemy w następujący sposób

$$W_W(C) = \langle 0 | \exp i g \oint_C dx^\mu A_\mu(x) | 0 \rangle = \exp \left[-g^2 \oint_C dx^\mu \oint_C dy^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) \right] \quad (\text{IV.24})$$

z 2-punktową funkcją Wightmana

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle. \quad (\text{IV.25})$$

Jeśli wprowadzimy ogólną postać jednopotencjałowych funkcji Wightmana (IV.14), wówczas funkcja Wightmana dla operatora pętli Wilsona może być wyrażona jako

$$W_W(C) = \exp \left[g^2 \oint_C dx^\mu \oint_C dy_\mu D_+(x-y) \right], \quad (\text{IV.26})$$

gdzie ponownie całki z dywergencji muszą zostać zregulizowane w sposób niezmienniczy od cechowania, podobnie jak w przypadku pętli Wilsona w poprzednim akapicie.

4.2.2. Model Zwanzigera

Wróćmy teraz do modelu Zwanzigera z dwoma potencjałami cechowania. Przyjrzyjmy się bliżej zaproponowanym przez Zwanzigera algebraicznym tożsamościom dla tensora pola elektromagnetycznego $F^{\mu\nu}$ i tensora dualnego $\tilde{F}^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{n^2} [n^\mu (n \cdot F)^\nu - n^\nu (n \cdot F)^\mu] - \frac{1}{n^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} n_\lambda (n \cdot \tilde{F})_\rho, \quad (\text{IV.27})$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{n^2} [n^\mu (n \cdot \tilde{F})^\nu - n^\nu (n \cdot \tilde{F})^\mu] + \frac{1}{n^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} n_\lambda (n \cdot F)_\rho. \quad (\text{IV.28})$$

gdzie n^μ jest ustalonym przestrzennym 4-wektorem ($n^2 < 0$). Potencjały cechowania A_μ i B_μ są związane z tensorami $F^{\mu\nu}$ i $\tilde{F}^{\mu\nu}$ następującymi relacjami

$$(n \cdot F)^\nu = (n \cdot \partial)A^\nu - \partial^\nu(n \cdot A) \quad (n \cdot \tilde{F})^\nu = (n \cdot \partial)B^\nu - \partial^\nu(n \cdot B). \quad (\text{IV.29})$$

i posiadają niezależne transformacje cechowania

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \chi_e(x), \quad B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x) + \partial_\mu \chi_g(x), \quad (\text{IV.30})$$

a transformacja dualności elektromagnetycznej ma postać $A_\mu \rightarrow B_\mu \rightarrow -A_\mu$. Wybierając za Zwanzigerem [24] 4-wektor $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$ otrzymujemy niezależne składowe tensora elektromagnetycznego

$$F_{ij} = \epsilon_{ij}(\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3), \quad F_{30} = \partial_3 A_0 - \partial_0 A_3, \quad (\text{IV.31a})$$

$$F_{i0} = \epsilon_{ij}(\partial_3 B_j - \partial_j B_3), \quad F_{3i} = \partial_3 A_i - \partial_i A_3. \quad (\text{IV.31b})$$

gdzie $\epsilon_{ij} = \epsilon^{ij} = \epsilon^{0ij3}$ z $i, j \in \{1, 2\}$. **Zakładamy** teraz, że diagonalne funkcje Wightmana mają taką samą strukturę jak w przypadku jednopotencjałowym (IV.14)

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_+(x) + \partial_\mu \Phi_\nu^A(x) + \partial_\nu \Phi_\mu^A(x), \quad (\text{IV.32a})$$

$$\langle 0|B_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_+(x) + \partial_\mu \Phi_\nu^B(x) + \partial_\nu \Phi_\mu^B(x), \quad (\text{IV.32b})$$

gdzie ϕ_μ^A i ϕ_μ^B są funkcjami zależnymi od wyboru cechowania. Te założenie można łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem dla różnych składowych tensora pola elektromagnetycznego. Na przykład możemy wyznaczyć

$$\langle 0|F_{30}(x)F_{3i}(0)|0\rangle = \langle 0|(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3)(x)(\partial_3 A_i - \partial_i A_3)(0)|0\rangle = -\partial_0 \partial_i D_+(x) \quad (\text{IV.33})$$

co zgadza się ze wzorem Peierlsa (IV.15). Podobnie, funkcje Wightmana dla składowych F^{30} i F^{3i} tensora dają się wyrazić przez diagonalne funkcje Wightmana dla potencjału A_μ , zaś dla składowych F^{ij} i F^{i0} , przez funkcje Wightmana dla potencjału B_μ . Dowodzi to, że nasze założenie dla diagonalnych funkcji Wightmana zgadza się ze wzorem Peierlsa (IV.15) dla tych składowych.

Niestety, jeżeli weźmiemy funkcje Wightmana dla innych składowych tensora, to nie

jesteśmy w stanie zapisać ich przy użyciu diagonalnych funkcji Wightmana. Ponieważ nie ma bezpośredniej analogii do opisu jednopotencjałowego musimy przyjrzeć się dokładniej strukturze modelu Zwanzigera.

4.2.3. Nediagonalne funkcje Wightmana

Szczęśliwie możemy zauważyć, że definicje składowych pola elektromagnetycznego (IV.31) wynikające z modelu Zwanzigera, pozwalają nam zapisać nediagonalne (mieszane) funkcje Wightmana w postaci

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda 0} \partial_\lambda \partial_3^2 \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(0) | 0 \rangle = -\partial_3 \langle 0 | F_{3\mu}(x) F^{\mu 0}(0) | 0 \rangle, \quad (\text{IV.34a})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda 3} \partial_\lambda \partial_3^2 \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(0) | 0 \rangle = \partial_\mu \langle 0 | F_{3\nu}(x) F^{\nu\mu}(0) | 0 \rangle - \partial_3 \langle 0 | F_{3\mu}(x) F^{\mu 3}(0) | 0 \rangle, \quad (\text{IV.34b})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda k} \partial_\lambda \partial_3^2 \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(0) | 0 \rangle = -\partial_3 \langle 0 | F_{3\mu}(x) F^{\mu k}(0) | 0 \rangle. \quad (\text{IV.34c})$$

Wzory te mogą być wyrażone w zwartej formie jako

$$\begin{aligned} (n \cdot \partial)^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(0) | 0 \rangle &= (n \cdot \partial) \langle 0 | n^\alpha F_{\alpha\beta}(x) F^{\rho\beta}(0) | 0 \rangle + \\ &+ n^\rho \langle 0 | n^\alpha F_{\alpha\beta}(x) \partial_\lambda F^{\lambda\beta}(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.35})$$

Następnie musimy znaleźć $\langle 0 | n^\alpha F_{\alpha\beta}(x) F^{\rho\beta}(0) | 0 \rangle$ używając argumentów spoza samego modelu Zwanzigera. Oczywiście możemy ponownie użyć wzoru Peierlsa w postaci (IV.15) i uzyskujemy

$$\langle 0 | n^\alpha F_{\alpha\beta}(x) F^{\rho\beta}(0) | 0 \rangle = 2(n \cdot \partial) \partial^\rho D_+(x), \quad (\text{IV.36a})$$

co po podstawieniu do (IV.35) daje

$$(n \cdot \partial)^2 \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(0) | 0 \rangle = 2(n \cdot \partial)^2 \partial^\rho D_+(x). \quad (\text{IV.36b})$$

Dla przestrzennie podobnego 4-wektora $n^2 < 0$ możemy użyć operatora całkowego $(n \cdot \partial)^{-1}$ i usunąć (odcałkować) pochodne cząstkowe ∂_3 . To prowadzi do równania o bardzo eleganckiej - kowariantnej - postaci

$$\boxed{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\lambda \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(0) | 0 \rangle = 2\partial^\rho D_+(x)}. \quad (\text{IV.37})$$

To równanie jest jednym z najważniejszych oryginalnych wyników tej pracy, nie ma ono odpowiednika w żadnej wcześniejszej pracy na temat podejścia dwupotencjałowego do elektrodynamiki kwantowej. W oczywisty sposób to lokalne równanie pozwala na poszukiwanie wyników niezależnych od cechowania w dużo wygodniejszy sposób niż wyliczanie pętli Wilsona.

Najpierw pragniemy zbadać ogólne własności rozwiązań tego równania, szczególnie interesują nas rozwiązania zgodne z omawianymi wcześniej symetriami: Lorentza i dyskretnymi. Wcześniej używając symetrii CPT przekonaliśmy się, że nediagonalne funkcje Wightmana są antysymetryczne (IV.12), co oznacza, że równanie (IV.37) zawiera wszystkie niezerowe składowe mieszanych funkcji Wightmana. Ponadto wprowadzając nowe oznaczenia dla

nieznikających funkcji Wightmana, gdzie $m, n, l \in \{1, 2, 3\}$

$$\langle 0|A_m(x)B_n(0)|0\rangle = \epsilon_{mnl}\mathcal{P}_l(x), \quad \langle 0|A_0(x)B_m(0)|0\rangle = \mathcal{N}_m(x) = -\langle 0|A_m(x)B_0(0)|0\rangle, \quad (\text{IV.38})$$

możemy zapisać równanie (IV.37) jako

$$\partial_0\mathcal{P}_m(x) - \epsilon_{mnl}\partial_n\mathcal{N}_l(x) = \partial_m D_+(x), \quad \partial_m\mathcal{P}_m(x) = \partial_0 D_+(x). \quad (\text{IV.39})$$

Równania te mają formę równań Maxwella, gdzie $\mathcal{P}_m(x)$ pełni rolę pola elektrycznego, $\mathcal{N}_m(x)$ pola magnetycznego, podczas gdy $\partial_0 D_+(x)$ oznacza gęstość ładunku elektrycznego, zaś $\partial_m D_+(x)$ gęstość ładunku magnetycznego. Zauważmy, że mamy tu tylko elektryczne prawo Gaussa i prawo Amp'ere'a (z poprawką Maxwella). Ewidentnie brakuje magnetycznego prawa Gaussa i prawa Faraday'a. Pokazuje to, że w przeciwieństwie do prawdziwych równań Maxwella nie mamy jednoznacznego rozwiązania, pomimo że źródła elektryczne nie znikają. Otrzymaliśmy więc równania posiadające wiele rozwiązań, co dało nam możliwość wybrania rozwiązania o pożądanych własnościach. Chcielibyśmy mieć rozwiązania lorentzowsko kowariantne, dlatego dodatkowo nakładam warunki niezmienniczości względem pchnięć

$$(x_m\partial_0 - x_0\partial_m)\mathcal{P}_n = -\epsilon_{mnl}\mathcal{N}_l, \quad (x_m\partial_0 - x_0\partial_m)\mathcal{N}_n = \epsilon_{mnl}\mathcal{P}_l, \quad (\text{IV.40a})$$

oraz obrotów

$$(x_m\partial_n - x_n\partial_m)\mathcal{P}_l(x) = -\delta_{nl}\mathcal{P}_m(x) + \delta_{ml}\mathcal{P}_n(x), \quad (\text{IV.40b})$$

$$(x_m\partial_n - x_n\partial_m)\mathcal{N}_p(x) = -\delta_{nl}\mathcal{N}_m(x) + \delta_{ml}\mathcal{N}_n(x). \quad (\text{IV.40c})$$

Warunek spójności (IV.39) oraz powyższych równań transformacyjnych jest prosty

$$x_0\partial_0 D_+(x) = x_m\partial_m D_+(x), \quad (\text{IV.41})$$

lecz **nie zgadza się z równaniem** $x_0\partial_0 D_+(x) = (x_m\partial_m - 2)D_+(x)$, które jest konsekwencją niezmienniczości $D_+(x)$ względem konformalnej transformacji skalowania. To oznacza, że **nie ma kowariantnej mieszanej funkcji Wightmana w modelu Zwanzigera**.

4.2.4. Rozwiązanie sferycznie symetryczne

W kwantowaniu kanonicznym obroty przestrzenne nie zmieniają hiperpowierzchni kwantowania $x^0 = 0$, możemy więc poszukiwać sferycznie symetrycznego rozwiązania na funkcje Wightmana. To oznacza, że nasze rozwiązanie musi dodatkowo spełnić warunki (IV.40b, IV.40c). Takim rozwiązaniem równania (IV.39) jest

$$\mathcal{P}_m(x) = \partial_m\partial_0\Delta^{-1} \star D_+(x), \quad \mathcal{N}_m = 0, \quad (\text{IV.42})$$

gdzie

$$\partial_0\Delta^{-1} \star D_+(x) = i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik \cdot x}}{2|\mathbf{k}|^2} = \int_0^{x^0} d\tau D_+(\tau, \mathbf{x}) + i \frac{1}{8\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}|}. \quad (\text{IV.43})$$

To rozwiązanie oznacza, że nieznikającymi mieszanymi funkcjami Wightmana są

$$\langle 0|A_m(x) B_n(0)|0\rangle = \epsilon_{mnl}\partial_l\partial_0\Delta^{-1} \star D_+(x), \quad (\text{IV.44})$$

przy czym $m, n, l \in \{1, 2, 3\}$. Możemy zapisać ogólną postać sferycznie symetrycznych mieszanym funkcji Wightmana

$$\langle 0|A_\mu(x) B_\nu(0)|0\rangle = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\partial}^\alpha\partial^\beta\Delta^{-1} \star D_+(x), \quad (\text{IV.45})$$

gdzie wprowadziliśmy $\bar{\partial}^\mu = \partial^\mu - t^\mu\partial_0$ z $t^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Spodziewamy się, że to rozwiązanie równania (IV.37) może być zrealizowane dla jakiegoś warunku cechowania. Narzucającym się wyborem jest warunek cechowania Coulomba dla obu potencjałów, który możemy zapisać jako $\bar{\partial}^\mu A_\mu = \partial_i A_i = 0$ i $\bar{\partial}^\mu B_\mu = \partial_i B_i = 0$. Oczywiście to nasze przypuszczenie wymaga potwierdzenia na drodze procedury kanonicznego kwantowania - wyniki przedstawione są w rozdziale VI.

Ponieważ wiemy, że nie istnieje kowariantne rozwiązanie równania (IV.37), to musimy przyjąć następującą **ogólną postać mieszanym funkcji Wightmana**

$$\langle 0|A_\mu(x) B_\nu(0)|0\rangle = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\partial}^\alpha\partial^\beta\Delta^{-1} \star D_+(x) + \partial_\mu\Psi_\nu(x) - \partial_\nu\Psi_\mu(x), \quad (\text{IV.46})$$

gdzie funkcje $\Psi_\mu(x)$ zależą od wybranego warunku cechowania, a znak minus w członach z pochodnymi wynika z wymaganej antysymetryczności mieszanej funkcji Wightmana [51]. Sprawdźmy poprawność tego wzoru w kilku cechowaniach w dalszej części pracy.

4.2.5. Pętla Wilsona dla mieszanym funkcji Wightmana

Sprawdźmy jakie są konsekwencje wzoru (IV.46) dla pętli Wilsona. Analogicznie do przypadku jednopotencjałowego (IV.24) rozważmy

$$W_W(C_1, C_2) = \langle 0| \left[\exp ig \oint_{C_1} dx^\mu A_\mu(x) \right] \left[\exp ig \oint_{C_2} dy^\nu B_\nu(y) \right] |0\rangle, \quad (\text{IV.47})$$

wówczas

$$\begin{aligned} W_W(C_1, C_2) &= \exp \left[-g^2 \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_1} dy^\nu \langle 0|A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle \right] \\ &\times \exp \left[-g^2 \oint_{C_2} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \langle 0|B_\mu(x) B_\nu(y)|0\rangle \right] \\ &\times \exp \left[-g^2 \oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \langle 0|A_\mu(x) B_\nu(y)|0\rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

Wkład od diagonalnej funkcji Wightmana ma postać (IV.26), tak więc skupmy się na wkładzie od nediagonalnych funkcji Wightmana. Skorzystanie z twierdzenia Stokesa dla całki liniowej, na przykład po x , prowadzi do

$$\oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \langle 0|A_\mu(x) B_\nu(y)|0\rangle = \int_{S_1} d\omega^{\mu\lambda}(x) \oint_{C_2} dy^\nu \langle 0|\partial_{[\lambda} A_{\mu]}(x) B_\nu(y)|0\rangle, \quad (\text{IV.49})$$

gdzie $d\omega^{\mu\lambda}(x) = dx^\mu \wedge dx^\lambda$ jest infitezymalnym elementem powierzchni, S_1 dowolną powierzchnią rozpiętą na pętli C_1 , więc jej brzeg dany jest przez $\partial S_1 = C_1$. Używamy oznaczenia $\partial_{[\lambda} A_{\mu]} = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda$. Jak widać wyrażenia z $\Psi_\mu(x)$ znikają, więc w powyższym całkowaniu musimy brać pod uwagę tylko

$$\langle 0 | \partial_{[\lambda} A_{\mu]}(x) B_\nu(y) | 0 \rangle = -\partial_{[\lambda} \epsilon_{\mu]\nu\alpha\beta} \bar{\partial}^\alpha \partial^\beta \Delta^{-1} \star D_+(x) = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \partial^\rho D_+(x), \quad (\text{IV.50})$$

gdzie ostatnią równość można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Mamy więc

$$\oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(y) | 0 \rangle = \int_{S_1} d\omega^{\mu\lambda}(x) \oint_{C_2} dy^\nu \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \partial_x^\rho D_+(x-y). \quad (\text{IV.51})$$

Oznacza to, że funkcje Wightmana dla operatorów pętli Wilsona mają postać kowariantną pod warunkiem, że całkę liniową przekształcimy na całkę powierzchniową. Fizycznie oznacza to, że jeden z potencjałów daje wkład przez swój strumień, zaś drugi przez linię zamkniętą. Oczywiście mamy dowolny wybór między potencjałami i możemy również zapisać

$$\oint_{C_1} dx^\mu \oint_{C_2} dy^\nu \langle 0 | A_\mu(x) B_\nu(y) | 0 \rangle = - \oint_{C_1} dx^\mu \int_{S_2} d\omega^{\nu\lambda}(y) \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} \partial_x^\rho D_+(x-y), \quad (\text{IV.52})$$

gdzie $\partial S_2 = C_2$.

V. Kwantowanie kanoniczne układów z więzami - procedura Faddeeva-Jackiwa

Kwantowanie kanoniczne jest to procedura pozwalająca na przejście z klasycznej do kwantowej teorii pola i umożliwia otrzymanie z funkcji Lagrange'a komutatorów pól i kanonicznie sprzężonych z nimi pędów. Z klasycznego lagrangianu w ustalonej chwili czasu

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}(\phi_a(t, \mathbf{x}), \partial_0 \phi_a(t, \mathbf{x})), \quad (\text{V.1})$$

gdzie ϕ_a są polami, których dynamikę będziemy badać, możemy wyznaczyć kanonicznie sprzężone do nich pędy

$$\pi^a(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta L(t)}{\delta [\partial_0 \phi_a(t, \mathbf{x})]} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_0 \phi_a(t, \mathbf{x})]}, \quad (\text{V.2})$$

przy czym symbol $\frac{\delta}{\delta \phi_a(t, \mathbf{x})}$ oznacza pochodną funkcjonalną. Równania pola dane są przez równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta [\partial_0 \phi_a(t, \mathbf{x})]} - \frac{\delta L}{\delta \phi_a(t, \mathbf{x})} = 0 \quad (\text{V.3})$$

wyprowadzone z zasady wariacyjnej $\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(t) dt = 0$. Odwracając związki (V.2) staramy się wyznaczyć pochodną po czasie pola ϕ_a w funkcji pól i pędów. Jeśli jesteśmy w stanie wyznaczyć wszystkie prędkości, wówczas mamy układ bez więzów. Hamiltonian definiujemy przy użyciu transformacji Legendre'a

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \left[\sum_a \pi^a(t, \mathbf{x}) \partial_0 \phi_a(t, \mathbf{x}) - \mathcal{L}(\phi_a, \partial \phi_a) \right]. \quad (\text{V.4})$$

$H(t)$ określa energię pola i jest stałą ruchu, gdy zależy od czasu tylko przez pola i pędy. Równania pola (V.3) możemy napisać w postaci kanonicznej

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_a(t, \mathbf{x}) = \frac{\delta H}{\delta \pi^a(t, \mathbf{x})}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \pi^a(t, \mathbf{x}) = -\frac{\delta H}{\delta \phi_a(t, \mathbf{x})}. \quad (\text{V.5})$$

Korzystając z powyższych wzorów możemy pochodną czasową dowolnego funkcjonału zapisać w postaci $\frac{dF}{dt} = \{F, H\}$, gdzie prawa strona jest nawiasem Poissona funkcjonału F z hamiltonianem. Nawias Poissona dwóch funkcjonałów F i G , które zależą od zmiennych

kanonicznych, zdefiniowany jest następująco

$$\{F, G\} = \sum_a \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{x} \left(\frac{\delta F}{\delta \phi_a(t, \mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi^a(t, \mathbf{x})} - \frac{\delta F}{\delta \pi^a(t, \mathbf{x})} \frac{\delta G}{\delta \phi_a(t, \mathbf{x})} \right). \quad (\text{V.6})$$

Zmienne kanoniczne spełniają następujące nawiasy Poissona w określonej chwili czasu

$$\{\phi_a(t, \mathbf{x}), \pi^b(t, \mathbf{y})\} = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.7a})$$

$$\{\phi_a(t, \mathbf{x}), \phi_b(t, \mathbf{y})\} = \{\pi^a(t, \mathbf{x}), \pi^b(t, \mathbf{y})\} = 0. \quad (\text{V.7b})$$

Przechodząc do teorii kwantowej pola c-liczbowe zamieniamy na operatory w przestrzeni Hilberta oraz nawiasy Poissona na komutatory. Operatory spełniają równoczesowe kanoniczne relacje komutacyjne (używamy jednostek gdzie $\hbar = 1$)

$$[\Phi_a(t, \mathbf{x}), \Pi^b(t, \mathbf{y})] = i\delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{V.8})$$

ze znikającymi komutatorami $[\Phi_a, \Phi_b]$ i $[\Pi^a, \Pi^b]$. Wprowadziliśmy tu wielkie litery greckie na oznaczenie operatorów kwantowych odpowiadającym polom klasycznym, jednak w dalszej części nie będziemy dokonywać takiego rozróżnienia. Pomimo, że zarówno wielkości klasyczne, jak i odpowiadające im operatory kwantowe oznaczamy przy pomocy tych samych symboli, to mam nadzieję, że nie będzie to prowadziło do nieporozumień.

Procedura kanoniczna staje się bardziej złożona, gdy nie potrafimy z równań (V.2) wyrazić wszystkich prędkości przez pędy i pola. Mamy wtedy do czynienia z układem z więzami. W przypadku kwantowania tego typu układów mamy do dyspozycji standardowy algorytm zaproponowany przez Diraca zawierający trzy rutynowe działania: znalezienie wszystkich więzów, policzenie nawiasów Poissona, by sklasyfikować więzy oraz zamianę nawiasów Poissona przez nawiasy Diraca. Czasami zastosowanie tego algorytmu wiąże się z obliczeniem dużej ilości nawiasów Poissona i bywa pracochłonne. Możemy zdecydować się również na prostrzą metodę zaproponowaną przez Faddeeva i Jackiwa [50], [52].

Procedura kwantowania Faddeeva i Jackiwa wykorzystuje tensor symplektyczny. Wynikające z lagranżjanu równania Eulera-Lagrange'a pierwszego rzędu w zmiennych w przestrzeni fazowej, tworzą macierz symplektyczną. Gdy tensor symplektyczny, tzn. odwrotność macierzy symplektycznej istnieje, wówczas definiuje nam nawiasy zmiennych. Jeśli macierz jest nieodwracalna, wtedy rzeczywiste więzy produkowane są przez mody zerowe macierzy symplektycznej i potencjał. Przez mnożniki Lagrange'a więzy rzeczywiste modyfikują macierz symplektyczną, która może stać się odwracalna.

Więzy pojawiają się w każdym z analizowanych w tej pracy cechowań. W większości z nich korzystam z procedury Faddeeva-Jackiwa, ponieważ szybko prowadzi ona do nawiasów Diraca. W kolejnym kroku dla potencjałów cechowania wprowadzamy rozkład Focka, następnie znajdujemy komutatory operatorów kreacji i anihilacji i ostatecznie budujemy 2-punktowe funkcje Wightmana, tzn. próżniowe wartości oczekiwane dla nieuporządkowanego iloczynu operatorów pola.

Metoda Diraca	Metoda Faddeeva-Jackiwa
Gęstość lagrangianu	Gęstość lagrangianu
↓	↓
Pędy uogólnione	Pędy uogólnione
↓	↓
Nawiasy Poissona	Równania Eulera-Lagrange'a
↓	↓
Więzy pierwotne	Zmienne niedynamiczne
↓	↓
Rozszerzona gęstość hamiltonianu	Efektywne równania dynamiczne
↓	↓
Więzy wtórne	Hamiltonowskie równania ruchu
↓	↓
Dodatkowe warunki na więzy 1-go rodzaju	Hamiltonian Diraca
↓	↓
Nawiasy Diraca	Nawiasy Diraca

5.1. Cechowanie planarne

Wybór cechowania planarnego polega na takiej modyfikacji gęstości lagrangianu, aby równania Eulera-Lagrange'a przybrały postać sfaktoryzowaną. Sprowadza się to eliminacji odpowiednich członów, a w przypadku gęstości lagrangianu Zwanzigera (III.5) musimy odjąć dwa człony związane z dwoma potencjałami. Stąd w cechowaniu planarnym mamy

$$\mathcal{L}_{Zw}^{planar} = \mathcal{L}_{Zw} - \frac{1}{2}\partial_\mu(n \cdot A)\partial^\mu(n \cdot A) - \frac{1}{2}\partial_\mu(n \cdot B)\partial^\mu(n \cdot B), \quad (V.9)$$

przy czym wybieramy jako stały 4-wektor $n^\mu = (0, 0, 0, 1)$, więc $n^2 = -1 < 0$, czyli mamy przestrzennie podobne cechowanie planarne. Powyższa gęstość lagrangianu zapisana jawnie w składowych

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Zw}^{planar} &= \frac{1}{2}(\partial_3 A_0)^2 - \partial_3 A_0 \partial_0 A_3 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_i)^2 + \partial_3 A_i \partial_i A_3 + \frac{1}{2}(\partial_3 A_3)^2 - A \cdot J \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_3 B_0)^2 - \partial_3 B_0 \partial_0 B_3 - \frac{1}{2}(\partial_3 B_i)^2 + \partial_3 B_i \partial_i B_3 + \frac{1}{2}(\partial_3 B_3)^2 - C \cdot K \\ &- \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial_3 B_j - \partial_j B_3) - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j(\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3) \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_0 B_i - \partial_i B_0)(\partial_3 A_j - \partial_j A_3) + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3). \end{aligned} \quad (V.10)$$

posłuży do przeprowadzenia procedury kanonicznego kwantowania, a następnie znalezienia funkcji Wightmana. Wymaganie, aby równania Eulera-Lagrange'a miały postać sfaktoryzowaną, sprawdzimy poniżej wyznaczając równania ruchu dla wszystkich składowych obu potencjałów.

5.1.1. Procedura kanoniczna

Rozpoczynamy od znalezienia pędów kanonicznych, jako pochodnych gęstości lagranżjanu po odpowiednich prędkościach

$$\pi_A^0 = 0, \quad \pi_B^0 = 0, \quad (V.11a)$$

$$\pi_A^3 = -\partial_3 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j, \quad \pi_B^3 = -\partial_3 B_0 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j, \quad (V.11b)$$

$$\pi_A^i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 B_j - \partial_j B_3), \quad \pi_B^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 A_j - \partial_j A_3), \quad (V.11c)$$

Widzimy, że wyrażenia na pędy nie zawierają prędkości, tzn. pierwszych pochodnych potencjałów po czasie. Występujące tu więzy są więzami drugiego rodzaju, więc postępujemy dalej zgodnie z procedurą Faddeeva-Jackiwa. Znajdujemy równania Eulera-Lagrange'a dla gęstości ładunków

$$\partial_0 \partial_3 A_3 = \partial_3 (\partial_3 A_0 + \epsilon_{ij}\partial_i B_j) + J^0, \quad (V.12a)$$

$$\partial_0 \partial_3 B_3 = \partial_3 (\partial_3 B_0 - \epsilon_{ij}\partial_i A_j) + K^0, \quad (V.12b)$$

składowych prądów wzdłuż wyróżnionego wektora \mathbf{n}

$$\partial_0 \partial_3 A_0 = \partial_3 (\partial_i A_i + \partial_3 A_3) + J^3, \quad (V.12c)$$

$$\partial_0 \partial_3 B_0 = \partial_3 (\partial_i B_i + \partial_3 B_3) + K^3 \quad (V.12d)$$

oraz dla składowych prądów prostopadłych do \mathbf{n}

$$\partial_0 \partial_3 A_i = \partial_i \partial_3 A_0 - \epsilon_{ij}\partial_3 (\partial_3 B_j - \partial_j B_3) + \epsilon_{ij}K^j, \quad (V.12e)$$

$$\partial_0 \partial_3 B_i = \partial_i \partial_3 B_0 + \epsilon_{ij}\partial_3 (\partial_3 A_j - \partial_j A_3) - \epsilon_{ij}J^j. \quad (V.12f)$$

We wszystkich tych równaniach możemy wyłączyć pochodną cząstkową ∂_3 , a to oznacza **postać sfaktoryzowaną równań Eulera-Lagrange'a** – efektywnie są one równaniami 1-rzędu. Wyznaczamy gęstość hamiltonianu dla badanego układu z transformacji Legendre'a

$$\mathcal{H} = \pi_A^3 \partial_0 A_3 + \pi_B^3 \partial_0 B_3 + \pi_A^i \partial_0 A_i + \pi_B^i \partial_0 B_i - \mathcal{L} = \mathcal{H}^{AA} + \mathcal{H}^{BB} + \mathcal{H}^{AB}, \quad (V.13a)$$

gdzie dla ułatwienia dalszej analizy wprowadziliśmy podział gęstości hamiltonianu na trzy części: wkład zależny tylko od potencjału A_μ

$$\mathcal{H}^{AA} = -\frac{1}{2}(\partial_3 A_0)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3 A_i)^2 - \partial_i A_3 \partial_3 A_i + A \cdot J, \quad (V.13b)$$

wkład zależny tylko od potencjału B_μ , który jest dualnie symetryczny do \mathcal{H}^{AA}

$$\mathcal{H}^{BB} = -\frac{1}{2}(\partial_3 B_0)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 B_3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3 B_i)^2 - \partial_i B_3 \partial_3 B_i + B \cdot K \quad (\text{V.13c})$$

oraz wkład zależny od obu potencjałów cechowania A_μ i B_μ

$$\mathcal{H}^{AB} = -\partial_3 A_0 \epsilon_{ij} \partial_i B_j + \partial_3 B_0 \epsilon_{ij} \partial_i A_j. \quad (\text{V.13d})$$

W tych wyrażeniach pomijam człony będące całkowitą pochodną przestrzenną, ponieważ zakładam, że potencjały znikają w nieskończoności i człony brzegowe możemy zaniedbać przy konstrukcji hamiltonianu $H = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}$. Możemy wprowadzić nowe pola

$$\mathcal{U}_L^A = \epsilon_{ij} \Delta_\perp^{-1/2} \star \partial_i B_j, \quad \mathcal{U}_L^B = -\epsilon_{ij} \Delta_\perp^{-1/2} \star \partial_i A_j, \quad (\text{V.14a})$$

$$\mathcal{E}_L^A = \Delta_\perp^{1/2} \star A_3 - \Delta_\perp^{-1/2} \star \partial_3 \partial_i A_i, \quad \mathcal{E}_L^B = \Delta_\perp^{1/2} \star B_3 - \Delta_\perp^{-1/2} \star \partial_3 \partial_i B_i, \quad (\text{V.14b})$$

$$\mathcal{U}_3^A = A_3, \quad \mathcal{U}_3^B = B_3, \quad (\text{V.14c})$$

$$\mathcal{E}_3^A = \partial_3 A_0 + \epsilon_{ij} \partial_i B_j + \partial_3^{-1} J^0, \quad \mathcal{E}_3^B = \partial_3 B_0 - \epsilon_{ij} \partial_i A_j + \partial_3^{-1} K^0, \quad (\text{V.14d})$$

gdzie całkowite operatory $\Delta_\perp^{\pm 1/2}$ są omówione w Dodatku C, \star oznacza splot, natomiast

$$\partial_3^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x^3 - y^3) \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2). \quad (\text{V.15})$$

Te nowe pola zostały wybrane w w taki sposób, by spełniały równia 1-go rzędu w pochodnych czasowych. Przedefiniowanie w ten sposób pól, pozwala na zapisanie równań (V.27a)–(V.27f) w postaci

$$\partial_0 \mathcal{U}_3^A = \mathcal{E}_3^A, \quad \partial_0 \mathcal{U}_3^B = \mathcal{E}_3^B, \quad \partial_0 \mathcal{E}_3^A = \Delta \mathcal{U}_3^A, \quad \partial_0 \mathcal{E}_3^B = \Delta \mathcal{U}_3^B, \quad (\text{V.16a})$$

$$\partial_0 \mathcal{U}_L^A = \mathcal{E}_L^A + \Delta_\perp^{-1/2} \star \partial_3^{-1} \star \partial_i J^i, \quad (\text{V.16b})$$

$$\partial_0 \mathcal{U}_L^B = \mathcal{E}_L^B + \Delta_\perp^{-1/2} \star \partial_3^{-1} \star \partial_i K^i, \quad (\text{V.16c})$$

$$\partial_0 \mathcal{E}_L^A = \Delta \mathcal{U}_L^A + \partial_3^{-1} \star \Delta_\perp^{1/2} \star J^0 - \epsilon_{ij} \Delta_\perp^{1/2} \star \partial_i K^j, \quad (\text{V.16d})$$

$$\partial_0 \mathcal{E}_L^B = \Delta \mathcal{U}_L^B + \partial_3^{-1} \star \Delta_\perp^{1/2} K^0 + \epsilon_{ij} \Delta_\perp^{-1/2} \star \partial_i J^j, \quad (\text{V.16e})$$

Spośród nowych pól mamy dwie pary pól swobodnych nawet w obecności prądów, zaś pozostałe pola zawierają niekowariantne człony polowe. Ta postać równań pola oznacza, że wprowadzone nowe pola stanowią układ niezależnych stopni swobody. Otrzymaną wcześniej gęstość hamiltonianu zapisujemy w nowych zmiennych i uzyskujemy

$$\mathcal{H}^{AB} = -(\mathcal{E}_3^A - \Delta_\perp^{1/2} \mathcal{U}_L^A - \partial_3^{-1} J^0) \Delta_\perp \mathcal{U}_L^A - (\mathcal{E}_3^B - \Delta_\perp^{1/2} \mathcal{U}_L^B - \partial_3^{-1} K^0) \Delta_\perp \mathcal{U}_L^B \quad (\text{V.17a})$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{AA} = & -\frac{1}{2}(\mathcal{E}_3^A - \Delta_\perp^{\frac{1}{2}}\mathcal{U}_L^A)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3\mathcal{U}_L^B)^2 + \frac{1}{2}(\Delta_\perp^{-\frac{1}{2}}\partial_i\mathcal{E}_L^A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3\mathcal{U}_3^A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_i\mathcal{U}_3^A)^2 \\ & + \mathcal{U}_3^AJ^3 + \frac{1}{2}(\partial_3J^0)^2 + (\partial_3^{-1}\partial_i(\mathcal{U}_3^A - \Delta_\perp^{-\frac{1}{2}}\mathcal{E}_L^A) + \epsilon_{ij}\Delta_\perp^{-\frac{1}{2}}\partial_j\mathcal{U}_L^B)J^i. \end{aligned} \quad (\text{V.17b})$$

\mathcal{H}^{BB} jest dualnie symetryczny do \mathcal{H}^{AA} , przy czym transformacja dualności ma teraz postać $\mathcal{E}_{3,L}^A \mapsto \mathcal{E}_{3,L}^B \mapsto -\mathcal{E}_{3,L}^A$ oraz $\mathcal{U}_{3,L}^A \mapsto \mathcal{U}_{3,L}^B \mapsto -\mathcal{U}_{3,L}^A$, więc łatwo możemy odtworzyć jego postać. Mając równania ruchu 1-go rzędu oraz gęstość hamiltonianu możemy odczytać wszystkie nawiasy Diraca. Niezerowe nawiasy dla nowych pól wynoszą

$$\{\mathcal{U}_3^A(\mathbf{x}), \mathcal{E}_3^A(\mathbf{y})\}_D = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\mathcal{U}_3^B(\mathbf{x}), \mathcal{E}_3^B(\mathbf{y})\}_D = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.18a})$$

$$\{\mathcal{U}_L^A(\mathbf{x}), \mathcal{E}_L^A(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\mathcal{U}_L^B(\mathbf{x}), \mathcal{E}_L^B(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.18b})$$

a po przejściu do teorii kwantowej otrzymujemy następujące równoczesowe reguły komutacyjne

$$[\mathcal{U}_3^A(\mathbf{x}), \mathcal{E}_3^A(\mathbf{y})] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\mathcal{U}_3^B(\mathbf{x}), \mathcal{E}_3^B(\mathbf{y})] = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.19a})$$

$$[\mathcal{U}_L^A(\mathbf{x}), \mathcal{E}_L^A(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\mathcal{U}_L^B(\mathbf{x}), \mathcal{E}_L^B(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.19b})$$

Oznacza to, że możemy traktować $(\mathcal{U}_3^A, \mathcal{E}_3^A)$, $(\mathcal{U}_3^B, \mathcal{E}_3^B)$, $(\mathcal{U}_L^A, \mathcal{E}_L^A)$ i $(\mathcal{U}_L^B, \mathcal{E}_L^B)$ jako pary zmiennych kanonicznych.

5.1.2. Funkcje Wightmana

Przejdę teraz do analizy przypadku swobodnego tzn. gdy źródła zewnętrzne znikają $J^\mu = K^\mu = 0$, wówczas pola spełniają równania $\square \mathcal{U}_{3,L}^{A,B} = \square \mathcal{E}_{3,L}^{A,B} = 0$. Przedstawiam niezależne pola za pomocą całek fourierowskich w reprezentacji Focka

$$\mathcal{U}_{3,L}^{A,B}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left[a_{3,L}^{A,B}(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a_{3,L}^{A,B\dagger}(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} \right], \quad (\text{V.20a})$$

$$\mathcal{E}_{3,L}^{A,B}(x) = -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{3,L}^{A,B}(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} - a_{3,L}^{A,B\dagger}(\mathbf{k})e^{ik \cdot x} \right], \quad (\text{V.20b})$$

gdzie wprowadziliśmy zbiór operatorów kreacji i anihilacji. Z komutatorów (V.19) wynikają następujące związki komutacyjne

$$\left[a_3^A(\mathbf{k}), a_3^{A\dagger}(\mathbf{p}) \right] = -2|k|\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad \left[a_3^B(\mathbf{k}), a_3^{B\dagger}(\mathbf{p}) \right] = -2|k|\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (\text{V.21a})$$

$$\left[a_L^A(\mathbf{k}), a_L^{A\dagger}(\mathbf{p}) \right] = 2|k|\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad \left[a_L^B(\mathbf{k}), a_L^{B\dagger}(\mathbf{p}) \right] = 2|k|\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (\text{V.21b})$$

Te relacje komutacyjne spełniane przez operatory kreacji i anihilacji pozwalają znaleźć funkcje Wightmana dla niezależnych stopni swobody

$$\langle 0|\mathcal{U}_L^A(x)\mathcal{U}_L^A(0)|0\rangle = -\langle 0|\mathcal{U}_3^A(x)\mathcal{U}_3^A(0)|0\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik\cdot x}, \quad (\text{V.22a})$$

$$\langle 0|\mathcal{E}_L^A(x)\mathcal{E}_L^A(0)|0\rangle = -\langle 0|\mathcal{E}_3^A(x)\mathcal{E}_3^A(0)|0\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{k}|}{2} e^{-ik\cdot x}, \quad (\text{V.22b})$$

$$\langle 0|\mathcal{U}_L^A(x)\hat{\mathcal{E}}_L^A(0)|0\rangle = -\langle 0|\mathcal{U}_3^A(x)\mathcal{E}_3^A(0)|0\rangle = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-ik\cdot x}, \quad (\text{V.22c})$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że funkcja Wightmana zależy jedynie od różnicy argumentów pól $\langle 0|\mathcal{U}_L^A(x)\mathcal{U}_L^A(y)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{U}_L^A(x-y)\mathcal{U}_L^A(0)|0\rangle$ oraz (IV.3b), aby zapisać wyniki w czytelny sposób. Związki (V.14) są odwracalne i możemy wyjściowe potencjały wyrazić przez pola \mathcal{U} i \mathcal{E}

$$A_3 = \mathcal{U}_3^A, \quad A_0 = \partial_3^{-1} \star \left(\mathcal{E}_3^A - \Delta_{\perp}^{1/2} \mathcal{U}_L^A - \partial_3^{-1} \star J^0 \right), \quad (\text{V.23a})$$

$$B_3 = \mathcal{U}_3^B, \quad B_0 = \partial_3^{-1} \star \left(\mathcal{E}_3^B - \Delta_{\perp}^{1/2} \mathcal{U}_L^B - \partial_3^{-1} \star K^0 \right), \quad (\text{V.23b})$$

$$A_i = \partial_3^{-1} \star \partial_i \mathcal{U}_3^A + \epsilon_{ij} \Delta_{\perp}^{-1/2} \star \partial_j \mathcal{U}_L^B - \partial_3^{-1} \star \Delta_{\perp}^{-1/2} \partial_i \mathcal{E}_L^A, \quad (\text{V.23c})$$

$$B_i = \partial_3^{-1} \star \partial_i \mathcal{U}_3^B - \epsilon_{ij} \Delta_{\perp}^{-1/2} \star \partial_j \mathcal{U}_L^A - \partial_3^{-1} \star \Delta_{\perp}^{-1/2} \partial_i \mathcal{E}_L^B, \quad (\text{V.23d})$$

Znalezione wcześniej funkcje Wightmana dla pól \mathcal{U} i \mathcal{E} umożliwiają wyznaczenie funkcji Wightmana dla potencjałów wyjściowych

$$\langle 0|A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_{+}(x-y) - (\partial_{\mu}n_{\nu} + \partial_{\nu}n_{\mu})E_{+}(x-y), \quad (\text{V.24a})$$

$$\langle 0|B_{\mu}(x)B_{\nu}(y)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_{+}(x-y) - (\partial_{\mu}n_{\nu} + \partial_{\nu}n_{\mu})E_{+}(x-y), \quad (\text{V.24b})$$

$$\langle 0|A_{\mu}(x)B_{\nu}(y)|0\rangle = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\partial^{\rho}n^{\lambda}E_{+}(x-y), \quad (\text{V.24c})$$

gdzie wprowadzamy funkcje $D_{+}(x)$ i $E_{+}(x)$ zdefiniowane następująco

$$D_{+}(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ikx}, \quad E_{+}(x) = \partial_3^{-1} \star D_{+}(x) = \int_0^{x^3} d\xi D_{+}(x^0, x_{\perp}, \xi)$$

Własności powyższych funkcji umieszczone są w dodatku C.

5.1.3. Równoważność rozwiązań

Możemy porównać teraz mieszane funkcje Wightmana w cechowaniu planarnym (V.24c) oraz uzyskanym wcześniej rozwiązaniem

$$\langle 0|A_i(x)B_j(0)|0\rangle_{Coul} = \epsilon_{ijk}\partial_k\partial_0\Delta^{-1}\star D_{+}(x). \quad (\text{V.25})$$

Warunek równoważności rozwiązań jest następujący

$$\langle 0|A_{\mu}(x)B_{\nu}(0)|0\rangle_{planar} = \langle 0|A_{\mu}(x)B_{\nu}(0)|0\rangle_{Coul} + \partial_{\mu}\Psi_{\nu} - \partial_{\nu}\Psi_{\mu}. \quad (\text{V.26})$$

Wypisując w jawny sposób wszystkie składowe mamy następujący układ równań na poszukiwane funkcje Ψ

$$\partial_1 \Psi_2 - \partial_2 \Psi_1 = -\partial_0 \partial_3^{-1} \star D_+(x) + \partial_3 \partial_0 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (\text{V.27a})$$

$$\partial_1 \Psi_3 - \partial_3 \Psi_1 = -\partial_0 \partial_2 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (\text{V.27b})$$

$$\partial_2 \Psi_3 - \partial_3 \Psi_2 = \partial_0 \partial_1 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (\text{V.27c})$$

$$\partial_1 \Psi_0 - \partial_0 \Psi_1 = -\partial_2 \partial_3^{-1} D_+(x), \quad (\text{V.27d})$$

$$\partial_2 \Psi_0 - \partial_0 \Psi_2 = \partial_1 \partial_3^{-1} D_+(x), \quad (\text{V.27e})$$

$$\partial_3 \Psi_0 - \partial_0 \Psi_3 = 0. \quad (\text{V.27f})$$

Biorę kombinację liniową pochodnych trzech ostatnich równań uzyskuję równanie $\Delta \Psi_0 = \partial_0 \partial_i \Psi_i$, którego rozwiązaniem jest funkcja $\Psi_0 = \partial_0 \partial_i \Delta^{-1} \star \Psi_i$. Z pochodnych równań (V.27a) i (V.27c) mamy

$$\partial_1^2 \Psi_2 - \partial_2 \partial_1 \Psi_1 = -\partial_0 \partial_1 \partial_3^{-1} \star D_+(x) + \partial_0 \partial_1 \partial_3 \Delta^{-1} \star D_+(x), \quad (\text{V.28a})$$

$$\partial_2(-\partial_1 \Psi_1 - \partial_2 \Psi_3) - \partial_3^2 \Psi_2 = \partial_0 \partial_1 \partial_3 \Delta^{-1} \star D_+(x), \quad (\text{V.28b})$$

przy czym założyłam, że $\partial_1 \Psi_1 + \partial_2 \Psi_2 + \partial_3 \Psi_3 = 0$. Różnica tych równań pozwala w prosty sposób wyznaczyć Ψ_2

$$\Delta \Psi_2 = -\partial_0 \partial_1 \partial_3^{-1} \star D_+(x) \quad \Rightarrow \quad \Psi_2 = -\partial_0 \partial_1 \partial_3^{-1} \star \Delta^{-1} \star D_+(x). \quad (\text{V.29})$$

W analogiczny sposób można uzyskać pozostałe funkcje Ψ . Poszukiwanymi rozwiązaniami są więc następujące funkcje

$$\Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 = \partial_0 \partial_2 \partial_3^{-1} \star \Delta^{-1} \star D_+(x), \quad (\text{V.30a})$$

$$\Psi_3 = 0, \quad \Psi_2 = -\partial_0 \partial_1 \partial_3^{-1} \star \Delta^{-1} \star D_+(x). \quad (\text{V.30b})$$

5.2. Cechowanie dLC₁

Jako warunek cechowania chcemy wybrać cechowanie aksjalne (osiowe), które pozwoli na eliminację składowych A_0 i B_0 , dla których nie ma pędów kanonicznie sprzężonych w gęstości lagrangianu Zwanzigera. Wydaje się, że najprostszym wyborem jest warunek **cechowania czasowego** $A_0 = B_0 = 0$. Jednak już w teorii 1-potencjałowej cechowanie czasowe prowadzi do poważnych problemów związanych z operatorem prawa Gaussa. Ten operator powinien, dla teorii swobodnej, anihilować stany fizyczne, w tym oczywiście stan próżni. Jednak to prowadziłoby do niekonsystencji procedury kwantowania kanonicznego. Aby temu zaradzić wprowadzono zmodyfikowany stan próżni, jednak za cenę złamania symetrii translacyjnej [48]. To oznaczałoby złamanie jednego z podstawowych naszych założeń (IV.3b), które przyjęliśmy podczas analizy ogólnych własności. Dlatego nie będziemy rozważać cechowania czasowego dla analizy funkcji Wightmana w modelu Zwanzigera.

Proponujemy zbadać cechowanie, opisywane przez warunki na składowe potencjałów cechowania $A_0 - \alpha A_1 = 0$ i $B_0 - \alpha B_1 = 0$, przy czym parametr α może przyjmować wartości ± 1 . Będziemy to cechowanie nazywać dLC₁ - jest to skrót z języka angielskiego *double Light-Cone*, gdzie 1 oznacza oś x^1 , wzdłuż której budujemy 4-wektor zerowy $(1, \alpha, 0, 0)$. Ten wybór warunków cechowania, na oba potencjały A_μ i B_μ , jest oczywiście symetryczny

względem transformacji dualności elektromagnetycznej, która będzie jawnie obecna na każdym kroku procedury kanonicznej.

Wykorzystujemy ten warunek cechowania, aby wyznaczyć pola A_0 i B_0 przy pomocy A_1 i B_1 . To prowadzi do gęstości lagrangianu w tym cechowaniu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Zw}^{dLC1} = & \frac{1}{2} (\alpha \partial_3 A_1 - \partial_0 A_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3)^2 + \\
& + \frac{1}{2} (\alpha \partial_3 B_1 - \partial_0 B_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3)^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3)^2 + \\
& - A_1 (\alpha J^0 + J^1) - A_2 J^2 - A_3 J^3 - B_1 (\alpha K^0 + K^1) - B_2 K^2 - B_3 K^3 + \\
& - \frac{1}{2} (\partial_0 - \alpha \partial_1) A_1 (\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3) + \frac{1}{2} (\partial_0 A_2 - \alpha \partial_2 A_1) (\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3) + \\
& - \frac{1}{2} (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) (\alpha \partial_3 B_1 - \partial_0 B_3) + \frac{1}{2} (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1) (\alpha \partial_3 A_1 - \partial_0 A_3) + \\
& + \frac{1}{2} (\partial_0 - \alpha \partial_1) B_1 (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) - \frac{1}{2} (\partial_0 B_2 - \alpha \partial_2 B_1) (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3). \quad (V.31)
\end{aligned}$$

Wyda się, że nie jest możliwe wprowadzenie bardziej zwartej notacji do opisu tego cechowania. W lagrangianie Zwazigera wyróżniony jest kierunek 3, zaś wybór warunku cechowania wyróżnia kierunek 1, jednocześnie pozwalając na wyeliminowanie składowych czasowych obu potencjałów, w związku z tym używamy zapisu jawnego wszystkich składowych.

5.2.1. Procedura kanoniczna

Opierając się na powyższej gęstości lagrangianu mogę przeprowadzić procedurę kwantowania kanonicznego. Równania Eulera-Lagrange'a mają postać

$$\partial_- \partial_3 (B_2 + \alpha A_3) = \alpha J^+, \quad \partial_- \partial_3 B_1 = \partial_3 (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) - J^2, \quad (V.32a)$$

$$\partial_- \partial_3 (A_2 - \alpha B_3) = -\alpha K^+, \quad \partial_- \partial_3 A_1 = -\partial_3 (\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3) + K^2, \quad (V.32b)$$

$$\partial_+ \partial_- A_3 = \partial_2 (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) - \alpha \partial_3 (\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3) + \alpha K^2 - J^3, \quad (V.32c)$$

$$\partial_+ \partial_- B_3 = \partial_2 (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) + \alpha \partial_3 (\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) - \alpha J^2 - K^3, \quad (V.32d)$$

wprowadzone są tu następujące oznaczenia $\partial_{\pm} = \partial_0 \pm \alpha \partial_1$, $J^+ = J^0 + \alpha J^1$, $K^+ = K^0 + \alpha K^1$. W kolejnym kroku znajdujemy pędy kanoniczne sprzężone z potencjałami A_{μ} i B_{μ}

$$\pi_A^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_3 B_j - \partial_j B_3), \quad \pi_i^B = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_3 A_j - \partial_j A_3), \quad (V.33a)$$

$$\pi_A^3 = \partial_0 A_3 - \alpha \partial_3 A_1 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j, \quad \pi_B^3 = \partial_0 B_3 - \alpha \partial_3 B_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j, \quad (V.33b)$$

gdzie $i, j \in \{1, 2\}$. Widzimy, że tylko z równań (V.33b) jesteśmy w stanie wyznaczyć prędkości przez pędy i pola

$$\partial_0 A_3 = \pi_A^3 + \alpha \partial_3 A_1 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j, \quad \partial_0 B_3 = \pi_B^3 + \alpha \partial_3 B_1 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j, \quad (V.34a)$$

a pozostałe równania (V.33a) definiują więzy w układzie

$$\chi_i^A = \pi_A^i + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 B_j - \partial_j B_3) \simeq 0, \quad \chi_i^B = \pi_B^i - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 A_j - \partial_j A_3) \simeq 0. \quad (\text{V.35})$$

Jak można zauważyć są to więzy drugiego rzędu, więc mogą posłużyć się procedurą Faddeeva-Jackiwa kwantowania tego typu układów. Korzystając z transformacji Legendre'a wyznaczam gęstość hamiltonianu

$$\mathcal{H}_{can}^{dLC1} = \pi_A^1 \partial_0 A_1 + \pi_A^2 \partial_0 A_2 + \pi_A^3 \partial_0 A_3 + \pi_B^1 \partial_0 B_1 + \pi_B^2 \partial_0 B_2 + \pi_B^3 \partial_0 B_3 - \mathcal{L}_{Zw}^{dLC1}, \quad (\text{V.36})$$

która ma następującą jawną postać

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can}^{dLC1} &= \frac{1}{2}(\pi_A^3 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j)^2 + \frac{1}{2}(\pi_B^3 - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j)^2 + \alpha\partial_3 A_1(\pi_A^3 - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j) + \\ &+ \alpha\partial_3 B_1(\pi_B^3 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j) + \frac{1}{2}(\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 + \\ &+ \alpha J^+ A_1 + J_\perp \cdot A_\perp + \alpha K^+ B_1 + K_\perp \cdot B_\perp, \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

przy czym $J_\perp \cdot A_\perp = J^2 A_2 + J^3 A_3$ i $K_\perp \cdot B_\perp = K^2 B_2 + K^3 B_3$. Gęstość lagrangianu, równania Eulera-Lagrange'a oraz gęstość hamiltonianu są dualnie symetryczne. Kwantowanie metodą Faddeev'a-Jackiwa wymaga by równania ruchu były równaniami pierwszego stopnia ze względu na pochodną po czasie, w tym celu wprowadzamy nowe pola

$$\Pi_A^3 = \pi_A^3 + \alpha\partial_3 A_1 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j, \quad \Pi_B^3 = \pi_B^3 + \alpha\partial_3 B_1 - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j, \quad (\text{V.38})$$

i otrzymujemy równania ruchu w postaci

$$\partial_0 A_3 = \Pi_A^3, \quad \partial_0 B_3 = \Pi_B^3, \quad (\text{V.39a})$$

$$\partial_0 \Pi_A^3 = \partial_1^2 A_3 + \partial_2(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) - \alpha\partial_3(\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3) + \alpha K^2 - J^3, \quad (\text{V.39b})$$

$$\partial_0 \Pi_B^3 = \partial_1^2 B_3 + \partial_2(\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2) + \alpha\partial_3(\partial_3 A_2 - \partial_2 A_3) - \alpha J^2 - K^3, \quad (\text{V.39c})$$

oraz gęstość hamiltonianu zawierającą człony tylko kwadratowe w $\Pi_{A,B}^3$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can}^{dLC1} &= \frac{1}{2}(\Pi_A^3)^2 + \frac{1}{2}(\Pi_B^3)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 B_1)^2 - \alpha\partial_3 A_1 \epsilon_{ij} \partial_i B_j + \\ &+ \alpha\partial_3 B_1 \epsilon_{ij} \partial_i A_j + \frac{1}{2}(\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 + \\ &+ \alpha J^+ A_1 + J_\perp \cdot A_\perp + \alpha K^+ B_1 + K_\perp \cdot B_\perp + . \end{aligned} \quad (\text{V.40})$$

Widzimy zatem, że pola A_3 i B_3 mają tylko po jednym nieznikającym nawiasie Diraca

$$\{A_3(\mathbf{x}), \Pi_A^3(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{B_3(\mathbf{x}), \Pi_B^3(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{V.41})$$

Nieznikające nawiasy Diraca dla pól $\Pi_{A,B}^3$, to

$$\{\Pi_A^3(\mathbf{x}), A_3(\mathbf{y})\}_D = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\Pi_B^3(\mathbf{x}), B_3(\mathbf{y})\}_D = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.42a})$$

$$\{\Pi_A^3(\mathbf{x}), B_2(\mathbf{y})\}_D = \alpha\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\Pi_B^3(\mathbf{x}), A_2(\mathbf{y})\}_D = -\alpha\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{V.42b})$$

Jeżeli wyeliminujemy składowe pól A_2 i B_2 na rzecz pól, które zdefiniowane będą następująco $\mathcal{A} = A_3 + \alpha B_2$ i $\mathcal{B} = B_3 - \alpha A_2$, to powyższe nawiasy zapisują się jako nawiasy Diraca

$$\{\Pi_A^3(\mathbf{x}), \mathcal{A}(\mathbf{y})\}_D = \{\Pi_B^3(\mathbf{x}), \mathcal{B}(\mathbf{y})\}_D = 0, \quad (\text{V.43})$$

a gęstość hamiltonianu z dokładnością do pełnej pochodnej ma postać

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can}^{dLC1} &= \frac{1}{2}(\Pi_A^3)^2 + \frac{1}{2}(\Pi_B^3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1 A_3)^2 + \frac{1}{2}(\partial_1 B_3)^2 + \frac{1}{2}[\alpha\partial_3(\mathcal{A} - A_3) - \partial_2 B_3]^2 + \\ &+ \frac{1}{2}[\alpha\partial_3(B_3 - \mathcal{B}) - \partial_2 A_3]^2 - \partial_1 A_1 \partial_3 \mathcal{A} - \partial_1 B_1 \partial_3 \mathcal{B} + \alpha J^+ A_1 + \\ &+ A_3(J^3 - \alpha K^2) + \alpha K^2 \mathcal{A} + \alpha K^+ B_1 + B_3(K^3 + \alpha J^2) - \alpha J^2 \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (\text{V.44})$$

Równania ruchu w nowych zmiennych są teraz równaniami pierwszego stopnia w pochodnych czasowych

$$\partial_0 A_3 = \Pi_A^3, \quad \partial_0 B_3 = \Pi_B^3, \quad (\text{V.45a})$$

$$\partial_0 \partial_3 \mathcal{A} = \alpha \partial_1 \partial_3 \mathcal{A} + J^+, \quad \partial_0 \partial_3 \mathcal{B} = \alpha \partial_1 \partial_3 \mathcal{B} + K^+, \quad (\text{V.45b})$$

$$\partial_0 \partial_3 B_1 = \alpha \partial_1 \partial_3 B_1 + \partial_3 [\alpha \partial_3 (B_3 - \mathcal{B}) - \partial_2 A_3] - J^2, \quad (\text{V.45c})$$

$$\partial_0 \partial_3 A_1 = \alpha \partial_1 \partial_3 A_1 - \partial_3 [\alpha \partial_3 (\mathcal{A} - A_3) - \partial_2 B_3] + K^2, \quad (\text{V.45d})$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \Pi_A^3 &= \partial_1^2 A_3 + \partial_2 [\partial_2 A_3 - \alpha \partial_3 (B_3 - \mathcal{B})] - \alpha \partial_3 [\alpha \partial_3 (\mathcal{A} - A_3) - \partial_2 B_3] + \\ &+ \alpha K^2 - J^3, \end{aligned} \quad (\text{V.45e})$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \Pi_B^3 &= \partial_1^2 B_3 + \partial_2 [\partial_2 B_3 - \alpha \partial_3 (\mathcal{A} - A_3)] + \alpha \partial_3 [\alpha \partial_3 (B_3 - \mathcal{B}) - \partial_2 A_3] - \\ &- \alpha J^2 - K^3. \end{aligned} \quad (\text{V.45f})$$

Do otrzymanej gęstości hamiltonianu (V.44) i równań ruchu (V.45) możemy zastosować procedurę Faddeeva-Jackiwa i otrzymujemy nieznikające nawiasy Diraca

$$\{A_3(\mathbf{x}), \Pi_A^3(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{B_3(\mathbf{x}), \Pi_B^3(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.46a})$$

$$\{\partial_3 A_1(\mathbf{x}), \mathcal{A}(\mathbf{y})\}_D = \alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\partial_3 \mathcal{A}(\mathbf{x}), A_1(\mathbf{y})\}_D = \alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.46b})$$

$$\{\partial_3 B_1(\mathbf{x}), \mathcal{B}(\mathbf{y})\}_D = \alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\partial_3 \mathcal{B}(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{y})\}_D = \alpha \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{V.46c})$$

Wybierając antysymetryczną dystrybucję ∂_3^{-1} jako

$$\partial_3^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x^3 - y^3) \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2), \quad (\text{V.47})$$

otrzymujemy symetryczną postać nawiasów Diraca

$$\{A_1(\mathbf{x}), \mathcal{A}(\mathbf{y})\}_D = \{\mathcal{A}(\mathbf{x}), A_1(\mathbf{y})\}_D = \alpha \partial_3^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.48a})$$

$$\{B_1(\mathbf{x}), \mathcal{B}(\mathbf{y})\}_D = \{\mathcal{B}(\mathbf{x}), B_1(\mathbf{y})\}_D = \alpha \partial_3^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{V.48b})$$

Podsumowując, możemy traktować zmienne (A_3, Π_A^3) , (B_3, Π_B^3) , (A_1, \mathcal{A}) , (B_1, \mathcal{B}) , jako pary zmiennych kanonicznych.

Równania ruchu dla zmiennych kanonicznych wskazują, że \mathcal{A} i \mathcal{B} są niezależnymi modami niekowariantnymi, tzn. spełniającymi równania $\partial_- \mathcal{A} = J^+$ i $\partial_- \mathcal{B} = K^+$. Z pozostałych zmiennych kanonicznych możemy utworzyć dwie kombinacje pól

$$\Lambda := \partial_3 \Pi_A^3 + \alpha \partial_1 \partial_3 A_3 + \partial_3 \partial_2 B_1 - \alpha \partial_3^2 A_1, \quad (\text{V.49})$$

$$\tilde{\Lambda} := \partial_3 \Pi_B^3 + \alpha \partial_1 \partial_3 B_3 - \partial_3 \partial_2 A_1 - \alpha \partial_3^2 B_1, \quad (\text{V.50})$$

z transformacją dualności $\Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda} \rightarrow -\Lambda$. Tak zdefiniowane pola mają następujące równania ruchu

$$\partial_- \Lambda = -\partial_\perp \cdot J_\perp, \quad \partial_- \tilde{\Lambda} = -\partial_\perp \cdot K_\perp. \quad (\text{V.51})$$

Otrzymaliśmy więc cztery mody niekowariantne: \mathcal{A} , \mathcal{B} , Λ , $\tilde{\Lambda}$. Nawiasy Diraca dla tych modów nie są diagonalne, gdyż np. $\{\Lambda(\mathbf{x}), \Lambda(\mathbf{y})\}_D \neq 0$. Dlatego warto przedefiniować te mody i wprowadzić pola

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_E &:= \Lambda - \alpha \partial_1 \partial_3 \mathcal{A} - J^0 = \\ &= \partial_3 \Pi_A^3 + \alpha \partial_1 \partial_3 A_3 + \partial_3 \partial_2 B_1 - \alpha \partial_3^2 A_1 - \alpha \partial_1 \partial_3 \mathcal{A} - J^0, \end{aligned} \quad (\text{V.52a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_M &:= \tilde{\Lambda} - \alpha \partial_1 \partial_3 \mathcal{B} - K^0 = \\ &= \partial_3 \Pi_B^3 + \alpha \partial_1 \partial_3 B_3 - \partial_3 \partial_2 A_1 - \alpha \partial_3^2 B_1 - \alpha \partial_1 \partial_3 \mathcal{B} - K^0, \end{aligned} \quad (\text{V.52b})$$

które spełniają swobodne niekowariantne równania ruchu

$$\partial_- \mathcal{G}_E = 0, \quad \partial_- \mathcal{G}_M = 0, \quad (\text{V.53})$$

jeżeli zewnętrzne prądy są zachowane, tzn. $\partial_\mu J^\mu = \partial_\mu K^\mu = 0$. Teraz mamy następujące nieznikające nawiasy Diraca

$$\{\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})\}_D = -\partial_3 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\mathcal{B}(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})\}_D = \alpha \partial_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.54a})$$

$$\{\mathcal{B}(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})\}_D = -\partial_3 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\mathcal{A}(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})\}_D = -\alpha \partial_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.54b})$$

gdzie wykorzystaliśmy relacje $\partial_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Jeśli dodatkowo wprowadzimy nowe mody niekowariantne

$$\phi_A \stackrel{df}{=} (-\Delta_\perp)^{-1} \star (\partial_3 \mathcal{A} - \alpha \partial_2 \mathcal{B}) = (-\Delta_\perp)^{-1} \star [\partial_\perp \cdot A_\perp - \alpha (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2)], \quad (\text{V.55a})$$

$$\phi_B \stackrel{df}{=} (-\Delta_\perp)^{-1} \star (\partial_3 \mathcal{B} + \alpha \partial_2 \mathcal{A}) = (-\Delta_\perp)^{-1} \star [\partial_\perp \cdot B_\perp + \alpha (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)], \quad (\text{V.55b})$$

otrzymamy diagonalne nieznikające nawiasy Diraca

$$\{\phi_A(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})\}_D = \{\phi_B(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.56})$$

które prowadzą do następujących nieznikających komutatorów

$$[\phi_A(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})] = [\phi_B(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{V.57})$$

Ponieważ mamy ogólnie równania ruchu $(\partial_0 - \alpha\partial_1)\mathcal{G}_{E,M} = 0$, stąd przedstawienie kwantowych pól $\mathcal{G}_{E,M}$ przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji wygląda następująco

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{E,M}(x) = & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \left[e^{-i(k_2x^2+k_3x^3)} e^{-ik_1(x^0+\alpha x^1)} p_{A,B}(\mathbf{k}) + \right. \\ & \left. + e^{+i(k_2x^2+k_3x^3)} e^{+ik_1(x^0+\alpha x^1)} p_{A,B}^\dagger(\mathbf{k}) \right], \end{aligned} \quad (\text{V.58})$$

przy czym dla $k_1 \geq 0$ operatory kreacji występują z czynnikiem $e^{+ik_1x^0}$, natomiast operatory anihilacji z czynnikiem $e^{-ik_1x^0}$. Operatory anihilacji $p_{A,C}$ wybierają stan fizyczny $|phys\rangle$ poprzez warunki $p_A|phys\rangle = p_B|phys\rangle = 0$, dla pełnej teorii z oddziaływaniem, czego należało się spodziewać w cechowaniu LC_1 .

Pozostałe mody niekowariantne ϕ_A i ϕ_B mają rozwinięcie Fouriera jedynie dla przypadku znikania prądów zewnętrznych $J^\mu = K^\mu = 0$, bo wtedy spełniają one równanie $(\partial_0 - \alpha\partial_1)\phi_{A,B} = 0$ i stąd

$$\begin{aligned} \phi_A(x) = & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \left[e^{-i(k_2x^2+k_3x^3)} e^{-ik_1(x^0+\alpha x^1)} a(\mathbf{k}) + \right. \\ & \left. + e^{+i(k_2x^2+k_3x^3)} e^{+ik_1(x^0+\alpha x^1)} a^\dagger(\mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.59})$$

Znając komutatory dla modów uzyskujemy niezerowe komutatory dla operatorów kreacji i anihilacji

$$\left[p_A(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{p}) \right] = -i(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad \left[p_B(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{p}) \right] = -i(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (\text{V.60a})$$

Możemy teraz wyznaczyć swobodne funkcje Wightmana dla modów niekowariantnych i wynoszą one

$$\langle 0 | \mathcal{G}_E(x) \phi_A(0) | 0 \rangle = -i \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} e^{-ik_\perp \cdot x_\perp} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} e^{-i\alpha k_1 x^1} e^{-ik_1 x^0}, \quad (\text{V.61a})$$

$$\langle 0 | \mathcal{G}_M(x) \phi_B(0) | 0 \rangle = -i \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} e^{-ik_\perp \cdot x_\perp} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} e^{-i\alpha k_1 x^1} e^{-ik_1 x^0}, \quad (\text{V.61b})$$

gdzie $k_\perp \cdot x_\perp = k_2x^2 + k_3x^3$. Komutatory wyjściowych potencjałów z polami $\mathcal{G}_{E,M}$ mają postać

$$[A_1(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})] = [B_1(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})] = i\partial_1 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.62a})$$

$$[A_2(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})] = [B_2(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})] = i\partial_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.62b})$$

$$[A_3(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})] = [B_3(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})] = i\partial_3 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.62c})$$

$$[A_1(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})] = [B_1(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})] = 0, \quad (\text{V.62d})$$

$$[A_2(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})] = [B_2(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})] = 0, \quad (\text{V.62e})$$

$$[A_3(\mathbf{x}), \mathcal{G}_M(\mathbf{y})] = [B_3(\mathbf{x}), \mathcal{G}_E(\mathbf{y})] = 0, \quad (\text{V.62f})$$

co oznacza, że \mathcal{G}_E i \mathcal{G}_M są generatorami transformacji cechowania, odpowiednio, dla potencjałów \mathbf{A} i \mathbf{B} .

Wprowadzając do opisu nowe zmienne

$$\mathcal{M}^A = \Pi_3^A - \alpha \partial_1 A_3, \quad \mathcal{M}^B = \Pi_3^B - \alpha \partial_1 B_3, \quad (\text{V.63a})$$

$$C_1 = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 = \alpha \partial_3 B_3 - \partial_2 A_3 - \alpha \partial_3 \mathcal{B}, \quad (\text{V.63b})$$

$$E_1 = \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 = \alpha \partial_3 A_3 + \partial_2 B_3 - \alpha \partial_3 \mathcal{A}, \quad (\text{V.63c})$$

z transformacją dualności $E_1 \rightarrow C_1 \rightarrow -E_1$, $\mathcal{M}^A \rightarrow \mathcal{M}^B \rightarrow -\mathcal{M}^A$, otrzymujemy równania ruchu dla nowych pól w postaci

$$\partial_- C_1 = \alpha \partial_3 \mathcal{M}^B - \partial_2 \mathcal{M}^A - \alpha K^+, \quad (\text{V.64a})$$

$$\partial_- E_1 = \alpha \partial_3 \mathcal{M}^A + \partial_2 \mathcal{M}^B - \alpha J^+, \quad (\text{V.64b})$$

$$\partial_+ \mathcal{M}^A = -\partial_2 C_1 + \alpha \partial_3 E_1 + \alpha K^2 - J^3, \quad (\text{V.64c})$$

$$\partial_+ \mathcal{M}^B = \partial_2 E_1 + \alpha \partial_3 C_1 - \alpha J^2 - K^3, \quad (\text{V.64d})$$

co oznacza, że są to mody kowariantne, tzn mody spełniające równanie $\square \gamma = f(J, K)$, gdzie $\gamma \in \{C_1, E_1, \mathcal{M}^A, \mathcal{M}^B\}$, $\square = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$, zaś f jest pewną funkcją prądów elektrycznych i magnetycznych. Uzyskane nieznikające nawiasy Diraca dla tych modów kowariantnych wynoszą

$$\{C_1(\mathbf{x}), \mathcal{M}^A(\mathbf{y})\}_D = -\{E_1(\mathbf{x}), \mathcal{M}^B(\mathbf{y})\}_D = -\partial_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.65a})$$

$$\{C_1(\mathbf{x}), \mathcal{M}^B(\mathbf{y})\}_D = \{E_1(\mathbf{x}), \mathcal{M}^A(\mathbf{y})\}_D = \alpha \partial_3 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.65b})$$

$$\{\mathcal{M}^A(\mathbf{x}), \mathcal{M}^A(\mathbf{y})\}_D = \{\mathcal{M}^B(\mathbf{x}), \mathcal{M}^B(\mathbf{y})\}_D = -2\alpha \partial_1 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{V.65c})$$

Wprowadzając nowe pola $\chi_C := \alpha \partial_3 \mathcal{M}^B - \partial_2 \mathcal{M}^A$, $\chi_E := \alpha \partial_3 \mathcal{M}^A + \partial_2 \mathcal{M}^B$ upraszczamy niezerowe nawiasy Diraca

$$\{C_1(\mathbf{x}), \chi_C(\mathbf{y})\}_D = \{E_1(\mathbf{x}), \chi_E(\mathbf{y})\}_D = -\Delta_\perp \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.66a})$$

$$\{\chi_E(\mathbf{x}), \chi_E(\mathbf{y})\}_D = \{\chi_C(\mathbf{x}), \chi_C(\mathbf{y})\}_D = 2\alpha \partial_1 \Delta_\perp \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.66b})$$

oraz równania ruchu

$$\partial_- C_1 = \chi_C - \alpha K^+, \quad \partial_- E_1 = \chi_E - \alpha J^+, \quad (\text{V.67a})$$

$$\partial_+ \chi_C = \Delta_\perp C_1 - \alpha \partial_\perp \cdot K_\perp + \partial_2 J^3 - \partial_3 J^2, \quad (\text{V.67b})$$

$$\partial_+ \chi_E = \Delta_\perp E_1 - \alpha \partial_\perp \cdot J_\perp - \partial_2 K^3 + \partial_3 K^2. \quad (\text{V.67c})$$

Stąd dostajemy równania falowe dla zachowanych prądów $\partial_\mu J^\mu = 0$, $\partial_\mu K^\mu = 0$

$$\square C_1 = \partial_2 J^3 - \partial_3 J^2 - (\partial_0 K^1 + \partial_1 K^0), \quad \square E_1 = -\partial_2 K^3 + \partial_3 K^2 - (\partial_0 J^1 + \partial_1 J^0). \quad (\text{V.68})$$

Przedefiniujmy ponownie mody i wprowadźmy pola zdefiniowane w następujący sposób

$\Pi_1^C := \chi_C + \alpha \partial_1 C_1 - \alpha K^0$, $\Pi_1^E := \chi_E + \alpha \partial_1 E_1 - \alpha J^0$, dla których nawiasy Diraca są diagonalne

$$\{C_1(\mathbf{x}), \Pi_1^C(\mathbf{y})\}_D = \{E_1(\mathbf{x}), \Pi_1^E(\mathbf{y})\}_D = \Delta_\perp \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.69a})$$

natomiast równania ruchu mają postać

$$\partial_0 C_1 = \Pi_1^B - K^1, \quad \partial_0 E_1 = \Pi_1^E - J^1, \quad (\text{V.70a})$$

$$\partial_0 \Pi_1^C = \Delta C_1 - \partial_1 K^0 + \partial_2 J^3 - \partial_3 J^2, \quad (\text{V.70b})$$

$$\partial_0 \Pi_1^E = \Delta E_1 - \partial_1 J^0 - \partial_2 K^3 + \partial_3 K^2. \quad (\text{V.70c})$$

Pola C_1 , E_1 , Π_1^C i Π_1^E spełniają równania falowe, są więc modami kowariantnymi. Przedstawienie modów kowariantnych przy pomocy operatorów kreacji i anihilacji

$$C_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left[e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} c(\mathbf{k}) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{+i|\mathbf{k}|x^0} c^\dagger(\mathbf{k}) \right], \quad (\text{V.71a})$$

$$\Pi_1^C(x) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[-e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} p_C(\mathbf{k}) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{+i|\mathbf{k}|x^0} p_C^\dagger(\mathbf{k}) \right], \quad (\text{V.71b})$$

i analogicznie dla pól E_1 i Π_1^E , oraz znajomość komutatorów dla tych modów pozwala na wyznaczenie operatorów kreacji

$$c^\dagger(\mathbf{k}) = e^{-i|\mathbf{k}|x^0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} (|\mathbf{k}| C_1 - i \partial_0 C_1), \quad (\text{V.72a})$$

$$p_C^\dagger(\mathbf{k}) = -ie^{-i|\mathbf{k}|x^0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} e^{+i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} (|\mathbf{k}| \Pi_1^C - i \partial_0 \Pi_1^C) \quad (\text{V.72b})$$

i anihilacji

$$c(\mathbf{k}) = e^{+i|\mathbf{k}|x^0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} (|\mathbf{k}| C_1 + i \partial_0 C_1), \quad (\text{V.72c})$$

$$p_C(\mathbf{k}) = ie^{+i|\mathbf{k}|x^0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} (|\mathbf{k}| \Pi_1^C + i \partial_0 \Pi_1^C), \quad (\text{V.72d})$$

a następnie komutatora tych wielkości

$$\begin{aligned} [c(\mathbf{k}), c^\dagger(\mathbf{p})] &= e^{i(|\mathbf{k}|-|\mathbf{p}|)x^0} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{y} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\mathbf{p}\mathbf{y})} \{ |\mathbf{k}||\mathbf{p}| [C_1(\mathbf{x}), C_1(\mathbf{y})] + \\ &\quad - i|\mathbf{k}| [C_1(\mathbf{x}), \partial_0 C_1(\mathbf{y})] + i|\mathbf{p}| [\partial_0 C_1(\mathbf{x}), C_1(\mathbf{y})] + \\ &\quad + [\partial_0 C_1(\mathbf{x}), \partial_0 C_1(\mathbf{y})] \}. \end{aligned} \quad (\text{V.73})$$

Analogicznie wyznaczam komutatory dla operatorów kreacji i anihilacji wszystkich modów kowariantnych i uzyskuję następujące niezerowe komutatory

$$\begin{aligned} [c(\mathbf{k}), c^\dagger(\mathbf{p})] &= [c(\mathbf{k}), p_C^\dagger(\mathbf{p})] = [p_C(\mathbf{k}), p_C^\dagger(\mathbf{p})] = [e(\mathbf{k}), e^\dagger(\mathbf{p})] = [e(\mathbf{k}), p_E^\dagger(\mathbf{p})] = \\ &= [p_E(\mathbf{k}), p_E^\dagger(\mathbf{p})] = 2(2\pi)^3 |\mathbf{k}| k_\perp^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{V.74})$$

Znając powyższe komutatory możemy wyznaczyć funkcje Wightmana dla modów kowariantnych

$$\langle 0|C_1(x)C_1(0)|0\rangle = \langle 0|E_1(x)E_1(0)|0\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_\perp^2}{2|\mathbf{k}|} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|x^0)}, \quad (\text{V.75a})$$

$$\langle 0|C_1(x)\Pi_1^C(0)|0\rangle = \langle 0|E_1(x)\Pi_1^E(0)|0\rangle = i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_\perp^2}{2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|x^0)}, \quad (\text{V.75b})$$

$$\langle 0|\Pi_1^C(x)\Pi_1^C(0)|0\rangle = \langle 0|\Pi_1^E(x)\Pi_1^E(0)|0\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_\perp^2|\mathbf{k}|}{2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-|\mathbf{k}|x^0)}, \quad (\text{V.75c})$$

5.2.2. Funkcje Wightmana dla wyjściowych pól

Naszym celem jest znalezienie funkcji Wightmana dla potencjałów A_μ i B_μ . Musimy zatem wiedzieć jak wyrażają się one przez wprowadzone wcześniej mody kowariantne i niekowariantne. Dla pól swobodnych możemy wyznaczyć relacje

$$A_1 = (-\Delta_\perp)^{-1} \star [\partial_2(\partial_3)^{-1} \star \mathcal{G}_M + \alpha\mathcal{G}_E - \Pi_1^E - \alpha\partial_1 E_1] - \partial_1\phi_A, \quad (\text{V.76a})$$

$$B_1 = (-\Delta_\perp)^{-1} \star [-\partial_2(\partial_3)^{-1} \star \mathcal{G}_E + \alpha\mathcal{G}_M - \Pi_1^B - \alpha\partial_1 C_1] - \partial_1\phi_B, \quad (\text{V.76b})$$

$$A_2 = -(-\Delta_\perp)^{-1} \star (\partial_3 C_1 + \alpha\partial_2 E_1) - \partial_2\phi_A, \quad (\text{V.76c})$$

$$B_2 = (-\Delta_\perp)^{-1} \star (\partial_3 E_1 - \alpha\partial_2 C_1) - \partial_2\phi_B, \quad (\text{V.76d})$$

$$A_3 = (-\Delta_\perp)^{-1} \star (-\alpha\partial_3 E_1 + \partial_2 C_1) - \partial_3\phi_A, \quad (\text{V.76e})$$

$$B_3 = -(-\Delta_\perp)^{-1} \star (\alpha\partial_3 C_1 + \partial_2 E_1) - \partial_3\phi_B, \quad (\text{V.76f})$$

które pozwolą na otrzymanie funkcji Wightmana dla wyjściowych potencjałów.

Diagonalne funkcje Wightmana

Diagonalnymi funkcjami Wightmana nazywam funkcje wyznaczone dla potencjałów tego samego typu, tzn. $\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$ i $\langle 0|B_\mu(x)B_\nu(y)|0\rangle$. Znając wyrażenia V.76, komutatory i funkcje Wightmana dla modów kowariantnych i niekowariantnych, możemy wyznaczyć funkcje Wightmana dla swobodnych pól \mathbf{A}

$$\langle 0|A_3(x)A_3(0)|0\rangle = D_+(x), \quad \langle 0|A_1(x)A_1(0)|0\rangle = D_+(x) + 2\alpha\partial_1 G_+(x), \quad (\text{V.77a})$$

$$\langle 0|A_2(x)A_2(0)|0\rangle = D_+(x), \quad \langle 0|A_1(x)A_2(0)|0\rangle = \alpha\partial_2 G_+(x), \quad (\text{V.77b})$$

$$\langle 0|A_3(x)A_2(0)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|A_1(x)A_3(0)|0\rangle = \alpha\partial_3 G_+(x) \quad (\text{V.77c})$$

Po prawej stronie powyższych równań pojawia się poniownie funkcja $D_+(x)$, a także funkcja $G_+(x)$ zdefiniowana następująco

$$G_+(x) := i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\perp^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \frac{|\mathbf{k}| + \alpha k_1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik\cdot x} - \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}} \right], \quad (\text{V.78})$$

gdzie $\bar{k}\cdot\bar{x} = k_\perp\cdot x_\perp + k_1(x^0 + \alpha x^1)$. Własności obu funkcji przedstawione są w Dodatku C.

Ponieważ wybrany warunek cechowania $A_0 = \alpha A_1$, $B_0 = \alpha B_1$ wiąże dwie składowe potencjałów, stąd znając powyższe funkcje Wightmana wyznaczamy brakujące niezerowe

funkcje dla zerowej składowej potencjału A_μ

$$\langle 0|A_0(x)A_1(0)|0\rangle = \alpha\langle 0|A_1(x)A_1(0)|0\rangle = \alpha D_+(x) + 2\partial_1 G_+(x), \quad (\text{V.79a})$$

$$\langle 0|A_0(x)A_0(0)|0\rangle = \langle 0|A_1(x)A_1(0)|0\rangle = D_+(x) + 2\alpha\partial_1 G_+(x), \quad (\text{V.79b})$$

$$\langle 0|A_0(x)A_2(0)|0\rangle = \alpha\langle 0|A_1(x)A_2(0)|0\rangle = \partial_2 G_+(x), \quad (\text{V.79c})$$

$$\langle 0|A_0(x)A_3(0)|0\rangle = \alpha\langle 0|A_1(x)A_3(0)|0\rangle = \partial_3 G_+(x). \quad (\text{V.79d})$$

Znalezione w ten sposób funkcje Wightmana można ogólnie zapisać w zwartej formie

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_+(x) + (n_\mu^{LC}\partial_\nu + n_\nu^{LC}\partial_\mu)G_+(x), \quad (\text{V.80})$$

gdzie wprowadziliśmy czterowektor $n_\mu^{LC} = (1, \alpha, 0, 0)$ oraz wykorzystaliśmy relację $(\partial_0 - \alpha\partial_1)G_+(x) = D_+(x)$, która wynika bezpośrednio z definicji (E.4a) i (E.4b).

Funkcja Wightmana $\langle 0|B_\mu(x)B_\nu(y)|0\rangle$ została wyznaczona bezpośrednim rachunkiem, ale zamiast przeprowadzania żmudnych obliczeń można zastosować transformację dualności elektromagnetycznej (I.16), która prowadzi do równości $\langle 0|B_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle = \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle$. Możemy zatem od razu wypisać postać funkcji Wightmana dla potencjałów B_μ

$$\langle 0|B_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle = -g_{\mu\nu}D_+(x) + (n_\mu^{LC}\partial_\nu + n_\nu^{LC}\partial_\mu)G_+(x). \quad (\text{V.81})$$

Mieszane funkcje Wightmana $\langle 0|A_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle$ i $\langle 0|B_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle$

Nieznikające mieszane funkcje Wightmana dla pól A_μ i B_ν dają się zapisać w postaci

$$\langle 0|B_3(x)A_2(0)|0\rangle = -\langle 0|A_3(x)B_2(0)|0\rangle = \alpha D_+(x), \quad (\text{V.82a})$$

$$\langle 0|B_1(x)A_2(0)|0\rangle = -\langle 0|A_1(x)B_2(0)|0\rangle = g_+(x) + \partial_3 G_+(x), \quad (\text{V.82b})$$

$$\langle 0|B_1(x)A_3(0)|0\rangle = -\langle 0|A_1(x)B_3(0)|0\rangle = -\partial_2 G_+(x), \quad (\text{V.82c})$$

gdzie wykorzystaliśmy definicje funkcji $D_+(x)$ (E.4a) i $G_+(x)$ (E.4b), zaś pojawiająca się po raz pierwszy funkcja $g_+(x)$ jest zdefiniowana następująco

$$g_+(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{[k_3]} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} e^{-i\bar{k}\cdot\bar{x}}. \quad (\text{V.83})$$

Ponieważ mamy warunek cechowania $A_0 = \alpha A_1$ $B_0 = \alpha B_1$, więc możemy łatwo wyznaczyć nieznikające funkcje Wightmana dla składowych A_0 i B_0

$$\langle 0|A_0(x)B_2(0)|0\rangle = \alpha\langle 0|A_1(x)B_2(0)|0\rangle = -\alpha(g_+(x) + \partial_3 G_+(x)), \quad (\text{V.84a})$$

$$\langle 0|A_0(x)B_3(0)|0\rangle = \alpha\langle 0|A_1(x)B_3(0)|0\rangle = \alpha\partial_2 G_+(x), \quad (\text{V.84b})$$

$$\langle 0|B_0(x)A_2(0)|0\rangle = \alpha\langle 0|B_1(x)A_2(0)|0\rangle = \alpha g_+(x) + \alpha\partial_3 G_+(x), \quad (\text{V.84c})$$

$$\langle 0|B_0(x)A_3(0)|0\rangle = \alpha\langle 0|B_1(x)A_3(0)|0\rangle = -\alpha\partial_2 G_+(x). \quad (\text{V.84d})$$

Stąd wszystkie mieszane funkcje Wightmana dla potencjałów A_μ i B_ν możemy zapisać ogólnym wzorem

$$\langle 0|A_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle = -\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (n^{LC})^\lambda \partial^\rho G_+(x) - \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (n^{LC})^\lambda n^\rho g_+(x), \quad (\text{V.85a})$$

$$\langle 0|B_\mu(x)A_\nu(0)|0\rangle = +\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (n^{LC})^\lambda \partial^\rho G_+(x) + \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (n^{LC})^\lambda n^\rho g_+(x), \quad (\text{V.85b})$$

gdzie 4-wektory $n_\mu^{LC} = (1, \alpha, 0, 0)$ i $n_\mu = (0, 0, 0, 1)$, a całkowiec antysymetryczny tensor, tak jak wcześniej, unormowany jest przez warunek $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1$.

5.2.3. Równoważność rozwiązań

Uzyskane w wyniku kanonicznego kwantowania mieszane funkcje Wightmana w cechowaniu dLC₁ porównamy z rozwiązaniami równania (IV.37). Oczywiście funkcje Wightmana uzyskane tymi niezależnymi drogami powinny być równoważne. Warunek takiej równoważności jest następujący

$$\langle 0|A_\mu(x) B_\nu(0)|0\rangle_{LC_1} = \langle 0|A_\mu(x) B_\nu(0)|0\rangle_{Coul} + \partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu, \quad (V.86)$$

przy czym pojawiające się funkcje Ψ_μ zależą od wyboru warunku cechowania. Otrzymujemy następujący układ równań

$$\partial_3 \Psi_2 - \partial_2 \Psi_3 = -\alpha D_+(x) - \partial_1 \partial_0 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (V.87a)$$

$$\partial_1 \Psi_2 - \partial_2 \Psi_1 = -g_+(x) - \partial_3 G_+(x) + \partial_3 \partial_0 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (V.87b)$$

$$\partial_1 \Psi_3 - \partial_3 \Psi_1 = \partial_2 G_+(x) - \partial_2 \partial_0 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (V.87c)$$

$$\partial_0 \Psi_2 - \partial_2 \Psi_0 = -\alpha g_+(x) - \alpha \partial_3 G_+(x), \quad (V.87d)$$

$$\partial_0 \Psi_3 - \partial_3 \Psi_0 = \alpha \partial_2 G_+(x), \quad (V.87e)$$

$$\partial_0 \Psi_1 = \partial_1 \Psi_0. \quad (V.87f)$$

Aby go rozwiązać działam pochodną $(\partial_0 - \alpha \partial_1)$ na obie strony równań i definiuję nowe zmienne $\chi_\mu = (\partial_0 - \alpha \partial_1) \Psi_\mu$, dla których mamy następujący układ równań

$$\partial_3 \chi_2 - \partial_2 \chi_3 = -\alpha \partial_0 (\partial_2^2 + \partial_3^2) \Delta^{-1} \star D_+, \quad (V.88a)$$

$$\partial_1 \chi_2 - \partial_2 \chi_1 = -\alpha \partial_0 \partial_1 \partial_3 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (V.88b)$$

$$\partial_1 \chi_3 - \partial_3 \chi_1 = \alpha \partial_0 \partial_1 \partial_2 \Delta^{-1} \star D_+, \quad (V.88c)$$

$$\partial_0 \chi_2 - \partial_2 \chi_0 = -\alpha \partial_3 D_+(x), \quad (V.88d)$$

$$\partial_0 \chi_3 - \partial_3 \chi_0 = \alpha \partial_2 D_+(x), \quad (V.88e)$$

$$\partial_0 \chi_1 = \partial_1 \chi_0. \quad (V.88f)$$

Łatwo znaleźć rozwiązania tego układu równań, są to $\chi_2 = -\alpha \partial_0 \partial_3 \Delta^{-1} \star D_+(x)$, $\chi_3 = \alpha \partial_0 \partial_2 \Delta^{-1} \star D_+(x)$, $\chi_0 = \chi_1 = 0$. Możemy teraz wrócić do poszukiwanych funkcji Ψ_μ , które wyglądają następująco

$$\Psi_0 = \Psi_1 = 0, \quad (V.89a)$$

$$\Psi_2 = -\alpha \partial_0 \partial_3 \Delta^{-1} \star G_+(x) \quad (V.89b)$$

$$\Psi_3 = \alpha \partial_0 \partial_2 \Delta^{-1} \star G_+(x). \quad (V.89c)$$

Dla funkcji danych powyższym wzorem rozwiązanie uzyskane na drodze kanonicznego kwantowania w cechowaniu dLC₁ i rozwiązanie (IV.46) są równoważne.

5.3. Cechowanie dLC₃

Warunek cechowania dLC₃ narzucony na potencjały $A_0 - \alpha A_3 = 0$ i $B_0 - \alpha B_3 = 0$, gdzie $\alpha = \pm 1$, wprowadza do opisu dodatkowy wektor zerowy $N^\mu = (1, 0, 0, -\alpha)$. Możemy użyć warunku cechowania, aby usunąć składowe A_0 i B_0 z gęstości lagrangianu Zwanzigera (III.5). Uzyskujemy więc wyrażenie zawierające składowe A_3 , B_3 oraz A_i , B_i potencjałów cechowania, gdzie $i \in \{1, 2\}$. Gęstość lagrangianu dana wzorem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Zw}^{dLC_3} &= \frac{1}{2} [(\partial_0 - \alpha \partial_3) A_3]^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 - A_3 (J^3 + \alpha J^0) - A_i J^i \\ &+ \frac{1}{2} [(\partial_0 - \alpha \partial_3) B_3]^2 - \frac{1}{2} (\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 - B_3 (K^3 + \alpha K^0) - B_i K^i \\ &- \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_0 A_i - \alpha \partial_i A_3) (\partial_3 B_j - \partial_j B_3) + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j (\partial_0 - \alpha \partial_3) B_3 \\ &+ \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_0 B_i - \alpha \partial_i B_3) (\partial_3 A_j - \partial_j A_3) - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j (\partial_0 - \alpha \partial_3) A_3. \end{aligned} \quad (V.90)$$

jest punktem wyjściowym procedury kwantowania kanonicznego w tym cechowaniu.

5.3.1. Procedura kanoniczna

Tak zdefiniowana gęstość lagrangianu prowadzi do następujących równań Eulera-Lagrange'a

$$[(\partial_0 - \alpha \partial_3)^2 - \Delta_\perp] A_3 + \partial_3 (\partial_i A_i + \alpha \epsilon_{ij} \partial_i B_j) = -J^3 - \alpha J^0, \quad (V.91a)$$

$$\partial_3 (\partial_3 A_i - \partial_i A_3) + \epsilon_{ij} \partial_3 (\partial_0 B_j - \alpha \partial_j B_3) = J^i, \quad (V.91b)$$

$$[(\partial_0 - \alpha \partial_3)^2 - \Delta_\perp] B_3 + \partial_3 (\partial_i B_i - \alpha \epsilon_{ij} \partial_i A_j) = -K^3 - \alpha K^0, \quad (V.91c)$$

$$\partial_3 (\partial_3 B_i - \partial_i B_3) - \epsilon_{ij} \partial_3 (\partial_0 A_j - \alpha \partial_j A_3) = K^i, \quad (V.91d)$$

zaś kanoniczne sprzężone pędy wynoszą

$$\pi_A^3 = (\partial_0 - \alpha \partial_3) A_3 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j, \quad \pi_B^3 = (\partial_0 - \alpha \partial_3) B_3 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j, \quad (V.92a)$$

$$\pi_A^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_3 B_j - \partial_j B_3), \quad \pi_B^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_3 A_j - \partial_j A_3). \quad (V.92b)$$

Z powyższych równań tylko $\partial_0 A_3$ i $\partial_0 B_3$ możemy wyrazić jako funkcję pól i pędów kanonicznych

$$\partial_0 A_3 = \pi_A^3 + \alpha \partial_3 A_3 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j, \quad \partial_0 B_3 = \pi_B^3 + \alpha \partial_3 B_3 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j, \quad (V.93)$$

a pozostałe równania definiują więzy układu

$$\varphi_1 = \pi_A^i + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_3 B_j - \partial_j B_3) \simeq 0, \quad (V.94a)$$

$$\varphi_2 = \pi_B^i - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} (\partial_3 A_j - \partial_j A_3) \simeq 0. \quad (V.94b)$$

są to więzy pierwotne drugiego rodzaju i jak łatwo zauważyć $\{\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(0)\} = \epsilon_{ij} \partial_3 \delta^3(\mathbf{x})$. Gęstość hamiltonianu uzyskujemy z gęstości lagrangianu przy użyciu transformacji Legen-

dre'a

$$\mathcal{H}_{can}^{dLC_3} = \pi_A^i \partial_0 A_i + \pi_B^i \partial_0 B_i + \pi_A^3 \partial_0 A_3 + \pi_B^3 \partial_0 B_3 - \mathcal{L}_{Zw}^{dLC_3}, \quad (V.95)$$

co w efekcie prowadzi do następującego wyrażenia na gęstość hamiltonianu w cechowaniu dLC₃

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can}^{dLC_3} &= \frac{1}{2} \left(\pi_A^3 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j \right)^2 + \left(\pi_A^3 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j \right) \alpha \partial_3 A_3 + \frac{1}{2} (\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \left(\pi_B^3 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j \right)^2 + \left(\pi_B^3 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j \right) \alpha \partial_3 B_3 + \frac{1}{2} (\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 \\ &+ A_3 (J^3 + \alpha J^0) + A_i J^i + B_3 (K^3 + \alpha K^0) + B_i K^i. \end{aligned} \quad (V.96)$$

Tak jak we wcześniejszych cechowaniach, pomijamy w tym wyrażeniu człony będące zupełną pochodną, gdyż nie dają one wkładu do hamiltonianu. Wprowadzenie nowych pól

$$\Pi_A^3 := \pi_A^3 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i B_j, \quad \Pi_B^3 := \pi_B^3 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_i A_j, \quad (V.97)$$

pozwała na zapisanie równań ruchu w postaci równań pierwszego rzędu w pochodnych czasowych

$$\partial_0 A_3 = \Pi_A^3 + \alpha \partial_3 A_3, \quad \partial_0 B_3 = \Pi_B^3 + \alpha \partial_3 B_3, \quad (V.98a)$$

$$\partial_0 \Pi_A^3 = \alpha \partial_3 \Pi_A^3 + \Delta_\perp A_3 - \partial_3 (\partial_i A_i + \alpha \epsilon_{ij} \partial_i B_j) - J^3 - \alpha J^0, \quad (V.98b)$$

$$\partial_0 \Pi_B^3 = \alpha \partial_3 \Pi_B^3 + \Delta_\perp B_3 - \partial_3 (\partial_i B_i - \alpha \epsilon_{ij} \partial_i A_j) - K^3 - \alpha K^0, \quad (V.98c)$$

$$\partial_0 \partial_3 B_i = \alpha \partial_3 \partial_i B_3 + \epsilon_{ij} \partial_3 (\partial_3 A_j - \partial_j A_3) - \epsilon_{ij} J^j, \quad (V.98d)$$

$$\partial_0 \partial_3 A_i = \alpha \partial_3 \partial_i A_3 - \epsilon_{ij} \partial_3 (\partial_3 B_j - \partial_j B_3) + \epsilon_{ij} K^j, \quad (V.98e)$$

co z kolei umożliwia skorzystanie z procedury Faddeeva-Jackiwa kwantowania układów z więzami. Gęstość hamiltonianu zapisana w nowych zmiennych wygląda następująco

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can}^{dLC_3} &= \frac{1}{2} (\Pi_A^3)^2 + (\Pi_A^3 - \epsilon_{ij} \partial_i B_j) \alpha \partial_3 A_3 + \frac{1}{2} (\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 \\ &+ \frac{1}{2} (\Pi_B^3)^2 + (\Pi_B^3 + \epsilon_{ij} \partial_i A_j) \alpha \partial_3 B_3 + \frac{1}{2} (\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 \\ &+ A_3 (J^3 + \alpha J^0) + A_i J^i + B_3 (K^3 + \alpha K^0) + B_i K^i. \end{aligned} \quad (V.99)$$

Nieznikającymi nawiasami Diraca są więc

$$\{A_3(\mathbf{x}), \Pi_A^3(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\partial_3 A_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\}_D = \epsilon_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (V.100a)$$

$$\{B_3(\mathbf{x}), \Pi_B^3(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\partial_3 B_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})\}_D = -\epsilon_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (V.100b)$$

zaś komutatory wynoszą odpowiednio

$$[A_3(\mathbf{x}), \Pi_A^3(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [B_3(\mathbf{x}), \Pi_B^3(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (V.101a)$$

$$[A_3(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})] = i\epsilon_{ij} \frac{1}{2} \text{sgn}(x^3 - y^3) \delta^2(x_\perp - y_\perp). \quad (V.101b)$$

Musimy teraz znaleźć w naszym układzie pola, które będą albo modami kowariantnymi albo niekowariantnymi. W tym celu przeddefiniujemy pola. Możemy nowe pola wyrazić jako następujące kombinacje

$$\mathcal{A}_i := \frac{1}{2} (A_i + \alpha \epsilon_{ij} B_j), \quad \mathcal{B}_i := \frac{1}{2} (B_i + \alpha \epsilon_{ij} A_j), \quad (\text{V.102})$$

które pod działaniem transformacji dualności elektromagnetycznej transformują się w następujący sposób $\mathcal{A}_i \mapsto -\alpha \epsilon_{ij} \mathcal{A}_j$, $\mathcal{B}_i \mapsto \alpha \epsilon_{ij} \mathcal{B}_j$. Nieznikające nawiasy Diraca tych pól są dane przez

$$\{\partial_3 \mathcal{A}_i(\mathbf{x}), \mathcal{A}_j(\mathbf{y})\}_D = -\{\partial_3 \mathcal{B}_i(\mathbf{x}), \mathcal{B}_j(\mathbf{y})\}_D = \frac{\alpha}{2} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.103a})$$

a równania ruchu zapisują się teraz jako

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) A_3 = \Pi_A^3, \quad (\partial_0 - \alpha \partial_3) B_3 = \Pi_B^3, \quad (\text{V.104a})$$

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \Pi_A^3 = \Delta_{\perp} A_3 - 2\partial_3 \partial_i \mathcal{A}_i - J^3 - \alpha J^0, \quad (\text{V.104b})$$

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \Pi_B^3 = \Delta_{\perp} B_3 + 2\partial_3 \alpha \epsilon_{ij} \partial_i \mathcal{A}_j - K^3 - \alpha K^0, \quad (\text{V.104c})$$

$$(\partial_0 + \alpha \partial_3) \partial_3 \mathcal{A}_i = +\epsilon_{ij} \partial_j \partial_3 B_3 + \alpha \partial_i \partial_3 A_3 + \frac{1}{2} (\alpha J^i + \epsilon_{ij} K^j), \quad (\text{V.104d})$$

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \partial_3 \mathcal{B}_i = -\frac{1}{2} (\alpha K^i + \epsilon_{ij} J^j). \quad (\text{V.104e})$$

Następnie definiujemy dwa nowe pola $\Lambda := \partial_i \mathcal{A}_i - \alpha \Pi_A^3$, $\tilde{\Lambda} := -\alpha \epsilon_{ij} \partial_i \mathcal{A}_j - \alpha \Pi_B^3$, które pod działaniem transformacji dualności elektromagnetycznej przechodzą w siebie $\Lambda \mapsto \tilde{\Lambda} \mapsto -\Lambda$. Ostatecznie definiujemy dwa kolejne pola $\mathcal{A}_3 := A_3 - 2\partial_3 \Delta_{\perp}^{-1} \Lambda$, $\mathcal{B}_3 := B_3 - 2\partial_3 \Delta_{\perp}^{-1} \tilde{\Lambda}$ z transformacją dualności elektromagnetycznej $\mathcal{A}_3 \mapsto \mathcal{B}_3 \mapsto -\mathcal{A}_3$. Efektywnie mamy więc cztery mody kowariantne $\mathcal{A}_3, \mathcal{B}_3, \pi_A^3, \pi_B^3$ z równaniami ruchu

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \mathcal{A}_3 = \Pi_A^3 - \Delta_{\perp}^{-1} [2\partial_3 (\alpha J^3 + J^0) + \partial_i (\alpha J^i + \epsilon_{ij} K^j)], \quad (\text{V.105a})$$

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \mathcal{B}_3 = \Pi_B^3 - \Delta_{\perp}^{-1} [2\partial_3 (\alpha K^3 + K^0) + \partial_i (\alpha K^i - \epsilon_{ij} J^j)], \quad (\text{V.105b})$$

$$(\partial_0 + \alpha \partial_3) \Pi_A^3 = \Delta_{\perp} \mathcal{A}_3 - J^3 - \alpha J^0, \quad (\text{V.105c})$$

$$(\partial_0 + \alpha \partial_3) \Pi_B^3 = \Delta_{\perp} \mathcal{B}_3 - K^3 - \alpha K^0, \quad (\text{V.105d})$$

i cztery mody niekowariantne $\mathcal{B}_i, \Lambda, \tilde{\Lambda}$ z równaniami

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \partial_3 \mathcal{B}_i = -\frac{1}{2} (\alpha K^i + \epsilon_{ij} J^j), \quad (\text{V.106a})$$

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \partial_3 \Lambda = \partial_3 (\alpha J^3 + J^0) + \frac{1}{2} \partial_i (\alpha J^i + \epsilon_{ij} K^j), \quad (\text{V.106b})$$

$$(\partial_0 - \alpha \partial_3) \partial_3 \tilde{\Lambda} = \partial_3 (\alpha K^3 + K^0) + \frac{1}{2} \partial_i (\alpha K^i - \epsilon_{ij} J^j), \quad (\text{V.106c})$$

dla których mamy następujące komutatory

$$[\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \mathcal{A}_3(\mathbf{y})] = [\mathcal{B}_3(\mathbf{x}), \mathcal{B}_3(\mathbf{y})] = -2i\alpha\partial_3^x \Delta_\perp^{-1} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.107a})$$

$$[\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \Pi_A^3(\mathbf{y})] = [\mathcal{B}_3(\mathbf{x}), \Pi_B^3(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.107b})$$

$$[\partial_3 \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}), \tilde{\Lambda}(\mathbf{y})] = [\partial_3 \Lambda(\mathbf{x}), \Lambda(\mathbf{y})] = -\frac{i\alpha}{2} \Delta_\perp \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.107c})$$

$$[\partial_3 \mathcal{B}_i(\mathbf{x}), \mathcal{B}_j(\mathbf{y})] = -i\frac{\alpha}{2} \Delta_\perp \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{V.107d})$$

Pozostałe komutatory się zerują. Szczegóły rachunku prowadzącego do powyższych wzorów znajdują się w dodatku (E.2). Aby równania były jak najprostsze, wprowadzam nowe pola $\Phi = \Lambda + \alpha\epsilon_{ij}\partial_3\partial_i\mathcal{B}_j$ i $\tilde{\Phi} = \tilde{\Lambda} - \partial_3\partial_i\mathcal{B}_i$, bo to prowadzi do

$$(\partial_0 - \alpha\partial_3) \Phi = (\partial_0 - \alpha\partial_3) \tilde{\Phi} = 0, \quad (\text{V.108a})$$

$$(\partial_0 - \alpha\partial_3) \partial_3 \mathcal{B}_i = -\frac{1}{2} (\alpha K^i + \epsilon_{ij} J^j). \quad (\text{V.108b})$$

Pole \mathcal{B}_i pozostaje bez zmian, z równaniem ruchu danym przez (V.106a). Część modów kowariantnych możemy przededefiniować dołączając ładunki elektryczne i magnetyczne $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3 - \alpha\Delta_\perp^{-1} J^0$, $\mathcal{C}_3 = \mathcal{B}_3 - \alpha\Delta_\perp^{-1} K^0$. To prowadzi do następujących równań

$$(\partial_0 - \alpha\partial_3) \Pi_A^3 = \Delta_\perp \mathcal{A}_3 - J^3, \quad (\partial_0 - \alpha\partial_3) \Pi_B^3 = \Delta_\perp \mathcal{C}_3 - K^3, \quad (\text{V.109a})$$

$$(\partial_0 - \alpha\partial_3) \mathcal{A}_3 = \Pi_A^3 - \Delta_\perp^{-1} (\partial_3(\alpha J^3 + J^0) + \epsilon_{ij}\partial_i K^j), \quad (\text{V.109b})$$

$$(\partial_0 - \alpha\partial_3) \mathcal{C}_3 = \Pi_B^3 - \Delta_\perp^{-1} (\partial_3(\alpha K^3 + K^0) - \epsilon_{ij}\partial_i J^j). \quad (\text{V.109c})$$

Z komutatorów dla modów kowariantnych i niekowariantnych (V.107) znajduję nieznikające komutatory dla nowo zdefiniowanych pól

$$[\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \mathcal{A}_3(\mathbf{y})] = [\mathcal{C}_3(\mathbf{x}), \mathcal{C}_3(\mathbf{y})] = -2i\alpha\partial_3^x \Delta_\perp^{-1} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.110a})$$

$$[\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \pi_A^3(\mathbf{y})] = [\mathcal{C}_3(\mathbf{x}), \pi_B^3(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.110b})$$

$$[\partial_3 \mathcal{B}_i(\mathbf{x}), \mathcal{B}_j(\mathbf{y})] = -i\frac{\alpha}{2} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.110c})$$

$$[\Phi(\mathbf{x}), \mathcal{B}_i(\mathbf{y})] = \frac{i}{2} \epsilon_{ij} \partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.110d})$$

$$[\tilde{\Phi}(\mathbf{x}), \mathcal{B}_i(\mathbf{y})] = i\frac{\alpha}{2} \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{V.110e})$$

a następnie, korzystając z metody opisanej dla poprzednich cechowań, rozkładam pola na operatory kreacji i anihilacji oraz znajduję funkcje Wightmana dla modów.

5.3.2. Funkcje Wightmana

Niezerowe komutatory dla operatorów kreacji i anihilacji pól kowariantnych

$$\left[a_3(\mathbf{k}), a_3^\dagger(\mathbf{p}) \right] = \left[c_3(\mathbf{k}), c_3^\dagger(\mathbf{p}) \right] = (2\pi)^3 \frac{2|\mathbf{k}|k_3}{k_\perp^2} (|\mathbf{k}| - \alpha k_3)^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (\text{V.111a})$$

$$\left[a_3(\mathbf{k}), p_3^{A\dagger}(\mathbf{p}) \right] = \left[c_3(\mathbf{k}), p_3^{C\dagger}(\mathbf{p}) \right] = i(2\pi)^3 (2|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}| - \alpha k_3)) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (\text{V.111b})$$

$$\left[p_3^A(\mathbf{k}), p_3^{A\dagger}(\mathbf{p}) \right] = \left[p_3^C(\mathbf{k}), p_3^{C\dagger}(\mathbf{p}) \right] = i(2\pi)^3 2|\mathbf{k}|k_\perp^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (\text{V.111c})$$

prowadzą do następujących niezerowych funkcji Wightmana

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{A}_3(x) \mathcal{A}_3(0) | 0 \rangle &= \langle 0 | \mathcal{C}_3(x) \mathcal{C}_3(0) | 0 \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(2 \frac{k_3}{k_\perp^2} (k_3 - \alpha|\mathbf{k}|) + 1 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0}, \end{aligned} \quad (\text{V.112a})$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{A}_3(0) \Pi_A^3(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \mathcal{C}_3(0) \Pi_B^3(y) | 0 \rangle = \\ &= i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} (|\mathbf{k}| - \alpha k_3) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0}, \end{aligned} \quad (\text{V.112b})$$

$$\langle 0 | \Pi_A^3(x) \Pi_A^3(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \Pi_B^3(x) \Pi_B^3(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k_\perp^2}{2|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} \quad (\text{V.112c})$$

Dla pól \mathcal{B}_i , Φ oraz $\tilde{\Phi}$ mamy następujące relacje komutacyjne na operatory kreacji i anihilacji

$$\left[c_i(\mathbf{k}), c_j^\dagger(\mathbf{p}) \right] = \frac{\alpha}{2k_3} \delta_{ij} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (\text{V.113a})$$

$$\left[\varphi(\mathbf{k}), c_i^\dagger(\mathbf{p}) \right] = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} k_j (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (\text{V.113b})$$

$$\left[\tilde{\varphi}(\mathbf{k}), c_i^\dagger(\mathbf{p}) \right] = \frac{\alpha}{2} k_i (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (\text{V.113c})$$

i wynikające z nich niezerowe funkcje Wightmana

$$\langle 0 | \mathcal{B}_i(x) \mathcal{B}_j(0) | 0 \rangle = \frac{\alpha}{2} \delta_{ij} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{k_3} e^{-ik_\perp x_\perp} e^{-ik_3 x^3} e^{-i\alpha k_3 x^0}, \quad (\text{V.114a})$$

$$\langle 0 | \Phi(x) \mathcal{B}_i(0) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_3}{2\pi} k_j e^{-ik_\perp x_\perp} e^{-ik_3 x^3} e^{-i\alpha k_3 x^0}, \quad (\text{V.114b})$$

$$\langle 0 | \tilde{\Phi}(x) \mathcal{B}_i(0) | 0 \rangle = \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_3}{2\pi} k_i e^{-ik_\perp x_\perp} e^{-ik_3 x^3} e^{-i\alpha k_3 x^0}, \quad (\text{V.114c})$$

Pamiętając o związkach łączących nowo wprowadzone pola z polami wyjściowymi

$$A_3 = \mathcal{A}_3 + 2\Delta_\perp^{-1}(\Phi - \alpha\epsilon_{ij}\partial_3\partial_i\mathcal{B}_j), \quad (\text{V.115a})$$

$$B_3 = \mathcal{C}_3 + 2\Delta_\perp^{-1}(\tilde{\Phi} + \partial_3\partial_i\mathcal{B}_i), \quad (\text{V.115b})$$

$$A_i = \partial_i\Delta_\perp^{-1}(\partial_3^{-1}\Phi + \alpha\Pi_A^3) + \epsilon_{ij}\partial_j\Delta_\perp^{-1}(\alpha\partial_3^{-1}\tilde{\Phi} + \Pi_B^3), \quad (\text{V.115c})$$

$$B_i = \partial_i\Delta_\perp^{-1}(2\partial_j\mathcal{B}_j + \partial_3^{-1}\tilde{\Phi} + \alpha\Pi_B^3) - \epsilon_{ij}\partial_j\Delta_\perp^{-1}(\alpha\partial_3^{-1}\Phi + \Pi_A^3). \quad (\text{V.115d})$$

możemy wyznaczyć funkcje Wightmana dla potencjałów cechowania, np.

$$\begin{aligned} \langle 0|A_3(x)A_3(0)|0\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(2\frac{k_3}{k_\perp^2} (k_3 - \alpha|\mathbf{k}|) + 1 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} + \\ &- 2\alpha \int \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_3}{2\pi} \frac{k_3}{k_\perp^2} e^{-ik_\perp x_\perp} e^{-ik_3 x^3} e^{-i\alpha k_3 x^0}. \end{aligned} \quad (\text{V.116})$$

Jeśli wprowadzimy zdefiniowaną wcześniej funkcję $D_+(x)$ oraz

$$f_+(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_3}{2\pi} e^{-ik_\perp x_\perp + k_3(x^3 + \alpha x^0)} \quad (\text{V.117})$$

możemy uzyskane wyniki zapisać w zwartej formie i ostatecznie otrzymujemy następujące nieznikające funkcje Wightmana dla pól A_μ i B_μ

$$\begin{aligned} \langle 0|A_3(x)A_3(0)|0\rangle &= -2\alpha\partial_3(\partial_0 + \alpha\partial_3)\Delta_\perp^{-1} \star D_+(x) - D_+(x) + \\ &+ 2i\alpha\partial_3\Delta_\perp^{-1} \star f_+(x), \end{aligned} \quad (\text{V.118a})$$

$$\langle 0|A_3(x)A_i(0)|0\rangle = -\alpha\partial_i(\partial_0 + \alpha\partial_3)\Delta_\perp^{-1} \star D_+(x) + i\alpha\partial_i\Delta_\perp^{-1} \star f_+(x), \quad (\text{V.118b})$$

$$\langle 0|A_i(x)A_j(0)|0\rangle = -\delta_{ij}D_+(x), \quad (\text{V.118c})$$

$$\langle 0|A_3(x)B_i(0)|0\rangle = \epsilon_{ij}\partial_j(\partial_0 + \alpha\partial_3)\Delta_\perp^{-1} \star D_+(x) - i\epsilon_{ij}\partial_j\Delta_\perp^{-1} \star f_+(x), \quad (\text{V.118d})$$

$$\langle 0|A_i(x)B_j(0)|0\rangle = -\alpha\epsilon_{ij}D_+(x), \quad (\text{V.118e})$$

zaś pozostałe niezerowe funkcje Wightmana możemy odtworzyć korzystając z transformacji dualności oraz warunku cechowania $A_0 = \alpha A_3$, $B_0 = \alpha B_3$.

5.3.3. Równoważność rozwiązań

Mieszane funkcje Wightmana w cechowaniu dLC₃ otrzymane na drodze kwantowania kanonicznego porównamy z rozwiązaniami równania (IV.37). Oczywiście uzyskane funkcje Wightmana być równoważne, przy czym warunek równoważności jest następujący

$$\langle 0|A_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle_{LC_3} = \langle 0|A_\mu(x)B_\nu(0)|0\rangle_{Coul} + \partial_\mu\Psi_\nu - \partial_\nu\Psi_\mu, \quad (\text{V.119})$$

przy czym pojawiające się funkcje Ψ_μ zależą od wyboru warunku cechowania. Otrzymujemy następujący układ równań

$$\partial_1\Psi_2 - \partial_2\Psi_1 = \partial_3\partial_0\Delta^{-1} \star D_+(x) - \alpha D_+(x), \quad (\text{V.120a})$$

$$\partial_1\Psi_3 - \partial_3\Psi_1 = -(\partial_2\partial_0\Delta^{-1} + \partial_2(\partial_0 + \alpha\partial_3)\Delta_\perp^{-1}) \star D_+(x) + i\alpha\partial_1\Delta_\perp^{-1} f_+(x), \quad (\text{V.120b})$$

$$\partial_2\Psi_3 - \partial_3\Psi_2 = (\partial_1\partial_0\Delta^{-1} + \partial_1(\partial_0 + \alpha\partial_3)\Delta_\perp^{-1}) \star D_+(x) + i\alpha\partial_2\Delta_\perp^{-1} f_+(x), \quad (\text{V.120c})$$

$$\partial_1\Psi_0 - \partial_0\Psi_1 = -\alpha\partial_2(\partial_0 + \alpha\partial_3)\Delta_\perp^{-1} \star D_+(x) + i\partial_1\Delta_\perp^{-1} f_+(x), \quad (\text{V.120d})$$

$$\partial_2\Psi_0 - \partial_0\Psi_2 = -\alpha\partial_1(\partial_0 + \alpha\partial_3)\Delta_\perp^{-1} \star D_+(x) + i\partial_2\Delta_\perp^{-1} f_+(x), \quad (\text{V.120e})$$

$$\partial_3\Psi_0 - \partial_0\Psi_3 = 0 \quad (\text{V.120f})$$

Kombinacja trzech ostatnich równań daje nam warunek $\Psi_0 = \partial_0 \partial_n \Delta^{-1} \Psi_n + i \Delta^{-1} f_+(x)$. Jeśli założymy, że $\partial_1 \Psi_1 + \partial_2 \Psi_2 + \partial_3 \Psi_3 = 0$ wówczas $\Psi_0 = i \Delta^{-1} f_+(x)$, zaś kombinacja równań (V.120b) i (V.120c) daje $\Psi_3 = i \alpha \Delta^{-1} f_+(x)$. W podobny sposób znajdujemy pozostałe funkcje i ostatecznie uzyskujemy

$$\Psi_0 = i \Delta^{-1} f_+(x), \tag{V.121a}$$

$$\Psi_1 = \alpha \partial_0 \partial_2 (\partial_0 + \alpha \partial_2) \Delta_{\perp}^{-1} \star D_+(x) - i \alpha \partial_1 \partial_3 \Delta_{\perp}^{-1} f_+(x), \tag{V.121b}$$

$$\Psi_2 = -\alpha \partial_0 \partial_1 (\partial_0 + \alpha \partial_2) \Delta_{\perp}^{-1} \star D_+(x) + i \alpha \partial_2 \partial_3 \Delta_{\perp}^{-1} f_+(x), \tag{V.121c}$$

$$\Psi_3 = i \alpha \Delta^{-1} f_+(x). \tag{V.121d}$$

Dla tak wyznaczonych funkcji mieszane funkcje Wightmana uzyskane w wyniku kanonicznego kwantowania w cechowaniu dLC₃ i rozwiązanie (IV.46) są równoważne.

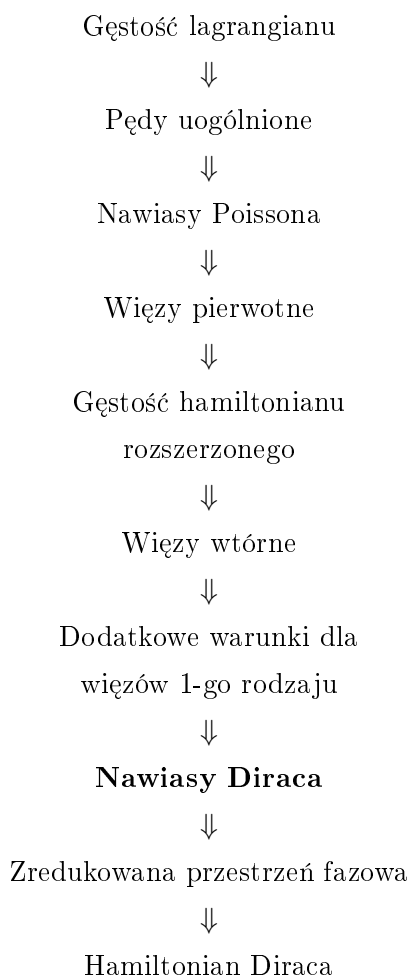
VI. Kwantowanie kanoniczne układów z więzami - procedura Diraca

Teoria pola z cechowaniem abelowym nieuchronnie prowadzi do pojawienia się więzów w procedurze kanonicznej. Jest to związane z oczywistą obserwacją, że w niezmiennicza względem cechowania gęstość lagrangianu budowana jest z członów typu $\partial_{[\mu}A_{\nu]}$ i $\partial_{[\mu}B_{\nu]}$. A to oznacza, że nie mogą pojawiać się człony zawierające ∂_0A_0 i ∂_0B_0 . To oznacza, że pędy kanonicznie π_A^0 i π_B^0 sprzężone odpowiednio do składowej potencjałów A_0 i B_0 znikają. Z drugiej strony kanoniczne nawiasy Poissona (NP) dla tych zmiennych są znikające

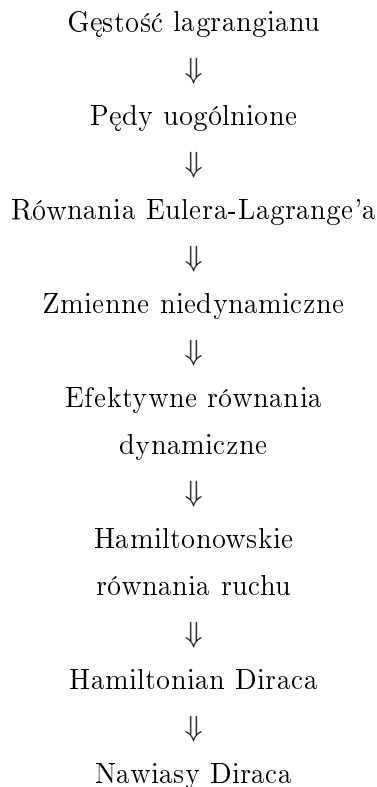
$$\{A_0(\mathbf{x}), \pi_A^0(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{B_0(\mathbf{x}), \pi_B^0(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{VI.1})$$

To oznacza konieczność zastosowania spójnej procedury kanonicznej dla układu z więzami. Możemy wybrać albo metodę **Diraca** [53] albo metodę **Faddeeva-Jackiwa** [50], [52]. Obie metody można zastosować zarówno do układów mechanicznych jak i w teorii pola. Procedura Diraca rozróżnia **więzy 1-ego rodzaju** i **więzy 2-ego rodzaju**. **Więzy 1-ego rodzaju** w teorii pola z cechowaniem pojawiają się jako konsekwencja symetrii cechowania gęstości lagrangianu. Należy dodać **dotatkowy warunek na zmienne kanoniczne** (pola i pędy kanoniczne), który będzie miał niezerowe nawiasy Poissona z więzami 1-ego rodzaju. Często taki dodatkowy warunek nosi nazwę **warunku cechowania**. Oznacza to, że metoda Diraca, która startuje z gęstości lagrangianu niezmienniczej względem transformacji cechowania pozwala na wprowadzenie jedynie niekowariantnych warunków cechowania: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{A} = 0$, natomiast kowariantny warunek cechowania $\partial_\mu A^\mu = 0$ jest bezpośrednio nieosiągalny. W zastosowaniach praktycznych często używa się całek po trajektoriach, które pozwalają wyznaczyć funkcjonal generujący funkcje Greena dla kwantowej teorii pola z cechowaniem. Takie całki po trajektoriach definiuje się dla **zredukowanej przestrzeni fazowej**, która jest ostatecznym wynikiem metody Diraca. Wykazuje się potem, że dla obiektów niezmienniczych względem cechowania można przetransformować funkcjonal generujący do cechowania kowariantnego. Sytuacja zmienia się znacząco, jeżeli wybierzemy warunek cechowania przed rozpoczęciem procedury Diraca. Możemy to uczynić **bezpośrednio**, gdy z warunku cechowania możemy wyznaczyć składową pola cechowania A_0 i B_0 , a następnie wyeliminować je z lagrangianu. To powoduje, że nie musimy już rozważać pędów kanonicznych π_A^0 i π_B^0 . Mogą się pojawiać inne więzy, ale będą one już 2-ego rodzaju. Taka sytuacja zachodzi dla cechowań rozpatrywanych w poprzednim rozdziale, gdzie używaliśmy procedury uproszczonej - metody Faddeeva-Jackiwa. Dla porównania podaję zasadnicze kroki w obu procedurach kanonicznych.

Metoda Diraca



Metoda Faddeeva-Jackiwa



Możemy również wprowadzić warunki cechowania **pośrednio** przy użyciu dodatkowych pól - mnożników Lagrange'a. Ta metoda będzie użyta w obecnym rozdziale dla cechowania kulombowskiego $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ i $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Te nowe pola mnożników Lagrange'a należy traktować jak współrzędne kanoniczne, wyznaczyć dla nich pędy sprzężone, które zazwyczaj będą zerowe. To oznacza, że taka teoria ma szerszą przestrzeń fazową, ale z większą liczbą więzów. Na zakończenie procedury Diraca, wyznaczamy zredukowaną przestrzeń fazową, która, jak się tego spodziewamy, powinna być niezależna od wyboru warunków cechowania i metody ich wprowadzenia, oraz zawierać jedynie fizyczne stopnie swobody. W przypadku elektrodynamiki kwantowej powinny to być dwa poprzeczne dynamiczne fotony oraz oddziaływanie bezpośrednie pomiędzy ładunkami i prądami.

6.1. Cechowanie Coulomba dla modelu 1-potencjałowego

Wprowadzamy warunek cechowania Coulomba $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_m A_m = 0$ do gęstości lagrangianu przez pole mnożnika Lagrange'a Λ

$$\mathcal{L}_{Coul} = \frac{1}{2}(F_{0m})^2 - \frac{1}{4}(F_{mn})^2 + A_\mu J^\mu + \Lambda \partial_m A_m, \quad (\text{VI.2})$$

gdzie $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ oraz $m, n \in \{1, 2, 3\}$. Jawna postać gęstości lagrangianu

$$\mathcal{L}_{Coul} = \frac{1}{2}(\partial_0 A_m - \partial_m A_0)^2 - \frac{1}{4}(F_{mn})^2 + A_\mu J^\mu + \Lambda \partial_m A_m, \quad (\text{VI.3})$$

umożliwia proste wyliczenie pędów kanonicznych sprzężonych do wszystkich składowych pól

$$\pi^\Lambda = \frac{\partial \mathcal{L}_{Coul}}{\partial \dot{\Lambda}} = 0, \quad \pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{Coul}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad \pi^m = \frac{\partial \mathcal{L}_{Coul}}{\partial \dot{A}_m} = \partial_0 A_m - \partial_m A_0, \quad (\text{VI.4})$$

gdzie kropka oznacza pochodną cząstkową ∂_0 . To oznacza, że układ ma **więzy pierwotne**: $\varphi^\Lambda = \pi^\Lambda \approx 0$, $\varphi^0 = \pi^0 \approx 0$. Kanoniczna gęstość hamiltonianu jest zdefiniowana przez transformację Legendre'a przy użyciu powyższych pędów kanonicznych

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can}^{coul} &= \pi^m \partial_0 A_m + \pi^0 \partial_0 A_0 + \pi^\Lambda \partial_0 \Lambda - \mathcal{L}_{Coul} = \\ &= \frac{1}{2}(\pi^m)^2 + \frac{1}{4}(F_{mn})^2 - A_0 (\partial_m \pi^m + J^0) - \Lambda \partial_m A_m - A_m J^m, \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

gdzie wykorzystaliśmy wzory definiujące pędy kanoniczne. W następnym kroku **dodajemy więzy pierwotne** $\varphi^\Lambda, \varphi^0$ do kanonicznej gęstości hamiltonianu, przez wprowadzenie **nowych mnożników Lagrange'a** u_Λ and u_0 , to prowadzi do gęstości **hamiltonianu rozszerzonego**

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{roz} &= \mathcal{H}_{can}^{coul} + u_\Lambda \varphi^\Lambda + u_0 \varphi^0 = \frac{1}{2}(\pi^m)^2 + \frac{1}{4}(F_{mn})^2 - \\ &- A_0 (\partial_m \pi^m + J^0 \Lambda) - A_m J^m - \Lambda \partial_m A_m + u_\Lambda \pi^\Lambda + u_0 \pi^0. \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

Wprowadzamy kanoniczne **nawiasy Poissona** (NP) dla wszystkich składowych pól i pędów dla ustalonego czasu t_0 i wartość tego argumentu opuszczamy w poniższych wzorach

$$\{\Lambda(\mathbf{x}), \pi^\Lambda(\mathbf{y})\}_{NP} = \{A_0(\mathbf{x}), \pi^0(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.7a})$$

$$\{A_m(\mathbf{x}), \pi^n(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta_{mn} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.7b})$$

podczas gdy pozostałe nawiasy znikają. Te nawiasy Poissona i gęstość hamiltonianu rozszerzonego będziemy wykorzystywać w równaniach ruchu Hamiltona. To pozwala wprowadzić **warunki stacjonarności na więzy pierwotne** przy pomocy równań Hamiltona

$$\chi^\Lambda(\mathbf{x}) = \dot{\varphi}^\Lambda(\mathbf{x}) = \{\Pi^\Lambda(\mathbf{x}), H^{roz}\}_{NP} = \partial_m A_m(\mathbf{x}) \approx 0, \quad (\text{VI.8a})$$

$$\chi^0(\mathbf{x}) = \dot{\varphi}^0(\mathbf{x}) = \{\pi^0(\mathbf{x}), H^{roz}\}_{NP} = \partial_m \pi^m(\mathbf{x}) + J^0(\mathbf{x}) \approx 0, \quad (\text{VI.8b})$$

gdzie $H^{roz} = \int d^3 \mathbf{y} \mathcal{H}^{roz}(\mathbf{y})$. Żądanie, aby więzy pierwotne były stałe w czasie generuje tutaj **więzy wtórne**: $\chi^\Lambda \approx 0$, $\chi^0 \approx 0$. Procedura narzucania warunku stacjonarności jest powtarzana i generuje kolejne **więzy wtórne**: η^Λ i η^0

$$\eta^\Lambda(\mathbf{x}) = \dot{\chi}^\Lambda(\mathbf{x}) = \partial_m \{A_m(\mathbf{x}), H^{roz}\}_{NP} = \partial_m \pi^m(\mathbf{x}) + \Delta A_0(\mathbf{x}) \approx 0, \quad (\text{VI.9a})$$

$$\eta^0(\mathbf{x}) = \dot{\chi}^0(\mathbf{x}) = \partial_0 J^0(\mathbf{x}) + \partial_m \{\pi^m(\mathbf{x}), H^{roz}\}_{NP} = \partial_\mu J^\mu(\mathbf{x}) - \Delta \Lambda(\mathbf{x}) \approx 0, \quad (\text{VI.9b})$$

gdzie w równaniu Hamiltona pojawia się również pochodna jawnej zależności od czasu. W tym punkcie zauważmy, że warto **przedefiniować więzy wtórne**, wprowadzając ich liniową kombinację $\tilde{\eta}^\Lambda = \eta^\Lambda - \chi^0 = \Delta A_0 - J^0 \approx 0$ i używać jej zamiast $\eta^\Lambda \approx 0$. Teraz możemy powrócić do nakładania warunków stacjonarności dla $\tilde{\eta}^\Lambda$ i η^0

$$\dot{\tilde{\eta}}^\Lambda(\mathbf{x}) = -\partial_0 J^0(\mathbf{x}) + \Delta \{A_0(\mathbf{x}), H^{roz}\}_{NP} = -\partial_0 J^0(\mathbf{x}) + \Delta u_0(\mathbf{x}) \approx 0, \quad (\text{VI.10a})$$

$$\dot{\eta}^0(\mathbf{x}) = -\partial_0 \partial_\mu J^\mu(\mathbf{x}) - \Delta \{\Lambda(\mathbf{x}), H^{roz}\}_{NP} = -\partial_0 \partial_\mu J^\mu(\mathbf{x}) - \Delta u_\Lambda(\mathbf{x}) \approx 0. \quad (\text{VI.10b})$$

Te warunki mogą być spełnione przez dobór mnożników Lagrange'a u_Λ i u_0 , stąd **nie są już one więzami wtórnymi** i proces generowania kolejnych więzów wtórnych kończy się tutaj. Mamy więc 6 więzów: 2 pierwotne i 4 wtórne, dla których wprowadzamy oznaczenia $\Phi_K \approx 0$, $K \in \{1, \dots, 6\}$, gdzie

$$\Phi_1 = \varphi^\Lambda = \pi^\Lambda \approx 0, \quad \Phi_2 = \eta^0 = \partial_\mu J^\mu - \Delta \Lambda \approx 0, \quad (\text{VI.11a})$$

$$\Phi_3 = \tilde{\eta}^\Lambda = \Delta A_0 - J^0 \approx 0, \quad \Phi_4 = \varphi^0 = \pi^0 \approx 0, \quad (\text{VI.11b})$$

$$\Phi_5 = \chi^0 = \partial_m \pi^m + J^0 \approx 0, \quad \Phi_6 = \chi^\Lambda = \partial_m A_m \approx 0. \quad (\text{VI.11c})$$

Wyliczamy **macierz nawiasów Poissona dla wszystkich więzów**, czyli $\mathcal{M}_{KL}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\Phi_K(\mathbf{x}), \Phi_L(\mathbf{y})\}_{NP}$, $K, L \in \{1, \dots, 6\}$. Następnie znajdujemy macierz do niej odwrotną $\mathcal{M}_{KL}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, którą wyznaczamy z relacji

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 z \mathcal{M}_{KL}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathcal{M}_{L'L}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 z \mathcal{M}_{KL}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mathcal{M}_{L'L}^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_{KL} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.12})$$

gdzie sumujemy po powtarzającym się indeksie L' - **konwencja sumacyjna Einsteina**. W naszym przypadku znajdujemy

$$\mathcal{M}_{KL}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} & \varphi^\Lambda & \eta^0 & \tilde{\eta}^\Lambda & \varphi^0 & \chi^0 & \chi^\Lambda \\ \varphi^\Lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\eta}^\Lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi^0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \chi^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \chi^\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.13})$$

gdzie jawnie zostały zapisane indeksy wierszy i kolumn. Macierz odwrotna ma postać

$$\mathcal{M}_{AB}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} & \varphi^\Lambda & \eta^0 & \tilde{\eta}^\Lambda & \varphi^0 & \chi^0 & \chi^\Lambda \\ \varphi^\Lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta^0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\eta}^\Lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \varphi^0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \chi^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \chi^\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.14})$$

gdzie $\Delta^{-1}(\mathbf{x}) = -1/(4\pi|\mathbf{x}|)$ jest odwrotnością operatora Laplace'a. Jeśli macierz \mathcal{M}_{AB} jest odwracalna, czyli nieosobliwa, mówimy wówczas, że wszystkie więzy Φ_A są **drugiego rodzaju**. Możemy zdefiniować **nawiasy Diraca** (ND) dla dowolnych pól ψ_a i ψ_b jako

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\}_{ND} &= \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{y})\}_{NP} - \sum_{K,L} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{w} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{z} \{\psi_\alpha(\mathbf{x}), \Phi_K(\mathbf{w})\}_{NP} \times \\ &\times \mathcal{M}_{KL}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{z}) \{\Phi_L(\mathbf{z}), \psi_\beta(\mathbf{y})\}_{NP}. \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

Ta definicja prowadzi do ogólnej własności, że nawiasy Diraca dla więzów znikają identycznie

$$\{\Phi_K(\mathbf{x}), \psi_\beta(\mathbf{y})\}_{ND} \equiv 0 \quad (\text{VI.16})$$

Stąd możemy położyć dla wszystkich więzów $\Phi_K(\mathbf{x}) = 0$ i zredukować liczbę niezależnych stopni swobody. Ponieważ wyjściowa przestrzeń fazowa zawierała 10 niezależnych składowych pól i pędów, to w **zredukowanej przestrzeni fazowej** pozostają 4 niezależne stopnie swobody. Pozostaje jedynie jeden nieznikający nawias Diraca

$$\begin{aligned} \{A_m(\mathbf{x}), \pi^n(\mathbf{y})\}_{ND} &= \{A_m(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{y})\}_{NP} - \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{w} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{z} \{A_m(\mathbf{x}), \chi^0(\mathbf{w})\}_{NP} \times \\ &\times (-)\Delta^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{z}) \{\chi^\Lambda(\mathbf{z}), \pi^n(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta_{mn}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{w} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{z} \partial_m^w \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{w}) \Delta^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{z}) \partial_n^z \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = \\ &= \delta_{mn}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \partial_m^x \partial_n^y \Delta^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \stackrel{df}{=} \delta_{mn}^{Tr}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{VI.17})$$

Możemy traktować inne więzy $\chi^0 = 0$, $\tilde{\eta}^\Lambda = 0$ i $\eta^0 = 0$ jako równania na wielkości niedynamiczne:

$$\partial_i \pi^i = -J^0, \quad A_0 = \Delta^{-1} \star J^0, \quad \Lambda = \Delta^{-1} \star \partial_\mu J^\mu, \quad (\text{VI.18})$$

pola pędów dane są przez

$$\pi^m = \pi_{Tr}^m - \partial_m \Delta^{-1} \star J^0, \quad \partial_m \pi_{Tr}^m \equiv 0. \quad (\text{VI.19})$$

Gęstość hamiltonianu Diraca w przestrzeni zredukowanej ma postać

$$\mathcal{H}_{Dirac} = \mathcal{H}_{ext} |_{\Phi_A=0} = \frac{1}{2} (\pi_{Tr}^m)^2 - A_m^{Tr} J^m + \frac{1}{4} (F_{mn})^2 - \frac{1}{2} J^0 \Delta^{-1} \star J^0. \quad (\text{VI.20})$$

6.2. Cechowanie Coulomba dla modelu Zwanzigera

Procedura Diraca może być zastosowana do kwantyzacji modelu Zwanzigera z warunkiem cechowania Coulomba nakładanym na obydwie potencjały cechowania $\partial_i A_i + \partial_3 A_3 = 0$ i $\partial_i B_i + \partial_3 B_3 = 0$. W tym celu wprowadzamy dodatkowe człony $\Lambda^A(\partial_i A_i + \partial_3 A_3)$ i $\Lambda^B(\partial_i B_i + \partial_3 B_3)$ do gęstości lagrangianu Zwanzigera, gdzie Λ^A i Λ^B są polami mnożników Lagrange'a, które traktujemy jako pełnoprawne pola w procedurze kwantowania kanonicznego. Dlatego punktem wyjścia jest gęstość lagrangianu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Zw}^{coul} &= \frac{1}{2}(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 - A \cdot J + \Lambda^A(\partial_i A_i + \partial_3 A_3) \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3)^2 - \frac{1}{2}(\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 - B \cdot K + \Lambda^B(\partial_i B_i + \partial_3 B_3) \\ &- \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_0 A_i - \partial_i A_0)(\partial_3 B_j - \partial_j B_3) - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j(\partial_3 B_0 - \partial_0 B_3) \\ &+ \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_0 B_i - \partial_i B_0)(\partial_3 A_j - \partial_j A_3) + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3). \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

Pędy kanonicznie wynoszą w tym cechowaniu

$$\pi_0^A = 0, \quad \pi_0^B = 0, \quad (\text{VI.22a})$$

$$\pi_3^A = \partial_0 A_3 - \partial_3 A_0 - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j, \quad \pi_3^B = \partial_0 B_3 - \partial_3 B_0 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j, \quad (\text{VI.22b})$$

$$\pi_i^A = -\frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 B_j - \partial_j B_3), \quad \pi_i^B = \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 A_j - \partial_j A_3), \quad (\text{VI.22c})$$

$$\pi_\Lambda^A = 0, \quad \pi_\Lambda^B = 0 \quad (\text{VI.22d})$$

Tylko równania (VI.22b) zawierają w sobie pochodne po czasie potencjałów i pozwalają na wyznaczenie $\partial_0 A_3$ i $\partial_0 B_3$. Pozostałe równania definiują osiem **więzów pierwotnych**

$$\varphi_0^A = \pi_0^A \approx 0, \quad \varphi_0^B = \pi_0^B \approx 0, \quad \varphi_\Lambda^A = \pi_\Lambda^A \approx 0, \quad \varphi_\Lambda^B = \pi_\Lambda^B \approx 0, \quad (\text{VI.23a})$$

$$\varphi_i^A = \pi_i^A + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 B_j - \partial_j B_3) \approx 0, \quad \varphi_i^B = \pi_i^B - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 A_j - \partial_j A_3) \approx 0. \quad (\text{VI.23b})$$

Postulujemy kanoniczne reguły komutacyjne dla potencjałów i sprzężonych do nich pędów oraz pól mnożników Legendre'a i ich pędów kanonicznych

$$\{A_\alpha(\mathbf{x}), \pi_A^\beta(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\Lambda^A(\mathbf{x}), \pi_\Lambda^A(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.24a})$$

$$\{B_\alpha(\mathbf{x}), \pi_B^\beta(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\Lambda^B(\mathbf{x}), \pi_\Lambda^B(\mathbf{y})\}_{NP} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.24b})$$

gdzie $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3, \Lambda\}$, zaś pozostałe nawiasy Poissona znikają. Gęstość hamiltonianu kanonicznego dla układu dostajemy, korzystając z transformacji Legendre'a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can}^{coul} &= \pi_A^0 \partial_0 A_0 + \pi_A^i \partial_0 A_i + \pi_A^3 \partial_0 A_3 + \pi_\Lambda^A \partial_0 \Lambda^A + \pi_B^0 \partial_0 B_0 + \\ &+ \pi_B^i \partial_0 B_i + \pi_B^3 \partial_0 B_3 + \pi_\Lambda^B \partial_0 \Lambda^B - \mathcal{L}_{Zw}^{coul}. \end{aligned} \quad (\text{VI.25})$$

Procedura Diraca dla kwantowania układów z więzami wymaga, aby wprowadzić hamiltonian rozszerzony, w którym pojawiają się nowe pola mnożników Lagrange'a dla wyzna-

czonych **więzów pierwotnych**. W rozpatrywanym obecnie przypadku oznacza to gęstość hamiltonianu rozszerzonego

$$\mathcal{H}^{roz} = \mathcal{H}_{can}^{coul} + u_0^A \varphi_0^A + u_i^A \varphi_i^A + u_\Lambda^A \varphi_\Lambda^A + u_0^B \varphi_0^B + u_i^B \varphi_i^B + u_\Lambda^B \varphi_\Lambda^B, \quad (\text{VI.26})$$

który możemy zapisać jawnie w składowych potencjałów jako

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{roz} &= \frac{1}{2}(\pi_A^3 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j)^2 + \partial_3 A_0(\pi_A^3 - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i B_j) + \frac{1}{2}(\partial_3 A_i - \partial_i A_3)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}(\pi_B^3 - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j)^2 + \partial_3 B_0(\pi_B^3 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_i A_j) + \frac{1}{2}(\partial_3 B_i - \partial_i B_3)^2 + \\ &- \Lambda^A(\partial_i A_i + \partial_3 A_3) - \Lambda^B(\partial_i B_i + \partial_3 B_3) + A \cdot J + B \cdot K + \\ &+ u_0^A \pi_A^0 + u_i^A(\pi_A^i + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 B_j - \partial_j B_3)) + u_\Lambda^A \pi_\Lambda^A + \\ &+ u_0^B \pi_B^0 + u_i^B(\pi_B^i - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\partial_3 A_j - \partial_j A_3)) + u_\Lambda^B \pi_\Lambda^B \end{aligned} \quad (\text{VI.27})$$

To wyznacza hamiltonian rozszerzony $H^{roz} = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}^{roz}(\mathbf{x})$, który może być użyty to generowania równań ruchu jako równań Hamiltona. To pozwala na wyznaczanie **warunków stacjonarności dla więzów pierwotnych**, które mogą stać się nowymi więzami - **więzami wtórnymi**. Rozpocznijmy od warunku stacjonarności dla więzu pierwotnego φ_0^A

$$\begin{aligned} \chi_0^A(\mathbf{x}) &= \dot{\varphi}_0^A(\mathbf{x}) = \{\varphi_0^A(\mathbf{x}), H^{roz}\}_{NP} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{y} \{\pi_0^A(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{y})\}_{NP} \frac{\partial \mathcal{H}^{roz}(\mathbf{y})}{\partial A_0(\mathbf{y})} = \\ &= \partial_3 \pi_A^3(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_3 \partial_i B_j(\mathbf{x}) - J^0(\mathbf{x}) \approx 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.28})$$

czyli otrzymujemy więz wtórny $\chi_0^A \approx 0$. Analogicznie postępując dla pozostałych **więzów pierwotnych** uzyskujemy następujące **warunki stacjonarności**

$$\chi_i^A = \dot{\varphi}_i^A = \partial_3(\partial_3 A_i - \partial_i A_3) - \epsilon_{ij}\partial_j \partial_3 B_0 - J^i - \partial_i \Lambda^A + \epsilon_{ij}\partial_3 u_j^B \approx 0, \quad (\text{VI.29a})$$

$$\chi_\Lambda^A = \dot{\varphi}_\Lambda^A = \partial_i A_i + \partial_3 A_3 \approx 0. \quad (\text{VI.29b})$$

Ponieważ równanie (VI.29a) możemy spełnić poprzez odpowiedni dobór mnożnika u_j^B w każdej chwili t , więc **nie jest ono więzem wtórnym**. Oczywiście $\chi_\Lambda^A \approx 0$ jest **więzem wtórnym**. W następnym kroku nakładamy warunki stacjonarności dla więzów wtórnych: $\chi_0^A \approx 0$ i $\chi_\Lambda^A \approx 0$, co prowadzi do

$$\eta_0^A = \dot{\chi}_0^A = -\partial_3 \partial_i(\partial_3 A_i - \partial_i A_3) - \partial_3^2 \Lambda^A - \epsilon_{ij}\partial_3 \partial_i u_j^B - \partial_3 J^3 - \partial_0 J^0 \approx 0, \quad (\text{VI.30a})$$

$$\eta_\Lambda^A = \dot{\chi}_\Lambda^A = \partial_3 \pi_A^3 + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\partial_3 \partial_i B_j + \partial_3^2 A_0 + \partial_i u_i^A \approx 0. \quad (\text{VI.30b})$$

Te relacje nie są więzami wtórnymi, bo można je spełnić w każdej chwili t poprzez wybór mnożników u_j^B i u_i^A .

Podobny rachunek musimy przeprowadzić dla pozostałych więzów pierwotnych: $\varphi_0^B \approx 0$, $\varphi_i^B \approx 0$ i $\varphi_\Lambda^B \approx 0$. Ale możemy wykorzystać fakt, że mamy symetrię dualności i zamiast bezpośredniego rachunku możemy z wyznaczonych powyżej więzów wtórnych, przy pomocy

transformacji dualności, wygenerować **warunki stacjonarności**

$$\chi_0^B = \partial_3 \pi_B^3 + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_3 \partial_i A_j - K^0 \approx 0, \quad (\text{VI.31a})$$

$$\chi_i^B = \partial_3 (\partial_3 B_i - \partial_i B_3) + \epsilon_{ij} \partial_j \partial_3 A_0 - K^i - \partial_i \Lambda^B - \epsilon_{ij} \partial_3 u_j^A \approx 0, \quad (\text{VI.31b})$$

$$\chi_\Lambda^B = \partial_i B_i + \partial_3 B_3 \approx 0, \quad (\text{VI.31c})$$

$$\eta_0^B = -\partial_3 \partial_i (\partial_3 B_i - \partial_i B_3) - \partial_3^2 \Lambda^B + \epsilon_{ij} \partial_3 \partial_i u_j^A - \partial_3 K^3 - \partial_0 K^0 \approx 0, \quad (\text{VI.31d})$$

$$\eta_\Lambda^B = \partial_3 \pi_B^3 - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_3 \partial_i A_j + \partial_3^2 B_0 + \partial_i u_i^B, \quad (\text{VI.31e})$$

z których $\chi_0^B \approx 0$ i $\chi_\Lambda^B \approx 0$ są **więzami wtórnymi**. Może się wydawać, że to już kończy procedurę generowania więzów wtórnych, bo przez dobór mnożników Lagrange'a u_j^B i u_i^A oraz u_j^A i u_i^B możemy spełnić odpowiednio relacje $\eta_0^A \approx 0$ i $\eta_\Lambda^A \approx 0$ oraz $\eta_0^B \approx 0$ i $\eta_\Lambda^B \approx 0$ w każdej chwili t . Jednak zauważamy, że kombinacje liniowe warunków stacjonarności, które zawierały mnożniki Lagrange'a ($u^{A,B}$) i nie były przez nas klasyfikowane jako **więzy wtórne**

$$\tilde{\eta}_0^A = \eta_0^A + \partial_i \chi_i^A = -\Delta \Lambda^A - \partial_0 J^0 - \partial_i J^i - \partial_3 J^3 \approx 0, \quad (\text{VI.32a})$$

$$\tilde{\eta}_\Lambda^A = \eta_\Lambda^A - \chi_0^A + \epsilon_{ij} \partial_3^{-1} \partial_i \chi_j^B = \Delta A_0 - J^0 + \epsilon_{ij} \partial_i K^j \approx 0, \quad (\text{VI.32b})$$

$$\tilde{\eta}_0^B = \eta_0^B + \partial_i \chi_i^B = -\Delta \Lambda^B - \partial_0 K^0 - \partial_i K^i - \partial_3 K^3 \approx 0, \quad (\text{VI.32c})$$

$$\tilde{\eta}_\Lambda^B = \eta_\Lambda^B - \chi_0^B - \epsilon_{ij} \partial_3^{-1} \partial_i \chi_j^A = \Delta B_0 - K^0 - \epsilon_{ij} \partial_i J^j \approx 0, \quad (\text{VI.32d})$$

nie zawierają już tych mnożników. Stąd musimy uznać, że $\tilde{\eta}_0^A \approx 0$ i $\tilde{\eta}_\Lambda^A \approx 0$ oraz $\tilde{\eta}_0^B \approx 0$ i $\tilde{\eta}_\Lambda^B \approx 0$ są **więzami wtórnymi**. To oznacza konieczność nałożenia **nowych warunków stacjonarności**, które wyliczamy

$$\xi_0^A = \dot{\tilde{\eta}}_0^A = -\Delta u_\Lambda^A - \partial_0 (\partial_0 J^0 + \partial_i J^i + \partial_3 J^3) \approx 0, \quad (\text{VI.33a})$$

$$\xi_3^A = \dot{\tilde{\eta}}_3^A = \Delta u_0^A - \partial_0 J^0 + \epsilon_{ij} \partial_0 \partial_i K^j \approx 0. \quad (\text{VI.33b})$$

A z transformacji dualności mamy

$$\xi_0^B = -\Delta u_\Lambda^B - \partial_0 (\partial_0 K^0 + \partial_i K^i + \partial_3 K^3) \approx 0, \quad (\text{VI.34a})$$

$$\xi_3^B = \Delta u_0^B - \partial_0 K^0 - \epsilon_{ij} \partial_0 \partial_i J^j \approx 0. \quad (\text{VI.34b})$$

Tym razem to już rzeczywiście koniec generowania nowych więzów, bo poprzez odpowiedni dobór mnożników Lagrange'a u_Λ^A i u_0^A oraz u_Λ^B i u_0^B możemy zapewnić znikanie tych relacji w każdej chwili czasu t .

Zanim przejdziemy do wyznaczania macierzy nawiasów Poissona pomiędzy wszystkimi więzami, pierwotnymi i wtórnymi, możemy ułatwić sobie dalszy rachunek poprzez redefinicje więzów jako **kombinacji liniowych dotychczasowych więzów**, tak aby uzyskana macierz miała możliwie najprostszą postać. Dlatego wprowadzamy definicje nowych więzów

$$\tilde{\chi}_0^A = \chi_0^A + \partial_i \varphi_i^A, \quad \varphi_L^A = \partial_i \varphi_i^A, \quad \varphi_T^A = \epsilon_{ij} \partial_i \varphi_j^A, \quad (\text{VI.35a})$$

$$\tilde{\chi}_0^B = \chi_0^B + \partial_i \varphi_i^B, \quad \varphi_L^B = \partial_i \varphi_i^B, \quad \varphi_T^B = \epsilon_{ij} \partial_i \varphi_j^B, \quad (\text{VI.35b})$$

co prowadzi ostatecznie do następującego **zbioru wszystkich więzów**. Ponieważ mamy 16 więzów, $\Phi_K, K \in \{1, \dots, 16\}$, gdzie wprowadzamy oznaczenia

$$\Phi_1 = \varphi_0^A = \pi_0^A, \quad \Phi_5 = \varphi_0^B = \pi_0^B, \quad (\text{VI.36a})$$

$$\Phi_2 = \tilde{\eta}_\Lambda^A = \Delta A_0 - J^0 + \epsilon_{ij} \partial_i K^j, \quad \Phi_6 = \tilde{\eta}_\Lambda^B = \Delta B_0 - K^0 - \epsilon_{ij} \partial_i J^j \quad (\text{VI.36b})$$

$$\Phi_3 = \varphi_\Lambda^A = \pi_\Lambda^A, \quad \Phi_7 = \varphi_\Lambda^B = \pi_\Lambda^B, \quad (\text{VI.36c})$$

$$\Phi_4 = \tilde{\eta}_0^A = -\Delta \Lambda^A - \partial_\mu J^\mu, \quad \Phi_8 = \tilde{\eta}_0^B = -\Delta \Lambda^B - \partial_\mu K^\mu, \quad (\text{VI.36d})$$

$$\Phi_9 = \tilde{\chi}_0^A = \partial_i \pi_A^i + \partial_3 \pi_A^3 - J^0, \quad \Phi_{11} = \tilde{\chi}_0^B = \partial_i \pi_B^i + \partial_3 \pi_B^3 - K^0, \quad (\text{VI.36e})$$

$$\Phi_{10} = \chi_\Lambda^A = \partial_i A_i + \partial_3 A_3, \quad \Phi_{12} = \chi_\Lambda^B = \partial_i B_i + \partial_3 B_3, \quad (\text{VI.36f})$$

$$\Phi_{13} = \varphi_L^A = \partial_i \pi_i^A + \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_3 \partial_i B_j, \quad \Phi_{15} = \varphi_L^B = \partial_i \pi_i^B - \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_3 \partial_i A_j, \quad (\text{VI.36g})$$

oraz

$$\Phi_{14} = \varphi_T^A = \epsilon_{ij} \partial_i \pi_j^A - \frac{1}{2} \partial_3 \partial_i B_i + \frac{1}{2} \Delta_\perp B_3, \quad (\text{VI.36h})$$

$$\Phi_{16} = \varphi_T^B = \epsilon_{ij} \partial_i \pi_j^B + \frac{1}{2} \partial_3 \partial_i A_i - \frac{1}{2} \Delta_\perp A_3. \quad (\text{VI.36i})$$

Wyznaczam teraz nawiasy Poissona pomiędzy wszystkimi więzami i zapisuję je w postaci macierzy macierzy kwadratowej 16×16

$$\mathcal{M}_{KL}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \{\Phi_K(\mathbf{x}), \Phi_L(\mathbf{y})\}_{NP}, \quad K, L \in \{1, \dots, 16\}, \quad (\text{VI.37})$$

którą przy naszych oznaczeniach przyjmuje postać macierzy blokowej

$$\mathcal{M}_{KL}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_B(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{bmatrix}_{KL}, \quad (\text{VI.38})$$

gdzie jawnie zapisując indeksy wierszy i kolumn mamy

$$\mathbf{C}_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} & \varphi_0^A & \tilde{\eta}_\Lambda^A & \varphi_\Lambda^A & \tilde{\eta}_0^A \\ \varphi_0^A & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ \tilde{\eta}_\Lambda^A & -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_\Lambda^A & 0 & 0 & 0 & \Delta \\ \tilde{\eta}_0^A & 0 & 0 & -\Delta & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.39a})$$

$$\mathbf{C}_B(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} & \varphi_0^B & \tilde{\eta}_\Lambda^B & \varphi_\Lambda^B & \tilde{\eta}_0^B \\ \varphi_0^B & 0 & \Delta & 0 & 0 \\ \tilde{\eta}_\Lambda^B & -\Delta & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_\Lambda^B & 0 & 0 & 0 & \Delta \\ \tilde{\eta}_0^B & 0 & 0 & -\Delta & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.39b})$$

oraz

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c|cccccccc} & \tilde{\chi}_0^A & \chi_\Lambda^A & \tilde{\chi}_0^B & \chi_\Lambda^B & \varphi_L^A & \varphi_T^A & \varphi_L^B & \varphi_T^B \\ \hline \tilde{\chi}_0^A & 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_\Lambda^A & -\Delta & 0 & 0 & 0 & -\Delta_\perp & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\chi}_0^B & 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_\Lambda^B & 0 & 0 & -\Delta & 0 & 0 & 0 & -\Delta_\perp & 0 \\ \varphi_L^A & 0 & \Delta_\perp & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_3 \Delta_\perp \\ \varphi_T^A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 \Delta_\perp & 0 \\ \varphi_L^B & 0 & 0 & 0 & \Delta_\perp & 0 & \partial_3 \Delta_\perp & 0 & 0 \\ \varphi_T^B & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_3 \Delta_\perp & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \delta^3(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.39c})$$

Macierz odwrotna \mathcal{M}_{KL}^{-1} zdefiniowana przez relację

$$\begin{aligned} & \sum_{L'} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{w} \mathcal{M}_{KL'}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{w}) \mathcal{M}_{L'L}(\mathbf{w} - \mathbf{z}) = \delta_{KL} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \\ & = \sum_{L'} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{w} \mathcal{M}_{KL'}(\mathbf{x} - \mathbf{w}) \mathcal{M}_{L'L}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

również jest macierzą blokową

$$\mathcal{M}_{KL}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{C}_A^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & & & 0 & & 0 \\ & & & 0 & \mathbf{C}_B^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & & 0 \\ & & & 0 & & & \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{array} \right]_{KL}, \quad (\text{VI.41})$$

gdzie

$$\mathbf{C}_A^{-1}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c|cccc} & \varphi_0^A & \tilde{\eta}_\Lambda^A & \varphi_\Lambda^A & \tilde{\eta}_0^A \\ \hline \varphi_0^A & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{\eta}_\Lambda^A & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_\Lambda^A & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{\eta}_0^A & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \Delta^{-1}(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.42a})$$

$$\mathbf{C}_B^{-1}(\mathbf{x}) = \left[\begin{array}{c|cccc} & \varphi_0^B & \tilde{\eta}_\Lambda^B & \varphi_\Lambda^B & \tilde{\eta}_0^B \\ \hline \varphi_0^B & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{\eta}_\Lambda^B & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_\Lambda^B & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{\eta}_0^B & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \Delta^{-1}(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.42b})$$

zaś

$$D^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} & \tilde{\chi}_0^A & \chi_\Lambda^A & \tilde{\chi}_0^B & \chi_\Lambda^B & \varphi_L^A & \varphi_T^A & \varphi_L^B & \varphi_T^B \\ \tilde{\chi}_0^A & 0 & -G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 \\ \chi_\Lambda^A & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\chi}_0^B & 0 & 0 & 0 & -G & 0 & -G_3 & 0 & 0 \\ \chi_\Lambda^B & 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_L^A & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_{3\perp} \\ \varphi_T^A & 0 & 0 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & G_{3\perp} & 0 \\ \varphi_L^B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{3\perp} & 0 & 0 \\ \varphi_T^B & G_3 & 0 & 0 & 0 & -G_{3\perp} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.42c})$$

gdzie oznaczam $G_3 = \partial_3^{-1} \star \Delta^{-1}(\mathbf{x})$, $G_{3\perp} = \partial_3^{-1}(x_3) \Delta_\perp^{-1}(\mathbf{x}_\perp)$ i $G = \Delta^{-1}(\mathbf{x})$. Mając macierz odwrotną do macierzy nawiasów Poissona dla wszystkich więzów, **możemy zdefiniować nawiasy Diraca** dla dowolnych pól ψ_a i ψ_b jako

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\}_{ND} &= \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\}_{NP} - \sum_{K,L} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{w} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{z} \{\psi_a(\mathbf{x}), \Phi_K(\mathbf{w})\}_{NP} \times \\ &\quad \times \mathcal{M}_{KL}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{z}) \{\Phi_L(\mathbf{z}), \psi_b(\mathbf{y})\}_{NP}. \end{aligned} \quad (\text{VI.43})$$

Stąd mamy ogólną własność nawiasów Diraca dla więzów

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\mathbf{x}), \Phi_K(\mathbf{y})\}_{ND} &= \{\psi_a(\mathbf{x}), \Phi_K(\mathbf{y})\}_{NP} - \sum_{K',L} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{w} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{z} \{\psi_a(\mathbf{x}), \Phi_{K'}(\mathbf{w})\}_{NP} \times \\ &\quad \times \mathcal{M}_{K'L}^{-1}(\mathbf{w} - \mathbf{z}) \{\Phi_L(\mathbf{z}), \Phi_K(\mathbf{y})\}_{NP} \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.44})$$

To oznacza, że **możemy wyzerować wszystkie więzy** $\Phi_K = 0$ i definiować równania Hamiltona z nawiasami Diraca w miejsce nawiasów Poissona oraz gęstością hamiltonianu Diraca

$$\mathcal{H}_{Dirac} = \mathcal{H}^{roz}|_{\Phi_K=0}. \quad (\text{VI.45})$$

To daje spójną strukturę przestrzeni fazowej i pozwala na kanoniczne kwantowanie, gdzie z **nawiasów Diraca postuluje się równoczesowe relacje komutacyjne dla operatorów pola**.

Dla nas najbardziej interesujące jest wyliczenie nawiasów Diraca pomiędzy potencjałami A_μ i B_μ . Bezpośrednim rachunkiem wyznaczam nawiasy Diraca

$$\{A_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})\}_{ND} = \epsilon_{ij} \partial_3 \Delta^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.46})$$

$$\{A_3(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{y})\}_{ND} = \epsilon_{ij} \partial_j \Delta^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{VI.47})$$

a pozostałe albo zerują się albo wynikają z transformacji dualności. To prowadzi do równoczesowych komutatorów dla operatorów pola i zgadza się z postacią funkcji Wightmana (IV.45), którą wyznaczyliśmy w rozdziale IV, gdy szukaliśmy sferycznie symetrycznych rozwiązań równania (IV.37) na mieszane funkcje Wightmana. Wyznaczamy teraz wartość

próżniową komutatorów uzyskanych z powyższych nawiasów Diraca

$$\langle 0|[A_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})]|0\rangle = -i\epsilon_{ij}\partial_3\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad (\text{VI.48})$$

$$\langle 0|[A_3(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{y})]|0\rangle = -i\epsilon_{ij}\partial_j\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad (\text{VI.49})$$

i porównujemy je z otrzymanymi z mieszanych funkcji Wightmana danych wzorem (IV.44)

$$\langle 0|[A_m(\mathbf{x}), B_n(0)]|0\rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \langle 0|[A_m(x), B_n(0)]|0\rangle = -i\epsilon_{mnl}\partial_l\Delta^{-1}(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.50})$$

przy czym

$$\lim_{x \rightarrow 0} \langle 0|A_m(x)B_n(0)|0\rangle = -\frac{i}{2}\epsilon_{mnl}\partial_l\Delta^{-1}(\mathbf{x}). \quad (\text{VI.51})$$

VII. Podsumowanie

Rozdział pierwszy zawiera opis monopoli magnetycznych w teorii klasycznej i kwantowej oraz wysiłki w ich poszukiwaniu w przyrodzie i eksperymencie. Istotnym dopełnieniem tego rozdziału jest dodatek B.2 w którym wyprowadzony został uogólniony potencjał dla monopolu magnetycznego zarówno w opisie jednopotencjałowym jak i w modelu Zwanzigera. Przeprowadzona analiza jest istotna dla lepszego zrozumienia używanych modeli, lecz ponieważ nie dotyczy bezpośrednio tematu pracy została przeniesiona do dodatku.

Symetrie dyskretne działające na dyonowe równania Maxwella zostały pokazane w rozdziale drugim. Analizując transformacje parzystości, inwersji w czasie oraz sprzężenia ładunkowego zakładamy, że prądy i ładunki magnetyczne transformują się tak samo jak prądy i ładunki elektryczne. W przeciwieństwie do elektrodynamiki tylko z ładunkami elektrycznymi, równania Maxwella ze źródłami elektrycznymi i magnetycznymi nie mają symetrii parzystości. W tej analizie otrzymujemy inny warunek symetrii parzystości dla równania Ampère'a, a inny dla równania Faradaya. W przypadku takiej niejednoznaczności, którą otrzymujemy przy transformacji parzystości i inwersji w czasie, zawsze wybieram warunek właściwy w przypadku braku źródeł magnetycznych. Badanie ostatniej z transformacji dyskretnych – sprzężenia ładunkowego, prowadzi do wniosku, że symetria sprzężenia ładunkowego jest symetrią dyonowych równań Maxwella. Zebrałam w tym rozdziale informacje jak transformują się pola pod działaniem transformacji parzystości, inwersji w czasie, sprzężenia ładunkowego oraz ich złożeń. Jak mogliśmy się spodziewać symetria PTC jest symetrią układu. Rozdział ten kończy przedstawienie modelu Zwanzigera będący podstawą analizy i uzyskanych wyników przedstawionych w dalszej części pracy. Zaproponowana przez Zwanzigera gęstość lagrangianu jest lokalna, zawiera dwa potencjały cechowania oraz wyróżniony wektor n , a równania Eulera-Lagrange'a wynikające z tej gęstości są równoważne dyonowym równaniom Maxwella.

W trzecim rozdziale przedstawiam ogólny zarys elektrodynamiki kwantowej opisującej zarówno pola materii z ładunkiem elektrycznym, jak i pola materii z ładunkiem magnetycznym, gdzie oddziaływanie przenoszone jest przez dwa niezależne potencjały cechowania. To oznacza symetrię cechowania $U(1) \times U(1)$ i wybieram lagrangian Zwanzigera dla pól cechowania. W dalszej części pracy moją uwagę skupiam na sektorze pól cechowania, a z postaci lagrangianu dla pól materii wykorzystuję fakt, że oba naładowane prądy: elektryczny i magnetyczny, są zadanymi polami 4-wektorowymi.

W czwartym rozdziale przedstawiam własności 2-punktowej funkcji Wightmana, która stanowi wygodne narzędzie analizy w kwantowej teorii pola. Została tu wykazana translacyjna niezmienniczość funkcji Wightmana oraz, przy założeniu lorentzowskiej niezmienniczości stanu próżni, kowariantność tych obiektów. Korzystając z analizy transformacji dyskretnych dla pól elektrycznych i magnetycznych pokazuję, że PTC jest symetrią tego modelu. Uzyskuję jednak przeciwny znak niż w opisie jednopotencjałowym. Badanie niezmienniczości względem cechowania w modelu Zwanzigera i wykorzystanie wzoru Peierlsa, pozwoliło na wyprowadzenie równania na mieszane funkcje Wightmana. **Okazuje się, że nie ma lorentzowsko-niezmienniczej mieszanej funkcji Wightmana w badanym modelu.** Potrafimy jednak podać rozwiązanie sferycznie symetryczne i przedstawić ogólną postać mieszanych funkcji Wightmana (IV.46). **Ten wzór uważam za jeden**

z najważniejszych wyników mojej pracy. Dalsze moje badania stanowią sprawdzenie tego wzoru dla różnych warunków cechowania. Wykorzystałam tę ogólną postać funkcji Wightmana do operatorów pętli Wilsona i zgodnie z oczekiwaniem uzyskałam wynik niezależny od warunków cechowania.

Rozdziały piąty i szósty zawierają kanoniczne kwantowanie przy użyciu gęstości lagrangianu Zwanzigera. W piątym rozdziale zastosowana została metoda Fadeeva-Jackiwa, która pozwala na szybkie uzyskanie nawiasów Diraca, dla trzech cechowań: planarnego, dLC_1 oraz dLC_3 .

W cechowaniu planarnym wszystkie wyznaczone pędy kanoniczne definiują nam więzy drugiego rodzaju. Następnie wyznaczam równania Eulera-Lagrange'a i wprowadzam mody kowariantne, tzn. spełniające równanie falowe, które pozwalają na zapisanie wszystkich równań ruchu w postaci równań pierwszego rzędu w pochodnych czasowych. W cechowaniu planarnym mamy dwie pary pól swobodnych nawet w obecności źródeł, zaś równania na pozostałe mody zawierają niekowariantne człony polowe. **Te pola swobodne pozwalają na wprowadzenie warunków na stany fizyczne** dla teorii z oddziaływaniami. Po wyznaczeniu nawiasów Diraca oraz komutatorów i przejściu do przypadku swobodnego możemy wszystkie mody kowariantne przedstawić w reprezentacji Focka, a następnie znaleźć komutatory dla operatorów kreacji i anihilacji. Wyznaczone zostały funkcje Wightmana dla niezależnych stopni swobody i ostatecznie dla wyjściowych pól. Analizę cechowania planarnego kończy zbadanie równoważności uzyskanych mieszanych funkcji Wightmana z ogólną postacią takich funkcji, którą wyznaczyłam w poprzednim rozdziale.

Kolejnym z badanych cechowań jest cechowanie dLC_1 , tzn. cechowanie $A_0 - \alpha A_1 = B_0 - \alpha B_1 = 0$. W tym cechowaniu mamy sześć pędów kanonicznie sprzężonych z potencjałami, z czego cztery z nich definiują więzy. Oprócz czterech modów kowariantnych w tym cechowaniu występują również mody niekowariantne, przy czym **dwa z nich spełniają swobodne równania ruchu, o ile zewnętrzne prądy są zachowane.** Tak jak w cechowaniu planarnym, po uzyskaniu mieszanych funkcji Wightmana w cechowaniu dLC_1 sprawdzamy ich równoważność z (IV.46).

Ostatnim z analizowanych w tym rozdziale cechowań jest cechowanie dLC_3 , które różni się od poprzedniego wyróżnionym kierunkiem. Uzyskujemy tak jak poprzednio cztery mody kowariantne i cztery mody niekowariantne, ale funkcje Wightmana dla modów niekowariantnych zawierają wyrażenia rozbieżne dla $k_3 \rightarrow 0$. **To oznacza, że dla tych modów przedstawienie Focka jest niewarygodne,** ale w mojej analizie mogę ominąć ten problem. Okazuje się bowiem, że **funkcje Wightmana dla wyjściowych pól są dobrze zdefiniowane,** również jako całki pędowe, oraz możemy się przekonać, że są one równoważne funkcjom Wightmana danych wzorem (IV.46).

Rozdział szósty zawiera kanoniczne kwantowanie metodą Diraca przeprowadzone w cechowaniu Coulomba w przypadku jednopotencjałowym, a następnie przy użyciu gęstości lagrangianu Zwanzigera. Dla modelu Zwanzigera znajdujemy osiem więzów pierwotnych, a następnie osiem więzów wtórnych, wynikających w warunków stacjonarności więzów pierwotnych. Zgodnie z przepisem Diraca znajdujemy nawiasy, a następnie z nawiasów Diraca relacje komutacyjne dla operatorów pola. Wyznaczamy również wartość próżniową uzyskanych komutatorów i uzyskujemy ten sam wynik, jak przy wyznaczaniu funkcji komutatorowej z funkcji Wightmana uzyskanych w rozdziale III. To oznacza, że **sferycznie symetryczna mieszna funkcja Wightmana (IV.46),** którą znalazłam jako rozwiązanie równania (IV.37) **odpowiada cechowaniu Coulomba.**

Podsumowując analiza modelu Zwanzigera pozwoliła na wyprowadzenie równania na nie-diagonalne funkcje Wightmana. Z przedstawionych obliczeń widać, że symetria Lorentza jest złamana dla mieszanych funkcji Wightmana uzyskanych w ramach tego modelu. Jeste-

śmy w stanie uzyskać tylko sferycznie symetryczne rozwiązanie wyprowadzonego równania, które nie zależy jawnie od ustalonego czterowektora n wyróżnionego w tym modelu. Zależność od tego wektora w funkcji Wightmana pojawia się tylko w członach zależnych od wyboru warunku cechowania. Najprostsze uzyskane rozwiązanie można otrzymać przez kanoniczne kwantowanie w cechowaniu Coulomba i wyniki są spójne. Kanoniczne kwantowanie przeprowadzone w czterech wybranych cechowaniach prowadzi do funkcji Wightmana spełniających wyprowadzone równanie. Przedstawione rachunki dla różnych cechowań prowadzą do funkcji Wightmana, które są sobie równe z dokładnością do członów zależnych od wybranego warunku cechowania.

Brant, Neri i Zwanziger [55] pokazali, że niezmiennicze ze względu na transformację cechowania funkcje Greena nie zależą od wyróżnionego wektora n , gdy prądy elektryczne i magnetyczne są generowane przez naładowane klasyczne cząstki punktowe. W tej pracy rozważane są cząstki obdarzone ładunkiem opisywane przez lokalne, kwantowe operatory pola i uzyskują niezależne od n funkcje Wightmana. Ponieważ korzystając z funkcji Wightmana łatwo możemy wyznaczyć funkcje komutatorowe i propagatory jest to pierwszy krok do sformułowania perturbacyjnego opisu elektrodynamiki kwantowej z ładunkami elektrycznymi i magnetycznymi. Wielkości niezależne od wyboru cechowania nie będą zleżeć od wyróżnionego wektora n . Kolejnym krokiem analizy modelu Zwanzigera będzie więc znalezienie macierzy rozpraszania i przekroju czynnego dla rozpraszania monopolu na elektronie.

A. Oznaczenia

Punkt w czasoprzestrzeni 3 + 1 wymiarowej oznaczamy jako $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \mathbf{x})$, przy czym symbole pogrubione oznaczają trójwektory $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, zaś prędkość światła oraz stała Plancka $c = \hbar = 1$ o ile w treści nie zaznaczono inaczej. Tensor metryczny zdefiniowany jest następująco

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Za pomocą tensora metrycznego definiujemy wektor kowariantny $x_\mu \equiv g_{\mu\nu}x^\nu = (x_0, -\mathbf{x})$, zaś interwał czasoprzestrzenny dany jest wzorem $s^2 = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$. Operatory różniczkowania pierwszego rzędu mają postać

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (\text{A.2})$$

a operator d'Alamberta $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu$. Całkowicie antysymetryczny tensor, tensor Levi-Civity, dany jest przez

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = \begin{cases} +1 & \text{jeśli } \{\mu, \nu, \rho, \lambda\} \text{ jest parzystą permutacją } \{0, 1, 2, 3\} \\ -1 & \text{jeśli jest permutacją nieparzystą} \\ 0 & \text{w innym wypadku} \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

zaś trójwymiarowy tensor całkowicie antysymetryczny jest unormowany zgodnie z warunkiem $\epsilon^{123} = 1$. Składowe poprzeczne oznaczamy przez $i, j, k \in \{1, 2\}$, zaś wskaźniki $\{1, 2, 3\}$ będziemy oznaczać literami m, n, l, p . Symbol \star oznacza splot z operatorem całkowym, $*$ sprzężenie zespolone funkcji, natomiast \dagger hermitowskie sprzężenie operatora. Trójwymiarowy laplasjan oznaczamy przez Δ , natomiast Δ_\perp jest laplasjanem w dwóch wymiarach $\{1, 2\}$.

Wektor czteroprądu elektrycznego oznaczamy jako $J^\mu = (\rho_e, \mathbf{J}_e)$, zaś magnetycznego $K^\mu = (\rho_m, \mathbf{J}_m)$. Zarówno wielkości klasyczne jak i odpowiadające im operatory kwantowe oznaczane są tym samym symbolem. Φ_μ, Ψ_μ oznaczają części funkcji Wightmana zależne od wyboru warunku cechowania.

B. Potencjały dla pola elektromagnetycznego wytworzonego przez nieruchomy punktowy monopol magnetyczny

B.1. Wstęp do teorii dystrybucji Schwartza

Zamieszczamy tutaj wyciąg z [56] tych informacji o teorii dystrybucji Schwartza, które będą dla nas użyteczne w badaniu funkcji osobliwych.

Definicja 1. Przestrzeń $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ jest to przestrzeń funkcji zespolonych na \mathbb{R}^n o ograniczonym nośniku. Funkcję $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *funkcją próbną*.

Definicja 2. *Dystrybucja* T jest to funkcjonal liniowy ciągły na przestrzeni wektorowej \mathcal{D} , który dla każdej funkcji próbnej $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{D}$ przyporządkowuje liczbę zespoloną $T(f) = \langle T, f \rangle \in \mathbb{C}$, przy czym

$$T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2), \quad (\text{B.1a})$$

$$T(\alpha f) = \alpha T(f), \quad \text{dla stałej } \alpha \in \mathbb{C}. \quad (\text{B.1b})$$

Dystrybucje tworzą *przestrzeń wektorową* \mathcal{D}' , w której suma $T_1 + T_2$ i iloczyn αT są zdefiniowane jako

$$\langle T_1 + T_2, f \rangle = \langle T_1, f \rangle + \langle T_2, f \rangle, \quad \langle \alpha T, f \rangle = \alpha \langle T, f \rangle. \quad (\text{B.2})$$

Dwie dystrybucje T_1 i T_2 są sobie równe w sensie dystrybucji, jeżeli dla wszystkich funkcji próbnych

$$\langle T_1, f \rangle = \langle T_2, f \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Definicja 3. *Pochodna dystrybucyjna* DT w \mathbb{R} jest zdefiniowana przez równość dystrybucji

$$\langle DT, f \rangle = -\langle T, f' \rangle. \quad (\text{B.4})$$

Cząstkowa pochodna dystrybucyjna $D_i T$ w \mathbb{R}^n jest zdefiniowana przez równość dystrybucji

$$\langle D_i T, f \rangle = -\langle T, \partial_i f \rangle. \quad (\text{B.5})$$

Fizyczne przykłady. Jeżeli φ jest funkcją lokalnie sumowalną, to definiuje ona dystrybucję T_φ poprzez całkę

$$\langle T_\varphi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \langle \varphi, f \rangle. \quad (\text{B.6})$$

Pochodna dystrybucyjna $D_i\varphi$ jest zadana przez całkę

$$\langle D_i\varphi, f \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \varphi(\mathbf{x}) \partial_i f(\mathbf{x}). \quad (\text{B.7})$$

Dystrybucja delta Diraca δ^n jest zdefiniowana jako

$$\langle \delta^n, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \delta^n(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) \quad (\text{B.8})$$

i dalej dla $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \delta_a^n, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x} \delta^n(\mathbf{x} - \mathbf{a}) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \quad (\text{B.9})$$

Zazwyczaj oznaczamy $\delta^1 = \delta$ i mamy dystrybucje w 1 wymiarze

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \delta(x) f(x) = f(0), \quad \int_{\mathbb{R}} dx \delta(x - a) f(x) = f(a), \quad (\text{B.10})$$

co prowadzi w 3 wymiarach do dystrybucji

$$\langle \delta^3, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \delta^3(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \delta(x) \delta(y) \delta(z) f(x, y, z) = f(0, 0, 0), \quad (\text{B.11})$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{a}) f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{x} \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z) f(x, y, z) = f(a_x, a_y, a_z). \quad (\text{B.12})$$

Funkcja skokowa Heaviside'a $\Theta(x)$ definiuje dystrybucję

$$\langle \Theta, f \rangle = \int_0^\infty dx f(x). \quad (\text{B.13})$$

Funkcja znaku $\text{sgn}(x)$ definiuje dystrybucję

$$\langle \text{sgn}, f \rangle = \int_0^\infty dx f(x) - \int_{-\infty}^0 dx f(x). \quad (\text{B.14})$$

W sensie dystrybucji \mathcal{D}' mamy równość

$$\text{sgn}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x). \quad (\text{B.15})$$

Pochodna dystrybucyjna funkcji skokowej Heaviside'a $D\Theta(x)$ definiuje dystrybucję

$$\langle D\Theta, f \rangle = - \int_0^\infty dx \frac{df(x)}{dx} = f(0) = \langle \delta, f \rangle, \quad (\text{B.16})$$

zatem w sensie dystrybucji \mathcal{D}' mamy

$$D\Theta(x) = \delta(x). \quad (\text{B.17})$$

Pochodna dystrybucyjna funkcji znaku $D \operatorname{sgn}(x)$ definiuje dystrybucję

$$\langle D \operatorname{sgn}, f \rangle = - \int_0^\infty dx \frac{df(x)}{dx} + \int_{-\infty}^0 dx \frac{df(x)}{dx} = 2f(0) = \langle 2\delta, f \rangle, \quad (\text{B.18})$$

stąd mamy relację w sensie dystrybucji \mathcal{D}'

$$D \operatorname{sgn}(x) = 2\delta(x). \quad (\text{B.19})$$

B.2. Monopol magnetyczny Diraca w opisie jednopotencjałowym

Chcemy wyrazić pole indukcji magnetycznej

$$\vec{B}(\mathbf{r}) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{B.20})$$

jako rotację potencjału wektorowego

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (\text{B.21})$$

Poszukujemy potencjału wektorowego używając współrzędnych sferycznych

$$\vec{A}(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r}) \hat{r} + A_\theta(\mathbf{r}) \hat{\theta} + A_\phi(\mathbf{r}) \hat{\phi}, \quad (\text{B.22})$$

dla którego rotacja ma postać

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{\hat{\phi}}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] + \frac{\hat{\theta}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) \right] + \\ & + \frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Stąd mamy układ równań różniczkowych

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) = 0, \quad (\text{B.24a})$$

$$\frac{\hat{r}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] = \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (\text{B.24b})$$

Ogólne rozwiązanie tych równań ma postać

$$A_r(\mathbf{r}) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial r}, \quad A_\theta(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \theta}, \quad A_\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial \phi} + \frac{g\mu_0}{4\pi} (\alpha - \cos \theta) \right], \quad (\text{B.25})$$

gdzie $\Phi(\mathbf{r})$ jest dowolną funkcją analityczną w całej przestrzeni \mathbb{R}^3 i α jest dowolną rzeczywistą stałą. To rozwiązanie można zapisać w postaci wektorowej

$$\vec{A}(\mathbf{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\mathbf{r}) + \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{\alpha - \cos\theta}{r \sin\theta} \hat{\phi}. \quad (\text{B.26})$$

Część gradientowa opisuje niezmienniczość cechowania i znika tożsamościowo dla operacji rotacji. Natomiast część niegradientowa jest dobrze zdefiniowana dla $\theta \notin \{0, \pi\}$. To oznacza, że w celu wyliczenia rotacji dla powyższego potencjału wektorowego musimy odwołać się do dystrybucji i pochodną cząstkową $\vec{\nabla}$ musimy definiować jako pochodną dystrybucyjną \vec{D} . Mamy dystrybucję dla rotacji dystrybucyjnej

$$\langle \vec{D} \times \vec{A}, f \rangle = \langle \vec{A}, \times \vec{\nabla} f \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \vec{A}(\mathbf{r}) \times \vec{\nabla} f(\mathbf{r}), \quad (\text{B.27})$$

lub jawnie we współrzędnych kartezjańskich

$$\langle (\vec{D} \times \vec{A})_i, f \rangle = \epsilon_{ijk} \langle D_j A_k, f \rangle = -\epsilon_{ijk} \langle A_k, \partial_j f \rangle = -\epsilon_{ijk} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} A_k(\mathbf{r}) \partial_j f(\mathbf{r}). \quad (\text{B.28})$$

gdzie $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Dla rotacji potencjału wektorowego (B.26) mamy całkę we współrzędnych sferycznych

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \vec{A}(\mathbf{r}) \times \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) &= \frac{g\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \frac{\alpha - \cos\theta}{r \sin\theta} \hat{\phi} \times \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{g\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\alpha - \cos\theta}{r \sin\theta} \hat{\phi} \times \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{g\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty dr r \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\alpha - \cos\theta) \hat{\phi} \times \vec{\nabla} f(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Dalej znajdujemy

$$\hat{\phi} \times \vec{\nabla} f = \hat{\phi} \times \left[\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \right] = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{r}, \quad (\text{B.30})$$

gdź dla wersorów sferycznych mamy relacje $\hat{\phi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$, $\hat{\phi} \times \hat{\theta} = -\hat{r}$. To prowadzi do całki po kącie θ , którą całkujemy przez części

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta (\alpha - \cos\theta) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{r} \right) &= \int_0^\pi d\theta (\alpha - \cos\theta) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\theta} + \frac{f}{r} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \right) + \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{f}{r} \hat{r} - \\ &- \frac{1}{r} (\alpha - \cos\theta) \hat{r} f(r, \theta, \phi) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Ponieważ zachodzą relacje

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \quad \hat{r}|_{\theta=0} = \hat{k}, \quad \hat{r}|_{\theta=\pi} = -\hat{k}, \quad (\text{B.32})$$

więc możemy zapisać całkę po kącie θ w postaci

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta (\alpha - \cos\theta) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{r} \right) &= \int_0^\pi d\theta \frac{\alpha - \cos\theta}{r} \frac{\partial(rf)}{\partial r} \hat{\theta} + \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{f}{r} \hat{r} - \\ &- \hat{k} \left[\frac{\alpha + 1}{r} f(r, \theta = \pi, \phi) + \frac{\alpha - 1}{r} f(r, \theta = 0, \phi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Pierwszy człon po prawej stronie prowadzi do całki radialnej, która znika

$$\int_0^\infty dr r \int_0^\pi d\theta \frac{\alpha - \cos\theta}{r} \frac{\partial(rf)}{\partial r} \hat{\theta} = \int_0^\pi d\theta (\alpha - \cos\theta) \hat{\theta} \int_0^\infty dr \frac{\partial(rf)}{\partial r} = 0. \quad (\text{B.34})$$

Trzeci człon po prawej stronie prowadzi do całki radialnej (poniżej pomijamy stały czynnik $-\hat{k}$)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dr [(\alpha + 1)f(r, \theta = \pi, \phi) + (\alpha - 1)f(r, \theta = 0, \phi)] = \\ &= (\alpha + 1) \int_0^\infty dz f(x = 0, y = 0, -z) + (\alpha - 1) \int_0^\infty dz f(x = 0, y = 0, z) = \\ &= (\alpha + 1) \int_{-\infty}^0 dz f(x = 0, y = 0, z) + (\alpha - 1) \int_0^\infty dz f(x = 0, y = 0, z). \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

bo dla $\theta = \pi$ współrzędne kartezjańskie wynoszą $(x = 0, y = 0, z = -r)$, natomiast dla $\theta = 0$ współrzędne kartezjańskie to $(x = 0, y = 0, z = r)$. Ale funkcje $f(x = 0, y = 0, z)$ i $f(x = 0, y = 0, -z)$ nie zależą od kąta ϕ , dlatego całka po tym kącie wprowadza jedynie czynnik 2π . Reasumując wyliczyliśmy całkę

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty dr r \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\alpha - \cos\theta) \hat{\phi} \times \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta \frac{\hat{r}}{r^2} f(\mathbf{r}) - \\ &- 2\pi \hat{k} \alpha \int_{\mathbb{R}} dz f(x = 0, y = 0, z) + 2\pi \hat{k} \int_{\mathbb{R}} dz f(x = 0, y = 0, z) \text{sgn}(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} \frac{\hat{r}}{r^2} f(\mathbf{r}) - 2\pi \hat{k} \alpha \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} \delta(x) \delta(y) f(\mathbf{r}) + 2\pi \hat{k} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} \delta(x) \delta(y) \text{sgn}(z) f(\mathbf{r}) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} \left[\frac{\hat{r}}{r^2} - 2\pi \alpha \hat{k} \delta(x) \delta(y) + 2\pi \hat{k} \delta(x) \delta(y) \text{sgn}(z) \right] f(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

gdzie wprowadziliśmy funkcję delta Diraca i funkcję znaku. To oznacza równość dystrybucji

$$\begin{aligned} \langle \vec{D} \times \vec{A}, f \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} \vec{A}(\mathbf{r}) \times \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) = \\ &= \frac{g\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 \mathbf{r} \left[\frac{\hat{r}}{r^2} - 2\pi \alpha \hat{k} \delta(x) \delta(y) + 2\pi \hat{k} \delta(x) \delta(y) \text{sgn}(z) \right] f(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Więc mamy relację w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\vec{D} \times \left(\vec{\nabla} \Phi(\mathbf{r}) + \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{\alpha - \cos \theta}{r \sin \theta} \hat{\phi} \right) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\hat{r}}{r^2} - 2\pi\alpha \hat{k} \delta(x) \delta(y) + 2\pi \hat{k} \delta(x) \delta(y) \operatorname{sgn}(z) \right]. \quad (\text{B.38})$$

Jest to pole radialne za wyjątkiem osi z , gdzie mamy osobliwość - **strunę Diraca**. W powyższym wzorze pozostawiliśmy oznaczenie $\vec{\nabla}$ na gradient funkcji $\Phi(\mathbf{r})$, bo pochodna dystrybucyjna funkcji analitycznej jest równa zwykłej pochodnej (cząstkowej).

B.3. Monopol magnetyczny Diraca w modelu Zwanzigera

W modelu Zwanzigera wyrażamy składowe kartezjańskie pola indukcji magnetycznej \underline{B} przy pomocy wzorów z 4-potencjałami A_μ i B_μ ,

$$\underline{B}_1 = F_{23} = -F_{32} = -\partial_3 A_2 + \partial_2 A_3, \quad \underline{B}_2 = F_{31} = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3, \quad \underline{B}_3 = F_{12} = \partial_3 B_0 - \partial_0 B_3. \quad (\text{B.39})$$

Dla pola indukcji magnetycznej wytworzonej przez monopol magnetyczny g umieszczony w początku układu współrzędnych, otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$\partial_2 A_3(\mathbf{r}, t) - \partial_3 A_2(\mathbf{r}, t) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{x}{r^3}, \quad (\text{B.40a})$$

$$\partial_3 A_1(\mathbf{r}, t) - \partial_1 A_3(\mathbf{r}, t) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{y}{r^3}, \quad (\text{B.40b})$$

$$\partial_3 B_0(\mathbf{r}, t) - \partial_0 B_3(\mathbf{r}, t) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{z}{r^3}. \quad (\text{B.40c})$$

Ponieważ pole elektryczne dla statycznego monopola magnetycznego jest zerowe więc mamy dodatkowe równania

$$\partial_3 A_0(\mathbf{r}, t) = \partial_0 A_3(\mathbf{r}, t), \quad \partial_3 B_1(\mathbf{r}, t) = \partial_1 B_3(\mathbf{r}, t), \quad \partial_3 B_2(\mathbf{r}, t) = \partial_2 B_3(\mathbf{r}, t). \quad (\text{B.41})$$

Najprostsze stacjonarne rozwiązanie tych równań ma postać uwikłaną

$$A_i(\mathbf{r}) = -\frac{g\mu_0}{4\pi} \epsilon_{ij3} \partial_j \Lambda(\mathbf{r}), \quad B_0(\mathbf{r}) = -\frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad \partial_3 \Lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}, \quad (\text{B.42})$$

a pozostałe składowe 4-potencjałów znikają. Dalej będziemy rozważać szczególne rozwiązanie równania na $\Lambda(\mathbf{r})$

$$\Lambda(\mathbf{r}) = \Lambda(\rho, z) = \int_0^z d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + x^2 + y^2}} = \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho}, \quad (\text{B.43})$$

gdzie oznaczamy $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dla $\rho > 0$, funkcja $\Lambda(\rho, z)$ jest nieosobliwa dla wszystkich wartości z , więc jej pochodna dystrybucyjna D_z jest równa zwykłej pochodnej cząstkowej ∂_z . Chociaż w punkcie $\rho = 0$ mamy osobliwość dla $\Lambda(\rho, z)$, to jej dystrybucja dla funkcji próbnych $h(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2$

$$\langle \Lambda, h \rangle = \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} h(\rho, \varphi), \quad (\text{B.44})$$

jest dobrze zdefiniowana. Pozostaje nam sprawdzenie pochodnej dystrybucyjnej w podprzestrzeni \mathbb{R}^2 $\vec{D}_\perp = (D_x, D_y)$

$$\langle \vec{D}_\perp \Lambda, h \rangle = -\langle \Lambda, \vec{\nabla}_\perp h \rangle = -\int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\varphi}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) h(\rho, \varphi). \quad (\text{B.45})$$

Naszym celem jest wykonanie całkowania przez części i rozpoczniemy od całki kątowej

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \hat{\varphi} \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = -\int_0^{2\pi} d\varphi h(\rho, \varphi) \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = \hat{\rho} \int_0^{2\pi} d\varphi h(\rho, \varphi) \quad (\text{B.46})$$

bo zachodzą relacje

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} = -\hat{\rho}, \quad \hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(2\pi) = \hat{j}, \quad h(\rho, 0) = h(\rho, 2\pi). \quad (\text{B.47})$$

Pozostaje nam całka radialna, która po wycalkowaniu przez części

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\rho \rho \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \right) h(\rho, \varphi) &= \int_0^\infty d\rho \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho h(\rho, \varphi)) \\ &= -\int_0^\infty d\rho h(\rho, \varphi) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} = \\ &= \boxed{-\int_0^\infty d\rho h(\rho, \varphi) \rho \left[\frac{\rho}{\rho^2 + z^2 + z\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \frac{1}{\rho} \right]} = \int_0^\infty d\rho h(\rho, \varphi) \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

daje całkę nam dobrze zdefiniowaną dla dowolnej wartości z , co jawnie widać we wzorze w ramce, a dla ostatecznej postaci całki jest dowiedzione w B.3.1. To prowadzi do regularnej dystrybucji

$$\langle \vec{D}_\perp \Lambda, h \rangle = -z \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\hat{\rho}}{\rho \sqrt{\rho^2 + z^2}} h(\rho, \varphi), \quad (\text{B.49})$$

a więc w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ mamy relację zgodną ze zwykłą pochodną cząstkową

$$\vec{D}_\perp \Lambda(\rho, z) = -\frac{\vec{\rho}}{\rho^2} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \vec{\nabla}_\perp \Lambda(\rho, z), \quad (\text{B.50})$$

gdzie $\vec{\rho} = (x, y)$. Stąd mamy składowe 4-potencjału

$$A_1(\mathbf{r}) = -\frac{g\mu_0}{4\pi} \partial_2 \Lambda(\rho, z) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{y}{\rho^2} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \quad (\text{B.51a})$$

$$A_2(\mathbf{r}) = \frac{g\mu_0}{4\pi} \partial_1 \Lambda(\rho, z) = -\frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{x}{\rho^2} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (\text{B.51b})$$

Pochodna cząstkowa ∂_3 tych potencjałów wynika ze wzoru

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\rho^2}{r^3} \quad (\text{B.52})$$

i zgadza się ze wzorami (B.40a) i (B.40b). Sprawdzamy kombinację pochodnych cząstkowych: $\partial_i A_i = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 = 0$, która znika na mocy równania (B.42). Dla pochodnych dystrybucyjnych mamy

$$\begin{aligned} \langle D_1 A_1 + D_2 A_2, h \rangle &= -\langle A_1, \partial_1 h \rangle - \langle A_2, \partial_2 h \rangle = \frac{g\mu_0}{4\pi} \langle D_2 \Lambda, \partial_1 h \rangle - \frac{g\mu_0}{4\pi} \langle D_1 \Lambda, \partial_2 h \rangle = \\ &= -\frac{g\mu_0}{4\pi} \langle \Lambda, (\partial_2 \partial_1 - \partial_1 \partial_2) h \rangle \equiv 0, \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

bo dla funkcji próbnej pochodne mieszane są przemienne. Możemy dlatego mówić, że nasze rozwiązanie spełnia warunek cechowania $\partial_i A_i = \partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 = 0$ w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Następnie rozważmy kombinację $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$, która dla dystrybucji ma postać

$$\begin{aligned} \langle D_1 A_2 - D_2 A_1, h \rangle &= -\langle A_2, \partial_1 h \rangle + \langle A_1, \partial_2 h \rangle = -\frac{g\mu_0}{4\pi} \langle D_1 \Lambda, \partial_1 h \rangle - \frac{g\mu_0}{4\pi} \langle D_2 \Lambda, \partial_2 h \rangle = \\ &= \frac{g\mu_0}{4\pi} \langle \Lambda, (\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2) h \rangle = \frac{g\mu_0}{4\pi} \langle \Lambda, \Delta_{\perp} h \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Musimy wyznaczyć dystrybucję

$$\langle \Lambda, \Delta_{\perp} h \rangle = \int_0^{\infty} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 h(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] \quad (\text{B.55})$$

Naszym celem jest wykonanie całkowania przez części i rozpoczynamy od całki kątowej

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial^2 h(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} - \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi} = 0 \quad (\text{B.56})$$

bo punkty $(\rho, \varphi = 0)$ i $(\rho, \varphi = 2\pi)$ pokrywają się. Pozostaje nam całka radialna, która po wycalkowaniu przez części daje

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\rho \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right) &= - \int_0^{\infty} d\rho \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} = \\ &= - \int_0^{\infty} d\rho \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \rho \left[\frac{\rho}{\rho^2 + z^2 + z\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \frac{1}{\rho} \right] = \int_0^{\infty} d\rho \frac{\partial h(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \\ &= h(0, \varphi) \frac{z}{|z|} - \int_0^{\infty} d\rho h(\rho, \varphi) \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \\ &= h(0, 0) \operatorname{sgn}(z) + \int_0^{\infty} d\rho \rho h(\rho, \varphi) \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

gdzie wykorzystaliśmy fakt, że w początku układu współrzędnych nie ma zależności od kąta φ . Uzupełniając całkowanie po φ mamy dystrybucję w postaci

$$\begin{aligned} \langle \Lambda, \Delta_{\perp} h \rangle &= 2\pi h(0, 0) \operatorname{sgn}(z) + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho \rho h(\rho, \varphi) \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= 2\pi \operatorname{sgn}(z) \langle \delta_{\perp}^2, h \rangle + \left\langle \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}, h \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Ostatecznie mamy relację w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$D_1 A_2 - D_2 A_1 = \frac{g\mu_0}{4\pi} \left(2\pi \operatorname{sgn}(z) \delta(x) \delta(y) + \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{g\mu_0}{2} \operatorname{sgn}(z) \delta(x) \delta(y) + \partial_3 B_0. \quad (\text{B.59})$$

To oznacza, że dla naszego rozwiązania składowa tensora Cabibbo-Ferrariiego

$$\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + \epsilon_{1230} (\partial^3 B^0 - \partial^0 B^3) = \frac{g\mu_0}{2} \operatorname{sgn}(z) \delta(x) \delta(y) \quad (\text{B.60})$$

składa się jedynie ze struny wzdłuż osi z ,

Ogólna postać rozwiązania stacjonarnego dla 4-potencjałów

$$B_0(\mathbf{r}) = -\frac{g\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r}, \quad B_i(\mathbf{r}) = \partial_i \Phi_B(\mathbf{r}), \quad (\text{B.61a})$$

$$A_0(\mathbf{r}) = 0, \quad A_i(\mathbf{r}) = \partial_i \Phi_A(\mathbf{r}) - \epsilon_{ij3} \frac{g\mu_0}{4\pi} \partial_j \bar{\Lambda}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.61b})$$

gdzie $\Phi_A(\mathbf{r})$ i $\Phi_B(\mathbf{r})$ są dowolnymi funkcjami analitycznymi w całej przestrzeni \mathbb{R}^3 , natomiast $\bar{\Lambda}(\mathbf{r})$ ma postać

$$\bar{\Lambda}(\mathbf{r}) = \ln \frac{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho} + \Lambda_0(x, y) \quad (\text{B.61c})$$

gdzie $\Lambda_0(x, y)$ jest dowolną funkcją analityczną w całej podprzestrzeni \mathbb{R}^2 . Funkcje $\Phi_{A,B}(\mathbf{r})$ znikają dla wielkości niezmienniczych od cechowania, takich jak tensor pola elektromagnetycznego $F_{\mu\nu}$ czy tensor Cabibbo-Ferrariiego $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial^\lambda B^\rho$, dlatego możemy uważać je za funkcje generujące transformacje cechowania. Natomiast funkcja $\Lambda_0(x, y)$ znika dla tensora pola elektromagnetycznego $F_{\mu\nu}$, ale może wnieść wkład do tensora Cabibbo-Ferrariiego - modyfikując postać struny w $\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + \epsilon_{12\lambda\rho} \partial^\lambda B^\rho$.

B.3.1. Dowód granicy całki (B.48) dla $z \rightarrow 0$

Ponieważ badamy całkę radialną więc oznaczamy $h(\rho, \varphi) = h(\rho)$ i całkę pomocniczą dzielimy na 2 części

$$\int_0^\infty d\rho \frac{h(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_0^{z_0} d\rho \frac{h(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \int_{z_0}^\infty d\rho \frac{h(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (\text{B.62})$$

gdzie $z_0 > |z|$. Rozpocznijmy analizę od części pierwszej

$$\begin{aligned} \int_0^{z_0} d\rho \frac{h(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} &= h(0) \int_0^{z_0} d\rho \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + \int_0^{z_0} d\xi \frac{h(\rho) - h(0)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \\ &= h(0) \ln \frac{z_0 + \sqrt{z_0^2 + z^2}}{|z|} + \int_0^{z_0} d\xi \frac{\rho h_1(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Wykorzystaliśmy tutaj własność dowolnej funkcji analitycznej $h(\rho)$: $h(\rho) - h(0) = \rho h_1(\rho)$ dla $\rho \in \langle 0, z_0 \rangle$, gdzie $h_1(\rho)$ jest również funkcją analityczną. Ponieważ wyrażenie podcałkowe $\rho h_1(\rho) / \sqrt{\rho^2 + z^2} \rightarrow h_1(\rho)$ dla $z \rightarrow 0$, więc ostatecznie część pierwsza badanej całki

dla $z \rightarrow 0$ ma strukturę

$$\int_0^{z_0} d\rho \frac{h(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = h(0) \ln \frac{2z_0}{|z|} + \int_0^{z_0} d\rho h_1(\rho) + 0(z). \quad (\text{B.64})$$

Dla drugiej części całki otrzymujemy, gdy $z \rightarrow 0$

$$\int_{z_0}^{\infty} d\rho \frac{h(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_{z_0}^{\infty} d\rho \frac{h(\rho)}{\rho} + 0(z). \quad (\text{B.65})$$

Stąd ostatecznie mamy granicę

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} z \int_0^{\infty} d\rho \frac{h(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \lim_{|z| \rightarrow 0} z \left(h(0) \ln \frac{2z_0}{|z|} + \int_0^{z_0} d\rho h_1(\rho) + \int_{z_0}^{\infty} d\rho \frac{h(\rho)}{\rho} \right) = 0, \quad (\text{B.66})$$

bo $z \ln z = 0$ dla $z \rightarrow 0$. To kończy dowód, że całka (B.48) istnieje w granicy $z \rightarrow 0$, a co z tego wynika – jest dobrze zdefiniowana dla dowolnej wartości z .

C. Własności wybranych funkcji osobliwych

C.1. Funkcja osobliwa d'Alemberta D_+

Definiujemy funkcję osobliwą d'Alemberta $D_+(x)$ przez jej 3-wymiarowe przedstawienie Fouriera

$$D_+(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2|\mathbf{k}|}. \quad (\text{C.1})$$

Funkcja ta spełnia równanie falowe d'Alemberta

$$\partial_\mu \partial^\mu D_+(x) = \square D_+(x) = 0. \quad (\text{C.2})$$

Obliczając całki pędlowe we współrzędnych sferycznych otrzymujemy

$$D_+(x) = D_+(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln(\mathcal{M}^2 |t^2 - r^2|) + i \frac{\pi}{2} \Theta(t^2 - r^2) \text{sgn}(t) \right], \quad (\text{C.3})$$

gdzie $r = |\mathbf{x}|$ i $\mathcal{M} > 0$ jest dowolną stałą. Powyższy wzór prowadzi do następujących własności

$$D_+(t, -\mathbf{x}) = D_+(t, \mathbf{x}), \quad D_+(-t, \mathbf{x}) = [D_+(t, \mathbf{x})]^*, \quad (\text{C.4a})$$

gdzie gwiazdka oznacza sprzężenie zespolone i dla parametru skalowania $l > 0$ mamy

$$D_+(lt, l\mathbf{x}) = l^{-2} D_+(t, \mathbf{x}). \quad (\text{C.4b})$$

Dla skalowania infinytesymalnego $l = 1 + \epsilon$ otrzymujemy

$$D_+(lt, l\mathbf{x}) \simeq D_+(t, \mathbf{x}) + \epsilon \left(t \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{x} \cdot \nabla \right) D_+(t, \mathbf{x}), \quad (\text{C.5a})$$

$$(1 + \epsilon)^{-2} D_+(t, \mathbf{x}) \simeq (1 - 2\epsilon) D_+(t, \mathbf{x}), \quad (\text{C.5b})$$

co prowadzi do równania różniczkowego dla transformacji skalowania

$$x^\mu \partial_\mu D_+(t, \mathbf{x}) = -2D_+(t, \mathbf{x}). \quad (\text{C.5c})$$

Możemy więc zapisać jawną postać

$$D_+(x) = D_+(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\ln(\mathcal{M}^2 |x^2|) + i \frac{\pi}{2} \Theta(x^2) \text{sgn}(t) \right], \quad (\text{C.6})$$

gdzie $x^2 = t^2 - r^2$, która jest jawnie lorentzowsko niezmiennicza, ponieważ x^2 jest niezmiennicze, jak również $\text{sgn}(t)$ dla $x^2 \geq 0$.

$$D_+(\Lambda x) = D_+(x), \quad (\text{C.7})$$

gdzie $(\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ dla dowolnej macierzy transformacji Lorentza Λ^μ_ν . Dla infinitesimalnej transformacji Lorentza mamy więc $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$, z $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$. Zatem $(\Lambda x)^\mu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$ i

$$D_+(\Lambda x) \simeq D_+(x) + \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu D_+(x) = D_+(x) + \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} (x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) D_+(x) \quad (\text{C.8})$$

oraz symetria Lorentza prowadzi do następującego równania różniczkowego

$$(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu) D_+(x) = 0. \quad (\text{C.9})$$

C.2. Funkcja osobliwa dla cechowania planarnego E_+

Definiujemy

$$E_+(x) = E_+(t, \mathbf{x}) := \partial_3^{-1} \star D_+(x) \quad (\text{C.10})$$

z operatorem całkowym $\partial_3^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \text{sgn}(x^3) \delta^2(\mathbf{x}_\perp)$. Mamy ogólną relację całkową

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \text{sgn}(x - \xi) f(\xi) = 2 \int_0^x d\xi f(\xi) - \int_{\mathbb{R}} d\xi \text{sgn}(\xi) f(\xi). \quad (\text{C.11})$$

Ponieważ w naszym przypadku $D_+(x^0, x_\perp, x^3) = D_+(x^0, x_\perp, -x^3)$, wówczas ostatnia całka znika i uzyskujemy

$$E_+(x) = E_+(t, \mathbf{x}) = \int_0^{x^3} d\xi D_+(x^0, x_\perp, \xi). \quad (\text{C.12})$$

Ta reprezentacja jest bardzo przydatna w dowodzie następującej własności funkcji $E_+(x)$

$$E_+(-t, \mathbf{x}) = \int_0^{x^3} d\xi D_+(-t, x_\perp, \xi) = \int_0^{x^3} d\xi [D_+(t, x_\perp, \xi)]^* = [E_+(t, \mathbf{x})]^*$$

tak więc

$$E_+(-t, \mathbf{x}) = [E_+(t, \mathbf{x})]^*, \quad (\text{C.13a})$$

$$E_+(t, -\mathbf{x}_\perp, x^3) = \int_0^{x^3} d\xi D_+(t, x_\perp, \xi) = E_+(t, \mathbf{x}_\perp, x^3), \quad (\text{C.13b})$$

$$E_+(t, \mathbf{x}_\perp, -x^3) = \int_0^{-x^3} d\xi D_+(t, x_\perp, \xi) = - \int_0^{x^3} d\xi D_+(t, x_\perp, -\xi) = - \int_0^{x^3} d\xi D_+(t, x_\perp, \xi)$$

oraz

$$E_+(t, \mathbf{x}_\perp, -x^3) = -E_+(t, \mathbf{x}_\perp, x^3). \quad (\text{C.13c})$$

C.3. Funkcja osobliwa $\mathfrak{D}_+(x)$

Definiujemy funkcję osobliwą $\mathfrak{D}_+(x)$ przez całkę fourierowską

$$\mathfrak{D}_+(x) := \partial_0 \Delta^{-1} \star D_+(x) = i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2|\mathbf{k}|^2}, \quad (\text{C.14})$$

która spełnia równanie falowe d'Alamberta

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \mathfrak{D}_+(x) = \square \mathfrak{D}_+(x) = 0.} \quad (\text{C.15})$$

Dalej $\mathfrak{D}_+(x)$ może być wyrażona przez

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_+(x) &= i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2|\mathbf{k}|} \frac{e^{-i|\mathbf{k}|x^0} - 1}{|\mathbf{k}|} + i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2|\mathbf{k}|^2} = \\ &= \int_0^{x^0} d\tau D_+(\tau, \mathbf{x}) + \frac{i}{8\pi} \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Tak więc mamy przedstawienie całkowe

$$\boxed{\mathfrak{D}_+(t, \mathbf{x}) = \int_0^t d\tau D_+(\tau, \mathbf{x}) + \frac{i}{8\pi} \frac{1}{r},} \quad (\text{C.17})$$

które prowadzi do następujących własności

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_+(-t, \mathbf{x}) &= \int_0^{-t} d\tau D_+(\tau, \mathbf{x}) + \frac{i}{8\pi} \frac{1}{r} = - \int_0^t d\tau D_+(-\tau, \mathbf{x}) + \frac{i}{8\pi} \frac{1}{r} = \\ &= - \int_0^t d\tau [D_+(\tau, \mathbf{x})]^* + \frac{i}{8\pi} \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (\text{C.18a})$$

więc

$$\boxed{\mathfrak{D}_+(-t, \mathbf{x}) = -[\mathfrak{D}_+(t, \mathbf{x})]^*,} \quad (\text{C.18b})$$

$$\boxed{\mathfrak{D}_+(t, -\mathbf{x}) = \int_0^t d\tau D_+(\tau, -\mathbf{x}) + \frac{i}{8\pi} \frac{1}{r} = \mathfrak{D}_+(t, \mathbf{x}).} \quad (\text{C.18c})$$

C.4. Funkcja osobliwa dla cechowania stożka świetlnego G_+

Funkcję $G_+(x)$ definiujemy jako następującą 3-wymiarową całkę Fouriera

$$G_+(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\perp^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \frac{|\vec{k}|}{2|\vec{k}|} e^{-ik \cdot x} - \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right], \quad (\text{C.19})$$

gdzie $k \cdot x = |\vec{k}|x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$ i $\vec{k} \cdot \vec{x} = k_\perp \cdot x_\perp + k_1(x^0 + \alpha x^1)$. Z równania różniczkowego

$$\partial_- G_+(x) = D_+(x) \quad (\text{C.20})$$

i warunku

$$G_+(x^+, x^- = 0, \mathbf{x}_\perp) = 0. \quad (\text{C.21})$$

znajdujemy skończone przedstawienie całkowe

$$G_+(x) = G_+(x^+, x^-, \mathbf{x}_\perp) = \int_0^{x^-} d\xi D_+(x^+, \xi, \mathbf{x}_\perp), \quad (\text{C.22})$$

z

$$\begin{aligned} D_+(x^+, x^-, \mathbf{x}_\perp) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{x_\perp} \frac{\partial}{\partial x_\perp} \left[\ln(\mathcal{M}^2 |4x^+ x^- - x_\perp^2|) + i\frac{\pi}{2} \Theta(4x^+ x^- - x_\perp^2) \text{sgn}(x^+ + x^-) \right] \\ &= D_+(x^-, x^+, \mathbf{x}_\perp), \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

gdzie $x_\perp = |\mathbf{x}_\perp|$.

Dla transformacji odwrócenia czasu mamy

$$t \rightarrow -t, \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \iff x^+ \rightarrow -x^-, x^- \rightarrow -x^+, x_\perp \rightarrow x_\perp \quad (\text{C.24a})$$

zatem

$$G_+(-t, \mathbf{x}) = G_+(-x^-, -x^+, \mathbf{x}_\perp) = \int_0^{-x^+} d\xi D_+(-x^-, \xi, \mathbf{x}_\perp) = - \int_0^{x^+} d\xi D_+(-x^-, -\xi, \mathbf{x}_\perp), \quad (\text{C.24b})$$

ale mamy również

$$D_+(-x^-, -x^+, \mathbf{x}_\perp) = [D_+(x^+, x^-, \mathbf{x}_\perp)]^* = [D_+(x^-, x^+, \mathbf{x}_\perp)]^* \quad (\text{C.24c})$$

więc

$$G_+(-t, \mathbf{x}) = - \int_0^{x^+} d\xi D_+(-x^-, -\xi, \mathbf{x}_\perp) = - \int_0^{x^+} d\xi [D_+(x^-, \xi, \mathbf{x}_\perp)]^* = -[G_+(x^-, x^+, \mathbf{x}_\perp)]^* \quad (\text{C.24d})$$

Wiemy również, że

$$G_+(x^-, x^+, \mathbf{x}_\perp) = G_+(t, \mathbf{x}_\perp, -x^3) \quad (\text{C.24e})$$

co daje ostatecznie

$$G_+(-t, \mathbf{x}_\perp, x^3) = - \int_0^{x^+} d\xi [D_+(x^-, \xi, \mathbf{x}_\perp)]^* = -[G_+(t, \mathbf{x}_\perp, -x^3)]^*. \quad (\text{C.24f})$$

Dla transformacji parzystości mamy

$$t \rightarrow t, \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \iff x^+ \rightarrow x^-, x^- \rightarrow x^+, x_\perp \rightarrow x_\perp \quad (\text{C.25a})$$

więc

$$G_+(t, -\mathbf{x}) = G_+(x^-, x^+, -\mathbf{x}_\perp) = \int_0^{x^+} d\xi D_+(x^-, \xi, \mathbf{x}_\perp). \quad (\text{C.25b})$$

C.5. Odwrotny operator Laplace'a w d wymiarach

Zdefiniujmy odwrotny operator Laplace'a w d wymiarach jako całkę Fouriera

$$(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2}, \quad (\text{C.26})$$

która ewidentnie spełnia równanie różniczkowe

$$\Delta(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\delta^d(\mathbf{x}), \quad (\text{C.27})$$

gdzie $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ jest operatorem Laplace'a. Jednak, gdy próbujemy obliczyć całkę Fouriera w (C.26) dla $\mathbf{x} \neq 0$, wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-1}(\mathbf{x}) &= \int_0^\infty d\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-\alpha|\mathbf{k}|^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \alpha^{1-d/2} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4\alpha}} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(d/2 - 1) \left(\frac{\mathbf{x}^2}{4}\right)^{1-d/2} = \frac{1}{4\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{r^{d-2}}, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

gdzie $r = |\mathbf{x}|$. Dla $d = 2$ otrzymujemy źle zdefiniowane wyrażenie $\Gamma(0)$, co oznacza, że $(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x})$ nie może być zdefiniowane przez całkę fourierowską.

W d wymiarach operator Laplace'a działa w następujący sposób

$$\Delta \frac{1}{r^a} = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{d-1} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^a} \right) = \frac{a(a+2-d)}{r^{a+2}}, \quad (\text{C.29})$$

tak więc dla $\mathbf{x} \neq 0$ znajdujemy gdy $a = d - 2$.

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} = 0. \quad (\text{C.30})$$

Zgodnie ze wzorem Gaussa znajdujemy następującą nieznikającą całkę w d wymiarach

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{x}| \leq R} d^d x \Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} &= \oint_{|\mathbf{x}|=R} d\mathbf{a} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} = \left(S_d R^{d-1} \right) \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{d-2}} \Big|_{r=R} = \\ &= (2-d) S_d = (2-d) \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = -\frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 - 1)}, \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

gdzie $S_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ jest powierzchnią sfery jednostkowej w d wymiarach. Możemy stwierdzić, że

$$\Delta \frac{1}{|x|^{d-2}} = -\frac{4\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2-1)}\delta^d(\mathbf{x}), \quad (\text{C.32})$$

zgodnie z (C.28), zgadza się z (C.27).

Pochodna cząstkowa odwrotnego operatora Laplace'a w d wymiarach wynosi

$$\nabla(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^d}, \quad (\text{C.33})$$

więc dla $d = 3$ znajdujemy oczekiwane znane wyrażenie

$$(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad \nabla(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (\text{C.34})$$

podczas, gdy dla $d = 2$ mamy

$$\partial_i(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_i}{|\mathbf{x}|^2}. \quad (\text{C.35})$$

Oznacza to, że w $d = 2$ pochodna cząstkowa $\partial_i(-\Delta)^{-1}(\mathbf{x})$ posiada swoją reprezentację w postaci całki Fouriera.

C.6. Operator Laplace'a z ułamkowym wykładnikiem

Możemy zdefiniować operator Laplace'a z ujemnym wykładnikiem ułamkowym (LUWU), dla $a > 0$, jako całkę Fouriera w d wymiarach

$$(-\Delta)^{-a}(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(\mathbf{k}^2)^a}. \quad (\text{C.36})$$

Możemy ją wykonać, wprowadzając parametr Schwingera α , aby całkować kolejno

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{-a}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \alpha^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-\alpha k^2} = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \alpha^{a-d/2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} = \frac{1}{4^a \pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - a)}{\Gamma(a)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2a}} \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

Dalej możemy wprowadzić naturalną definicję splotu dwóch operatorów LUWU

$$\begin{aligned} [(-\Delta)^{-a} \star (-\Delta)^{-b}](\mathbf{x} - \mathbf{y}) &:= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \boldsymbol{\xi} (-\Delta)^{-a}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) (-\Delta)^{-b}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}) = \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - a)\Gamma(\frac{d}{2} - b)}{4^{a+b} \pi^d \Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \boldsymbol{\xi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{d-2a}} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{d-2b}} \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Całka po $\boldsymbol{\xi}$ jest bezwzględnie zbieżna dla $d > 2(a+b)$, $a > 0$, $b > 0$ i możemy ją sprowadzić do całkowania Gaussowskiego, dla dwóch parametrów Schwingera α i β

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^d} d^d \boldsymbol{\xi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{d-2a}} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{d-2b}} &= \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2} - a)\Gamma(\frac{d}{2} - b)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \alpha^{\frac{d}{2}-a} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \beta^{\frac{d}{2}-b} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \boldsymbol{\xi} e^{-\alpha(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})^2} e^{-\beta(\mathbf{y}-\boldsymbol{\xi})^2} = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2} - a)\Gamma(\frac{d}{2} - b)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha} \alpha^{\frac{d}{2}-a} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta} \beta^{\frac{d}{2}-b} \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta}\right)^{d/2} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2} = \\
 &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} - a)\Gamma(\frac{d}{2} - b)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{1+a}} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta^{1+b}} \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right)^{d/2} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}. \quad (\text{C.39})
 \end{aligned}$$

Całki parametryczne można przekształcić do postaci reprezentacji całkowych dla funkcji Gamma i Beta Eulera, jeżeli dokonamy zamiany zmiennych całkowania $\alpha = u\lambda$, $\beta = (1-u)\lambda$, zatem $d\alpha d\beta = du d\lambda \lambda$,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{1+a}} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta^{1+b}} \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right)^{d/2} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z^2} &= \\
 &= \int_0^1 du u^{d/2-a-1} (1-u)^{d/2-b-1} \times \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{d/2-a-b} e^{-\lambda u(1-u)z^2} = \\
 &= \frac{\Gamma(d/2 - a - b)}{|z|^{d-2a-2b}} \int_0^1 du u^{b-1} (1-u)^{a-1} = \frac{\Gamma(d/2 - a - b) \Gamma(a)\Gamma(b)}{|z|^{d-2a-2b} \Gamma(a+b)}. \quad (\text{C.40})
 \end{aligned}$$

To prowadzi do

$$\int_{\mathbb{R}^d} d^d \boldsymbol{\xi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{d-2a}} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}|^{d-2b}} = \frac{\pi^{d/2}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2a-2b}} \frac{\Gamma(d/2 - a - b)}{\Gamma(\frac{d}{2} - a)\Gamma(\frac{d}{2} - b)} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (\text{C.41})$$

i ostatecznie mamy

$$\begin{aligned}
 [(-\Delta)^{-a} \star (-\Delta)^{-b}] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \boldsymbol{\xi} (-\Delta)^{-a}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) (-\Delta)^{-b}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{y}) = \\
 &= \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - a)\Gamma(\frac{d}{2} - b)}{4^{a+b}\pi^d \Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\pi^{d/2}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2a-2b}} \frac{\Gamma(d/2 - a - b)}{\Gamma(\frac{d}{2} - a)\Gamma(\frac{d}{2} - b)} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \\
 &= \frac{1}{4^{a+b}\pi^{d/2}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d-2(a-b)}} \frac{\Gamma(d/2 - a - b)}{\Gamma(a+b)} = (-\Delta)^{-a-b}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{C.42})
 \end{aligned}$$

co oznacza, że **spłot dwóch operatorów LUWU jest również operatorem LUWU**. Działanie operatora Laplace'a na operator LUWU (dla wykładnika $0 < a < 1$)

$$\begin{aligned}
 (-\Delta)(-\Delta)^{-a}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4^a\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - a)}{\Gamma(a)} \Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2a}} = -\frac{1}{4^a\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - a)}{\Gamma(a)} \frac{(d-2a)(2-2a)}{|\mathbf{x}|^{d-2a+2}} = \\
 &= \frac{1}{4^{a-1}\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - a + 1)}{\Gamma(a-1)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2a+2}} = (-\Delta)^{1-a}(\mathbf{x}). \quad (\text{C.43})
 \end{aligned}$$

Ponieważ $0 < 1 - a < 1$, więc **powyższe wyrażenie może być uznane za definicję** operatora Laplace'a z dodatnim wykładnikiem ułamkowym (LDWU). To prowadzi do wyrażenia na spłot dwóch operatorów LDWU

$$\begin{aligned} \left[(-\Delta)^{1-a} \star (-\Delta)^{1-b} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) &:= (-\Delta)_x (-\Delta)_y \left[(-\Delta)^{-a} \star (-\Delta)^{-b} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= (-\Delta)_x (-\Delta)_y (-\Delta)^{-a-b} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (-\Delta)^{2-a-b} (\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

który jest również operatorem LDWU. Dalej, możemy zdefiniować spłot operatorów LUWU i LDWU

$$\begin{aligned} \left[(-\Delta)^{1-a} \star (-\Delta)^{-b} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) &:= (-\Delta)_x \left[(-\Delta)^{-a} \star (-\Delta)^{-b} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= (-\Delta)_x (-\Delta)^{-a-b} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (-\Delta)^{1-a-b} (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Ważnym szczególnym przypadkiem takiego spłotu jest

$$\begin{aligned} \left[(-\Delta)^{1-a} \star (-\Delta)^{a-1} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= (-\Delta)_x \left[(-\Delta)^{-a} \star (-\Delta)^{a-1} \right] (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \\ &= (-\Delta)_x (-\Delta)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^d (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

D. Funkcja $D_+(x)$ jako dystrybucja

D.1. Niezmiennicza funkcja osobliwa $D_+(x)$

Funkcja $D_+(x)$ jest zdefiniowana przez 3-wymiarową całkę Fouriera

$$D_+(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2|\mathbf{k}|}, \quad (\text{D.1})$$

gdzie $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = |\mathbf{k}|t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ i używamy naturalnego układu jednostek $c = \hbar = 1$. Całkowanie po pędach możemy wykonać we współrzędnych sferycznych k, θ, φ , najpierw po kątach:

$$\begin{aligned} D_+(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-ikt} e^{+ikr \cos\theta} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk e^{-ikt} (e^{ikr} - e^{-ikr}), \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

gdzie $r = |\mathbf{x}|$. Pozostała całka po k nie jest zbieżna w górnej granicy i musimy nadać jej sens matematyczny.

D.1.1. $D_+(x)$ jako dystrybucja w \mathbb{R} .

Rozważmy **regularyzację analityczną**, która polega na wprowadzeniu do całki (D.2) czynnika gaszącego $e^{-\epsilon k}$, dla $\epsilon > 0$, aby całka po k była bezwzględnie zbieżna. Ten zabieg można uważać za rozszerzenie analityczne zmiennej $t \rightarrow t - i\epsilon$ z osi rzeczywistej do dolnej półpłaszczyzny zespolonej - stąd nazwa **regularyzacja analityczna**. Teraz całka po k prowadzi do wyniku

$$D_+^\epsilon(x) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{t+r-i\epsilon} - \frac{1}{t-r-i\epsilon} \right) = D_+^\epsilon(t, r). \quad (\text{D.3})$$

Niezmiennicza funkcja osobliwa $D_+(x)$ jest teraz zdefiniowana jako granica $\epsilon \rightarrow 0^+$

$$D_+(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} D_+^\epsilon(t, r) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{t+r-i0} - \frac{1}{t-r-i0} \right) = D_+(t, r). \quad (\text{D.4})$$

gdzie wprowadziliśmy, często używane w literaturze, oznaczenie

$$\frac{1}{z \pm i0} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{z \pm i\epsilon}.$$

Dla $t \pm r \neq 0$ granica $\epsilon \rightarrow 0^+$ istnieje jako granica funkcji

$$D_+(t, r) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{t+r} - \frac{1}{t-r} \right) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{t^2 - r^2}. \quad (\text{D.5})$$

Aby rozważyć przypadki $t \pm r = 0$, należy wykonać granicę $\epsilon \rightarrow 0^+$ dla dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zdefiniowanej przez całkę

$$\langle D_+, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} dt D_+(t, r) g(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} dt D_+^\epsilon(t, r) g(t), \quad (\text{D.6})$$

gdzie $g(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ jest funkcją próbną. Mamy do wyznaczenia dystrybucję

$$\int_{\mathbb{R}} dz \frac{g(z)}{z - a - i0} = \int_{C(a)} dz \frac{g(z)}{z - a}, \quad (\text{D.7})$$

gdzie kontur $C(a)$ jest osią liczb rzeczywistych zmodyfikowaną na powierzchni zespolonej przez półokrąg obchodzący punkt $z = a$ od dołu. To wynika z **podstawowego twierdzenia Cauchy'ego**. Jeżeli półokrąg ma środek w punkcie $z = a$ i promień δ , to całkę po $C(a)$ możemy zapisać w postaci

$$\int_{C(a)} dz \frac{g(z)}{z - a} = \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{a+\delta}^{\infty} \right) dz \frac{g(z)}{z - a} + i \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi g(a + \delta e^{i\varphi}). \quad (\text{D.8})$$

Ponieważ wartość całki po $C(a)$ nie zależy od wartości δ , więc w granicy $\delta \rightarrow 0^+$

$$\int_{\mathbb{R}} dz \frac{g(z)}{z - a - i0} = \int_{C(a)} dz \frac{g(z)}{z - a} = \int_{\mathbb{R}} dz \frac{g(z)}{z - a} + i\pi g(a). \quad (\text{D.9})$$

gdzie wprowadziliśmy **wartość główną Cauchy'ego** całki

$$\int_{\mathbb{R}} := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{a-\delta} + \int_{a+\delta}^{\infty} \right),$$

Definiujemy dystrybucje: wartość główną Cauchy'ego $\mathcal{PV}(1/z)$ i deltę Diraca $\delta(z - a)$

$$\int_{\mathbb{R}} dz \mathcal{PV} \left(\frac{1}{z - a} \right) g(z) := \int_{\mathbb{R}} dz \frac{g(z)}{z - a}, \quad \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \delta(z - a) := g(a). \quad (\text{D.10})$$

Teraz możemy zapisać (D.9) jako równość dystrybucji

$$\int_{\mathbb{R}} dz \frac{g(z)}{z - a - i0} = \int_{\mathbb{R}} dz \mathcal{PV} \left(\frac{1}{z - a} \right) g(z) + i\pi \int_{\mathbb{R}} dz g(z) \delta(z - a), \quad (\text{D.11a})$$

więc w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mamy równość

$$\frac{1}{z - a - i0} = \mathcal{PV} \left(\frac{1}{z - a} \right) + i\pi \delta(z - a). \quad (\text{D.11b})$$

To pozwala dystrybucję (D.6) wyrazić jako

$$\langle D_+, g \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r} \left[\int_{\mathbb{R}} dt \frac{g(t)}{t+r} - \int_{\mathbb{R}} dt \frac{g(t)}{t-r} + i\pi g(-r) - i\pi g(r) \right], \quad (\text{D.12})$$

co prowadzi do $D_+(t, r)$ w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$D_+(t, r) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2r} \left[\mathcal{PV} \frac{1}{t+r} - \mathcal{PV} \frac{1}{t-r} + i\pi \delta(t+r) - i\pi \delta(t-r) \right]. \quad (\text{D.13})$$

We wzorze (D.13), t jest zmienną po której całkujemy, natomiast r jest dowolnym, ciągłym, nieujemnym parametrem.

D.1.2. Pochodna dystrybucji i pochodna dystrybucyjna

Rozważmy pochodną dystrybucji wartości głównej Cauchy'ego po parametrze

$$\frac{d}{da} \int_{\mathbb{R}} dz \mathcal{PV} \left(\frac{1}{z-a} \right) g(z) = \int_{\mathbb{R}} dz \mathcal{PV} \left(\frac{1}{z-a} \right) g'(z) = - \int_{\mathbb{R}} dz \mathbf{D}_z \left[\mathcal{PV} \left(\frac{1}{z-a} \right) \right] g(z), \quad (\text{D.14})$$

gdzie pochodna dystrybucyjna $\mathbf{D}_z F(z)$ jest zdefiniowana przez równość dystrybucji

$$\langle \mathbf{D}F, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} dz \mathbf{D}_z F(z) g(z) := - \int_{\mathbb{R}} dz F(z) g'(z) = - \langle F, g' \rangle.$$

To prowadzi do równości w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{d}{da} \mathcal{PV} \frac{1}{z \pm a} = \pm \mathbf{D}_z \mathcal{PV} \frac{1}{z \pm a}. \quad (\text{D.15})$$

Podobnie znajdujemy

$$\frac{d}{da} \delta(z \pm a) = \pm \mathbf{D}_z \delta(z \pm a). \quad (\text{D.16})$$

Powyższe relacje mają tę samą postać jak dla zwykłych funkcji, ale wynikają one z teorii dystrybucji Schwartza.

D.1.3. Warunek niezmienniczości Lorentza dla $D_+(t, r)$

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest niezmiennicza względem transformacji Lorentza (pchnięć i obrotów przestrzennych), to zachodzi relacja różniczkowa $(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) F(x) = 0$, która zapisana jawnie ma postać

$$(x^m \partial_0 + x^0 \partial_m) F(x) = 0, \quad (x^m \partial_n - x^n \partial_m) F(x) = 0. \quad m, n \in \{1, 2, 3\}. \quad (\text{D.17})$$

Jeżeli funkcja niezmiennicza zależy jedynie of r i t , to $F(x) = F(t, r)$ i zachodzi

$$\partial_m F(t, r) = \frac{x^m}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(t, r), \quad (\text{D.18})$$

co prowadzi do tożsamości dla transformacji obrotów przestrzennych

$$(x^m \partial_n - x^n \partial_m)F(t, r) = \frac{x^m x^n - x^n x^m}{r} F(t, r) \equiv 0. \quad (\text{D.19})$$

Natomiast dla transformacji pchnięcia Lorentza dostajemy

$$(x^m \partial_0 + x^0 \partial_m)F(t, r) = \frac{x^m}{r} \left[r \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial r} \right] F(t, r) = 0. \quad (\text{D.20})$$

Dla niezmienniczej funkcji osobliwej $D_+(t, r)$ zachodzi relacja w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\left[r \mathbf{D}_t + t \frac{d}{dr} \right] D_+(t, r) = 0, \quad (\text{D.21})$$

ponieważ ze wzoru (D.13) wynikają kolejno dystrybucje

$$\mathbf{D}_t D_+(t, r) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\mathcal{P}\mathcal{V} \frac{1}{t+r} + \mathcal{P}\mathcal{V} \frac{1}{t-r} + i\pi\delta(t+r) + i\pi\delta(t-r) \right], \quad (\text{D.22})$$

$$t D_+(t, r) = -\frac{1}{8\pi^2} \left[\mathcal{P}\mathcal{V} \frac{1}{t+r} + \mathcal{P}\mathcal{V} \frac{1}{t-r} + i\pi\delta(t+r) + i\pi\delta(t-r) \right]. \quad (\text{D.23})$$

To oznacza niezmienniczość Lorentza funkcji osobliwej $D_+(t, r)$ zadanej jako dystrybucja w t i parametryzowanej przez r .

D.1.4. Transformacja skalowania (dylatacji) dla $D_+(t, r)$

Dla infinitezymalnej transformacji skalowania $x^\mu \rightarrow \delta\lambda x^\mu$ mamy działanie operatora skalowania (dylatacji) \mathcal{S} na funkcję $F(x) = F(t, r)$

$$\mathcal{S}F(x) = x^\mu \partial_\mu F(t, r) = \left[t \frac{\partial}{\partial t} + x^i \partial_i \right] F(t, r) = \left[t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r} \right] F(t, r) \quad (\text{D.24})$$

Dlatego dla niezmienniczej funkcji osobliwej $D_+(t, r)$ mamy relację w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{S}D_+(t, r) = \left[t \mathbf{D}_t + r \frac{d}{dr} \right] D_+(t, r). \quad (\text{D.25})$$

Wyznaczamy dystrybucję

$$\begin{aligned} t \mathbf{D}_t D_+(t, r) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[t \mathcal{P}\mathcal{V} \frac{1}{t+r} + t \mathcal{P}\mathcal{V} \frac{1}{t-r} + i\pi t \delta(t+r) + i\pi t \delta(t-r) \right] = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[-r (8\pi^2 r) D_+(t, r) \right] = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 D_+(t, r) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

co prowadzi do równania w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\left[t \mathbf{D}_t + r \frac{d}{dr} \right] D_+(t, r) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 D_+(t, r) \right] + r \frac{d}{dr} D_+(t, r) = -2D_+(t, r). \quad (\text{D.27})$$

To dowodzi dla dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ słuszności równania

$$[\mathcal{L} + 2] D_+(t, r) = [x^\mu \partial_\mu + 2] D_+(t, r) = 0. \quad (\text{D.28})$$

D.2. $D_+(t, r)$ jako dystrybucja w \mathbb{R}^3

Alternatywna regularyzacja rozbieżnej całki po k we wzorze (D.2) polega na wprowadzeniu skończonej górnej granicy całkowania L . To prowadzi do

$$\int_0^L dk e^{-ikt} (e^{ikr} - e^{-ikr}) = \int_0^L dk (\cos k\tau_- - \cos k\tau_+) - i \int_0^L dk (\sin k\tau_- - \sin k\tau_+), \quad (\text{D.1})$$

gdzie $\tau_\pm = t \pm r$. Pierwszą całkę można wyrazić jako pochodną po r

$$\int_0^L dk (\cos k\tau_- - \cos k\tau_+) = -\frac{\partial}{\partial r} \int_0^L \frac{dk}{k} (\sin k\tau_- + \sin k\tau_+) \quad (\text{D.2})$$

i podobnie drugą całkę

$$\begin{aligned} \int_0^L dk (\sin k\tau_- - \sin k\tau_+) &= \frac{\partial}{\partial r} \int_{\mathcal{M}}^L \frac{dk}{k} (\cos k\tau_- + \cos k\tau_+) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\mathcal{M}} \frac{dk}{k} (\cos k\tau_- + \cos k\tau_+ - 2). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

gdzie $\mathcal{M} > 0$ jest dowolną stałą. Powyższe całki po k są nieosobliwe w dolnej granicy i są zbieżne w granicy $L \rightarrow \infty$. Wtedy możemy wykorzystać znane całki oznaczone [57]

$$\int_0^\infty \frac{dk}{k} \sin kx = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(x), \quad \int_{\mathcal{M}}^\infty \frac{dk}{k} \cos kx + \int_0^{\mathcal{M}} \frac{dk}{k} (\cos kx - 1) = -\gamma_E - \ln(\mathcal{M}|x|), \quad (\text{D.4})$$

gdzie γ_E jest stałą Eulera-Mascheroniego. Tak więc możemy zdefiniować pierwszą całkę

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk (\cos k\tau_- - \cos k\tau_+) &\stackrel{df}{=} -\frac{\partial}{\partial r} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{dk}{k} (\sin k\tau_- + \sin k\tau_+) \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\pi}{2} (\text{sgn}\tau_- + \text{sgn}\tau_+) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

i podobnie drugą całkę

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk (\sin k\tau_- - \sin k\tau_+) &\stackrel{df}{=} \frac{\partial}{\partial r} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}}^L \frac{dk}{k} (\cos k\tau_- + \cos k\tau_+) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\mathcal{M}} \frac{dk}{k} (\cos k\tau_- + \cos k\tau_+ - 2) \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} [\ln(\mathcal{M}|\tau_-|) + \ln(\mathcal{M}|\tau_+|)]. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

W tej regularyzacji ważna jest kolejność działań: **granice** $L \rightarrow \infty$ **i całkowanie musimy wykonać przed różniczkowaniem**. To pozwala wyrazić funkcję $D_+(x)$ w postaci

$$D_+(x) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{ir} \int_0^\infty dk \left(e^{-ik\tau_-} - e^{-ik\tau_+} \right) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} d_+(t, r) \quad (\text{D.7})$$

gdzie

$$d_+(t, r) = i \frac{\pi}{2} (\text{sgn}\tau_- + \text{sgn}\tau_+) + \ln(\mathcal{M}|\tau_-|) + \ln(\mathcal{M}|\tau_+|), \quad (\text{D.8a})$$

lub równoważnie

$$d_+(t, r) = i\pi \text{sgn}(t) \Theta(x^2) + \ln(\mathcal{M}^2|x^2|). \quad (\text{D.8b})$$

Wykorzystaliśmy tutaj $\tau_+\tau_- = t^2 - r^2 = x^2$ i prostą obserwację

$$\text{sgn}\tau_- + \text{sgn}\tau_+ = 2 \text{sgn}(\tau_+ + \tau_-) \Theta(\tau_+\tau_-). \quad (\text{D.9})$$

Zamierzamy traktować t jako **dowolny ciągły parametr**, natomiast r będzie zmienną całkowania w dystrybucji. To oznacza, że $D_+(t, r)$ należy zapiąć przy użyciu **cząstkowej pochodnej dystrybucyjnej** \mathbf{D}_m

$$D_+(t, r) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{x^m}{r^2} \partial_m d_+(t, r) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{x^m}{r^2} \mathbf{D}_m d_+(t, r). \quad (\text{D.10})$$

Dla funkcji próbnych $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ mamy ogólne własności dystrybucji

$$\left\langle \frac{x^i}{r^2} \mathbf{D}_i d_+(t, r), f \right\rangle = \left\langle \mathbf{D}_i d_+(t, r), \frac{x^i}{r^2} f \right\rangle = - \left\langle d_+(t, r), \partial_i \left(\frac{x^i}{r^2} f \right) \right\rangle. \quad (\text{D.11})$$

Stąd mamy dystrybucję $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ dla D_+ w postaci 3-wymiarowej całki

$$\langle D_+, f \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} d_+(t, r) \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{f(\mathbf{r})}{r} \right). \quad (\text{D.12})$$

Najpierw rozpatrzmy dywergencję we współrzędnych sferycznych

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{f(\mathbf{r})}{r} \right) &= \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{f(\mathbf{r})}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f(\mathbf{r})}{r} \right) + \frac{f(\mathbf{r})}{r^2} \hat{\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{f(\mathbf{r})}{r^2 \sin \theta} \hat{\varphi} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{f(\mathbf{r})}{r} \right) + 2 \frac{f(\mathbf{r})}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

gdzie wykorzystaliśmy równania

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} = \sin \theta \hat{\varphi}. \quad (\text{D.14})$$

To pozwala zapisać dystrybucję (D.12) jako całkę we współrzędnych sferycznych

$$\langle D_+, f \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} d_+(t, r) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})] = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^\infty dr d_+(t, r) \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})], \quad (\text{D.15})$$

gdzie wprowadzamy oznaczenie dla części kątowej całki

$$\int_0^{4\pi} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta. \quad (\text{D.16})$$

Następnie rozważmy całkę radialną

$$\int_0^\infty dr d_+(x) \frac{\partial}{\partial r} [rf(\mathbf{r})] = \int_0^\infty dr [i\pi \operatorname{sgn}(t) \Theta(t^2 - r^2) + \ln(\mathcal{M}^2|t^2 - r^2|)] \frac{\partial}{\partial r} [rf(\mathbf{r})]. \quad (\text{D.17})$$

Pierwszy człon prowadzi do

$$\begin{aligned} i\pi \operatorname{sgn}(t) \int_0^\infty dr \Theta(t^2 - r^2) \frac{\partial}{\partial r} [rf(\mathbf{r})] &= i\pi \operatorname{sgn}(t) \int_0^{|t|} dr \frac{\partial}{\partial r} [rf(\mathbf{r})] = \\ &= i\pi \operatorname{sgn}(t) |t| f(\mathbf{r})|_{r=|t|} = i\pi t f(\mathbf{r})|_{r=|t|}. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Drugi człon można zapisać w postaci, która umożliwia całkowanie przez części

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr \ln[\mathcal{M}^2|t^2 - r^2|] \frac{\partial}{\partial r} [rf(\mathbf{r})] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{|t|-\epsilon} dr \ln[\mathcal{M}^2(t^2 - r^2)] \frac{\partial}{\partial r} [rf(\mathbf{r})] \\ + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t|+\epsilon}^\infty dr \ln[\mathcal{M}(r^2 - t^2)] \frac{\partial}{\partial r} [rf(\mathbf{r})] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{|t|-\epsilon} dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} f(\mathbf{r}) + \\ &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t|+\epsilon}^\infty dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} f(\mathbf{r}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \omega(\epsilon), \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

gdzie człony brzegowe $\omega(\epsilon)$

$$\omega(\epsilon) = \ln(2\epsilon\mathcal{M}^2|t|) \left[(|t| - \epsilon) f(\mathbf{r})|_{r=|t|-\epsilon} - (|t| + \epsilon) f(\mathbf{r})|_{r=|t|+\epsilon} \right] \sim \epsilon \ln \epsilon, \quad (\text{D.20})$$

znikają w granicy $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$. Wprowadzając oznaczenie wartości głównej całki

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{|t|-\epsilon} dr \frac{1}{t^2 - r^2} F(r) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t|+\epsilon}^\infty dr \frac{1}{t^2 - r^2} F(r) = \int_0^\infty dr \frac{1}{t^2 - r^2} F(r), \quad (\text{D.21})$$

możemy zapisać dystrybucję (D.12) jako

$$\langle D_+, f \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \left[i\pi t f(\mathbf{r})|_{r=|t|} + \int_0^\infty dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} f(\mathbf{r}) \right]. \quad (\text{D.22})$$

Ta postać dystrybucji $\langle D_+, f \rangle$ będzie użyteczna w dalszej analizie, natomiast tutaj możemy ją przekształcić wprowadzając dystrybucje dla delty Diraca

$$t f(\mathbf{r})|_{r=|t|} = \operatorname{sgn}(t) \int_0^\infty dr \delta(r - |t|) r f(\mathbf{r}) \quad (\text{D.23})$$

i wartości głównej Cauchy'ego

$$\int_0^\infty dr \frac{r^2}{t^2 - r^2} f(\mathbf{r}) = - \int_0^\infty dr r^2 \mathcal{PV} \frac{1}{r^2 - t^2} f(\mathbf{r}). \quad (\text{D.24})$$

To prowadzi do równości dystrybucji

$$\langle D_+, f \rangle = -i \frac{\text{sgn}(t)}{8\pi} \left\langle \frac{\delta(r - |t|)}{r}, f \right\rangle + \frac{1}{4\pi^2} \left\langle \mathcal{PV} \frac{1}{r^2 - t^2}, f \right\rangle, \quad (\text{D.25})$$

więc w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ mamy

$$\boxed{D_+(t, r) = -i \frac{\text{sgn}(t)}{8\pi} \frac{\delta(r - |t|)}{r} + \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{PV} \frac{1}{r^2 - t^2}.} \quad (\text{D.26})$$

D.2.1. Granica $t \rightarrow 0$

Rozważmy granicę $t \rightarrow 0$ dla dystrybucji (D.22)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \langle D_+, f \rangle &= - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \left[i\pi t f(\mathbf{r})|_{r=|t|} + \int_0^\infty dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} f(\mathbf{r}) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \frac{1}{r^2} f(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \left\langle \frac{1}{r^2}, f \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Stąd w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ mamy granicę

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} D_+(t, r) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r^2}.} \quad (\text{D.28})$$

D.2.2. Pochodna $\partial D_+ / \partial t$ i pochodna dystrybucyjna $\mathbf{D}_i D_+(x)$

Ze wzoru (D.22) wyliczamy pochodną dystrybucji po t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle D_+, f \rangle &= - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left[i\pi t f(|t|, \theta, \varphi) + \int_0^\infty dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} f(\mathbf{r}) \right] = \\ &= - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \left[i\pi f(|t|, \theta, \varphi) + i\pi |t| \frac{\partial f(|t|, \theta, \varphi)}{\partial |t|} + \right. \\ &\quad \left. + \text{sgn}(t) \int_0^\infty dr \frac{2|t|}{|t|^2 - r^2} \frac{\partial [rf(\mathbf{r})]}{\partial r} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

Wynika to z ogólnej zależności dla wartości głównej całki

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial |t|} \int_0^\infty dr \frac{r^2 f(\mathbf{r})}{|t|^2 - r^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial |t|} \int_0^{|t|-\epsilon} dr \frac{r^2 f(\mathbf{r})}{|t|^2 - r^2} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial |t|} \int_{|t|+\epsilon}^\infty dr \frac{r^2 f(\mathbf{r})}{|t|^2 - r^2} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(|t| - \epsilon)^2 f(|t| - \epsilon, \theta, \varphi)}{|t|^2 - (|t| - \epsilon)^2} - \frac{(|t| + \epsilon)^2 f(|t| + \epsilon, \theta, \varphi)}{|t|^2 - (|t| + \epsilon)^2} \right] - \\
 &- \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{|t|-\epsilon} dr \frac{2|t| r^2 f(\mathbf{r})}{(|t|^2 - r^2)^2} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t|+\epsilon}^\infty dr \frac{2|t| r^2 f(\mathbf{r})}{(|t|^2 - r^2)^2} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|t| f(|t|, \theta, \varphi)}{\epsilon} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{|t|-\epsilon} dr r f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{|t|}{|t|^2 - r^2} \\
 &- \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t|+\epsilon}^\infty dr r f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r} \frac{|t|}{|t|^2 - r^2} = \int_0^\infty dr \frac{|t|}{|t|^2 - r^2} \frac{\partial [r f(\mathbf{r})]}{\partial r} \quad (D.30)
 \end{aligned}$$

W granicy $t \rightarrow 0$ otrzymujemy dystrybucję

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \langle D_+, f \rangle = -\frac{i}{8\pi} \int_0^{4\pi} d\Omega f(0, \theta, \varphi) = -\frac{i}{2} f(0, 0, 0) = -\frac{i}{2} \langle \delta^3, f \rangle, \quad (D.31)$$

więc w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ mamy

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} D_+(t, \mathbf{r}) = -\frac{i}{2} \delta^3(\mathbf{r}). \quad (D.32)$$

Pochodna dystrybucyjna jest wyznaczna przez równość dystrybucji, gdzie ze wzoru (D.22) mamy całkę

$$\langle \vec{\mathbf{D}} D_+, f \rangle = -\langle D_+, \vec{\nabla} f \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \left[i\pi t \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) \Big|_{r=|t|} + \int_0^\infty dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) \right]. \quad (D.33)$$

Korzystając ze wzoru

$$\int_0^{4\pi} d\Omega \vec{\nabla} f(\mathbf{r}) = \int_0^{4\pi} d\Omega \frac{\hat{r}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 f(\mathbf{r})] \quad (D.34)$$

dostajemy całkę

$$\langle \vec{\mathbf{D}} D_+, f \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \hat{r} \left[i\pi \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(\mathbf{r})) \Big|_{r=|t|} + \int_0^\infty dr \frac{2}{t^2 - r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(\mathbf{r})) \right]. \quad (D.35)$$

D.2.3. Niezmienniczość Lorentza i transformacja skalowania

Infinityzalna transformacja pchnięcia Lorentza ma postać dystrybucyjną

$$\left\langle \vec{x} \frac{\partial}{\partial t} D_+, f \right\rangle + \left\langle t \vec{\mathbf{D}} D_+, f \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle D_+, \vec{x} f \rangle + t \langle \vec{\mathbf{D}} D_+, f \rangle. \quad (D.36)$$

Z dystrybucji (D.29) znajdujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle D_+, \widehat{r} r f \rangle &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \widehat{r} \left[2i\pi |t| f(|t|, \theta, \varphi) + i\pi t^2 \frac{\partial f(|t|, \theta, \varphi)}{\partial |t|} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty dr \frac{2t}{|t|^2 - r^2} \frac{\partial [r^2 f(\mathbf{r})]}{\partial r} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

a z dystrybucji (D.35)

$$t \langle \vec{\mathbf{D}} D_+, f \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \widehat{r} \left[i\pi \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(\mathbf{r})) \Big|_{r=|t|} + \int_0^\infty dr \frac{2t}{t^2 - r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(\mathbf{r})) \right]. \quad (\text{D.38})$$

co prowadzi do znikania prawej strony równania (D.36). To dowodzi, że funkcja $D_+(t, r)$ jest lorentzowsko-niezmieniczna w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

Dla infinitezymalnej transformacji skalowania mamy

$$\mathcal{S} D_+(t, r) = \left[t \frac{\partial}{\partial t} + \vec{x} \cdot \vec{\mathbf{D}} \right] D_+(t, r), \quad (\text{D.39})$$

co prowadzi do równania dla dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \mathcal{S} D_+, f \rangle = t \frac{d}{dt} \langle D_+, f \rangle + \langle \vec{x} \cdot \vec{\mathbf{D}} D_+, f \rangle = t \frac{d}{dt} \langle D_+, f \rangle - \langle D_+, \vec{\nabla} \cdot (\vec{x} f) \rangle \quad (\text{D.40})$$

Najpierw rozpatrzmy dywergencję we współrzędnych sferycznych

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot [\widehat{r} r f(\mathbf{r})] &= \left(\widehat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\widehat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\widehat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot [\widehat{r} r f(\mathbf{r})] = \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})] + f(\mathbf{r}) \widehat{\theta} \cdot \frac{\partial \widehat{r}}{\partial \theta} + \\ &\quad + \frac{f(\mathbf{r})}{\sin \theta} \widehat{\varphi} \cdot \frac{\partial \widehat{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})] + 2f(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Więc mamy równość dystrybucji

$$\langle D_+, \vec{\nabla} \cdot (\vec{x} f) \rangle = \left\langle D_+, \frac{\partial}{\partial r} [r f] \right\rangle + 2 \langle D_+, f \rangle. \quad (\text{D.42})$$

Dalej ze wzoru (D.22) mamy dystrybucję

$$\begin{aligned} \left\langle D_+, \frac{\partial}{\partial r} [r f] \right\rangle &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \left[i\pi t \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})] \Big|_{r=|t|} + \int_0^\infty dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})] \right] = \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \left[i\pi t f(|t|, \theta, \varphi) + i\pi t |t| \frac{\partial f(|t|, \theta, \varphi)}{\partial |t|} + \right. \\ &\quad \left. \int_0^\infty dr \frac{2r^2}{t^2 - r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})] \right], \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

a ze wzoru (D.29) mamy dystrybucję

$$t \frac{d}{dt} \langle D_+, f \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \left[i\pi t f(|t|, \theta, \varphi) + i\pi |t| t \frac{\partial f(|t|, \theta, \varphi)}{\partial |t|} + \int_0^\infty dr \frac{2t^2}{t^2 - r^2} \frac{\partial [r f(\mathbf{r})]}{\partial r} \right]. \quad (\text{D.44})$$

Różnica tych wyrażeń znika

$$t \frac{d}{dt} \langle D_+, f \rangle - \left\langle D_+, \frac{\partial}{\partial r} [r f] \right\rangle = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{4\pi} d\Omega \int_0^\infty dr \frac{\partial}{\partial r} [r f(\mathbf{r})] = 0, \quad (\text{D.45})$$

co ostatecznie prowadzi do równania $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\langle \mathcal{S} D_+, f \rangle = -2 \langle D_+, f \rangle \quad (\text{D.46})$$

więc w sensie dystrybucji $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ otrzymujemy

$$\boxed{\mathcal{S} D_+(t, r) = -2 D_+(t, r).} \quad (\text{D.47})$$

E. Kwantowanie kanoniczne - szczegóły rachunkowe

E.1. Cechowanie dLC_1

Rozdział ten zawiera szczegóły rachunków pominięte, dla przejrzystości, w głównej części pracy. Rozpatrzmy cechowanie dLC_1 , gdzie znając wyrażenia (V.76), komutatory i funkcje Wightmana dla modów kowariantnych i niekowariantnych możemy wyznaczyć funkcje Wightmana dla wyjściowych pól cechowania \mathbf{A} . Obliczenia prowadzą bezpośrednio do $\langle 0|A_3(x)A_2(0)|0\rangle = 0$ i

$$\langle 0|A_3(x)A_3(0)|0\rangle = \langle 0|A_2(x)A_2(0)|0\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik \cdot x}, \quad (\text{E.1a})$$

gdzie używamy oznaczenia $k \cdot x = |\mathbf{k}|x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$. Dla przejrzystości ustalamy argument drugiego pola na $y = 0$. Ponieważ funkcje Wightmana są translacyjnie niezmiennicze, to uproszczenie nie zmniejsza ogólności wyrażień. Dalej znajdujemy

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)A_1(0)|0\rangle &= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{2k_1}{k_\perp^2} e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x}} + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(|\mathbf{k}| + \alpha k_1)^2}{2k_\perp^2 |\mathbf{k}|} e^{-ik \cdot x}, \end{aligned} \quad (\text{E.1b})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)A_2(0)|0\rangle &= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{\alpha k_2}{k_\perp^2} e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x}} + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\alpha k_2 (|\mathbf{k}| + \alpha k_1)}{2k_\perp^2 |\mathbf{k}|} e^{-ik \cdot x}, \end{aligned} \quad (\text{E.1c})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)A_3(0)|0\rangle &= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{\alpha k_3}{k_\perp^2} e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x}} + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\alpha k_3 (|\mathbf{k}| + \alpha k_1)}{2k_\perp^2 |\mathbf{k}|} e^{-ik \cdot x}, \end{aligned} \quad (\text{E.1d})$$

gdzie wprowadzamy nowe oznaczenie $\bar{k} \cdot \bar{x} = k_\perp \cdot x_\perp + k_1(x^0 + \alpha x^1)$. W kolejnym kroku potrzebujemy następującej tożsamości

$$\frac{(|\mathbf{k}| + \alpha k_1)^2}{2k_\perp^2 |\mathbf{k}|} = \frac{k_\perp^2 + 2k_1^2 + 2\alpha k_1 |\mathbf{k}|}{2k_\perp^2 |\mathbf{k}|} = \frac{1}{2|\mathbf{k}|} + \frac{2\alpha k_1}{k_\perp^2} \frac{|\mathbf{k}| + \alpha k_1}{2|\mathbf{k}|}, \quad (\text{E.2})$$

która pozwala zapisać funkcje Wightmana jako

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)A_1(0)|0\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik\cdot x} + \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ik_\perp\cdot x_\perp}}{k_\perp^2} \left[- \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} k_1 e^{-ik_1x^0} e^{-i\alpha k_1x^1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{|\mathbf{k}| + \alpha k_1}{2|\mathbf{k}|} \alpha k_1 e^{-i|\mathbf{k}|x^0} e^{-ik_1x^1} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.3a})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)A_2(0)|0\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ik_\perp\cdot x_\perp}}{k_\perp^2} \alpha k_2 \left[- \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} e^{-ik_1x^0} e^{-i\alpha k_1x^1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{|\mathbf{k}| + \alpha k_1}{2|\mathbf{k}|} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} e^{-ik_1x^1} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.3b})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)A_3(0)|0\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{e^{-ik_\perp\cdot x_\perp}}{k_\perp^2} \alpha k_3 \left[- \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} e^{-ik_1x^0} e^{-i\alpha k_1x^1} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{|\mathbf{k}| + \alpha k_1}{2|\mathbf{k}|} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} e^{-ik_1x^1} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.3c})$$

Widzimy teraz, że powyższe funkcje Wightmana mogą być wyrażone przez funkcje

$$D_+(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik\cdot x}}{2|\mathbf{k}|}, \quad (\text{E.4a})$$

$$G_+(x) := i \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\perp^2} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{dk_1}{2\pi} \frac{|\mathbf{k}| + \alpha k_1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik\cdot x} - \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{2\pi} e^{-i\bar{k}\cdot \bar{x}} \right], \quad (\text{E.4b})$$

których własności opisane są w Dodatku C. Jesteśmy w stanie zapisać funkcje Wightmana w zwartej postaci

$$\langle 0|A_3(x)A_3(y)|0\rangle = D_+(x-y), \quad \langle 0|A_1(x)A_1(y)|0\rangle = D_+(x-y) + 2\alpha\partial_1 G_+(x-y), \quad (\text{E.5a})$$

$$\langle 0|A_2(x)A_2(y)|0\rangle = D_+(x-y), \quad \langle 0|A_1(x)A_2(y)|0\rangle = \alpha\partial_2 G_+(x-y), \quad (\text{E.5b})$$

$$\langle 0|A_3(x)A_2(y)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|A_1(x)A_3(y)|0\rangle = \alpha\partial_3 G_+(x-y). \quad (\text{E.5c})$$

Analogiczne wyrażenia otrzymujemy dla funkcji Wightmana dla potencjałów \mathbf{B} . W kolejnym kroku rozważmy funkcje Wightmana $\langle 0|A_\mu(x)B_\nu(y)|0\rangle$ i $\langle 0|B_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle$. Nieznikające mieszane funkcje Wightmana, to

$$\langle 0|A_3(x)B_2(0)|0\rangle = -\langle 0|B_3(x)A_2(0)|0\rangle = -\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{-ik\cdot x}, \quad (\text{E.6a})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)B_2(0)|0\rangle &= -\langle 0|B_1(x)A_2(0)|0\rangle = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_3(|\mathbf{k}| + \alpha k_1)}{2k_\perp^2|\mathbf{k}|} e^{-i\mathbf{k}\cdot x} - \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{k_2^2}{[k_3]k_\perp^2} e^{-i\bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{x}}, \end{aligned} \quad (\text{E.6b})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)B_3(0)|0\rangle &= -\langle 0|B_1(x)A_3(0)|0\rangle = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_2(|\mathbf{k}| + \alpha k_1)}{2k_\perp^2|\mathbf{k}|} e^{-i\mathbf{k}\cdot x} - \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{k_2 k_3}{[k_3]k_\perp^2} e^{-i\bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{x}}, \end{aligned} \quad (\text{E.6c})$$

gdzie wartość główną zapisujemy jako $\frac{1}{[k_3]} = \mathcal{P}\frac{1}{k_3}$. Możemy uprościć to wyrażenie używając tożsamości

$$\frac{k_2^2}{[k_3]k_\perp^2} = \frac{1}{[k_3]} - \frac{k_3}{k_\perp^2}, \quad (\text{E.7})$$

co prowadzi do

$$\begin{aligned} \langle 0|A_1(x)B_2(0)|0\rangle &= -\langle 0|B_1(x)A_2(0)|0\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{[k_3]} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} e^{-i\bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{x}} + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} \frac{k_3}{k_\perp^2} e^{-i\bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{x}} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k_3(|\mathbf{k}| + \alpha k_1)}{2k_\perp^2|\mathbf{k}|} e^{-i\mathbf{k}\cdot x}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Wprowadzając oznaczenie nowej funkcji

$$g_+(x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} \frac{1}{[k_3]} \int_0^{+\infty} \frac{dk_1}{(2\pi)} e^{-i\bar{\mathbf{k}}\cdot\bar{x}}. \quad (\text{E.9})$$

i wykorzystując definicje (E.4a, E.4b), możemy zapisać powyższe funkcje Wightmana w postaci

$$\langle 0|A_3(x)B_2(0)|0\rangle = -\langle 0|B_3(x)A_2(0)|0\rangle = -\alpha D_+(x), \quad (\text{E.10a})$$

$$\langle 0|A_1(x)B_2(0)|0\rangle = -\langle 0|B_1(x)A_2(0)|0\rangle = -g_+(x) - \partial_3 G_+(x), \quad (\text{E.10b})$$

$$\langle 0|A_1(x)B_3(0)|0\rangle = -\langle 0|B_1(x)A_3(0)|0\rangle = \partial_2 G_+(x). \quad (\text{E.10c})$$

E.2. Cechowanie dLC₃

Przyjrzyjmy się szczegółom rachunku przeprowadzonego podczas kwantowania kanonicznego w cechowaniu dLC₃. W tym wypadku mamy do czynienia z pewną niekonsystencją, na którą chcę zwrócić uwagę. Zaczniemy od zapisania potencjałów cechowania za pomocą kowariantnych ($\mathcal{A}_3, \mathcal{C}_3, \Pi_3^A, \Pi_3^C$) i niekowariantnych ($\mathcal{C}_j, \Lambda, \tilde{\Lambda}$) modów

$$A_3 = \mathcal{A}_3 + 2\partial_3 \Delta_\perp^{-1} \star \Lambda, \quad C_3 = \mathcal{C}_3 + 2\partial_3 \Delta_\perp^{-1} \star \tilde{\Lambda}, \quad (\text{E.11a})$$

$$A_i = \partial_i \Delta_\perp^{-1} \star (\Lambda + \alpha \Pi_3^A) + \epsilon_{ij} \partial_j \Delta_\perp^{-1} \star \left(\frac{1}{\alpha} \tilde{\Lambda} + \Pi_3^C \right) - \alpha \epsilon_{ij} \mathcal{C}_j, \quad (\text{E.11b})$$

$$C_i = \mathcal{C}_i - \epsilon_{ij} \partial_j \Delta_\perp^{-1} (\alpha \Lambda + \Pi_3^A) + \partial_i \Delta_\perp^{-1} \star (\tilde{\Lambda} + \alpha \Pi_3^C), \quad (\text{E.11c})$$

gdzie \star oznacza splot. Niestety operator całkowy $\Delta_{\perp}^{-1}(x_{\perp})$ nie ma reprezentacji Fouriera. Możemy rozpocząć od 2-wymiarowej całki, a następnie przeprowadzić całkowanie po kącie φ_{\perp} , co prowadzi do

$$\Delta_{\perp}^{-1}(x_{\perp}) \stackrel{?}{=} - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{ik_{\perp} \cdot x_{\perp}} \frac{1}{k_{\perp}^2} = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_{\perp}}{k_{\perp}} J_0(k_{\perp} x_{\perp}). \quad (\text{E.12})$$

Ewidentnie ta całka nie istnieje - jest osobliwa dla $k_{\perp} \rightarrow 0$. Dlatego poddajemy w wątpliwość znak równości. Możemy przeprowadzić regularyzację, na przykład możemy zapisać

$$\Delta_{\perp}^{-1}(x_{\perp}) = - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\mathcal{M}} \frac{dk_{\perp}}{k_{\perp}} [J_0(k_{\perp} x_{\perp}) - 1] - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{M}}^{\infty} \frac{dk_{\perp}}{k_{\perp}} J_0(k_{\perp} x_{\perp}). \quad (\text{E.13})$$

Teraz nie mamy już osobliwości dla $k_{\perp} \rightarrow 0$, i całka jest zbieżna, ale nie można jej znaleźć w tablicach całek, takich jak [57]. Oczekujemy, że zależy ona od dowolnego parametru $\mathcal{M} > 0$. Jednakże istnieje pochodna cząstkowa

$$\partial_i \Delta_{\perp}^{-1}(x_{\perp}) = \frac{x^i}{x_{\perp}} \frac{\partial}{\partial x_{\perp}} \Delta_{\perp}^{-1}(x_{\perp}) = \frac{x^i}{x_{\perp}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk_{\perp} J_1(k_{\perp} x_{\perp}) = \frac{1}{2\pi} \frac{x^i}{x_{\perp}^2} \quad (\text{E.14})$$

i jest niezależna od \mathcal{M} . Dlatego dla tej pochodnej cząstkowej całka Fouriera istnieje, jak tego oczekiwaliśmy. Pamiętając o powyższych trudnościach możemy rozpocząć analizę niezależnych modów. Mówimy o modach kowariantnych, z powodu spełnianych przez nie równań ruchu

$$\begin{aligned} (\partial_0^2 - \Delta_{\perp} - \partial_3^2) \mathcal{A}_3 &= \Delta_{\perp}^{-1} \star (\partial_0 + \alpha \partial_3) [2\partial_3(\alpha J^3 + J^0) + \partial_i(\alpha J^i + \epsilon_{ij} K^j)] - \\ &\quad - J^3 - \alpha J^0, \end{aligned} \quad (\text{E.15a})$$

$$\begin{aligned} (\partial_0^2 - \Delta_{\perp} - \partial_3^2) \mathcal{C}_3 &= -\Delta_{\perp}^{-1}(\partial_0 + \alpha \partial_3) [2\partial_3(\alpha K^3 + K^0) + \partial_i(\alpha K^i - \epsilon_{ij} J^j)] - \\ &\quad - K^3 - \alpha K^0, \end{aligned} \quad (\text{E.15b})$$

$$\begin{aligned} (\partial_0^2 - \Delta_{\perp} - \partial_3^2) \Pi_3^A &= -2\partial_3(\alpha J^3 + J^0) - \partial_i(\alpha J^i + \epsilon_{ij} K^j) - \\ &\quad - (\partial_0 - \alpha \partial_3)(J^3 + \alpha J^0) \end{aligned} \quad (\text{E.15c})$$

$$\begin{aligned} (\partial_0^2 - \Delta_{\perp} - \partial_3^2) \Pi_3^C &= -2\partial_3(\alpha K^3 + K^0) - \partial_i(\alpha K^i + \epsilon_{ij} J^j) - \\ &\quad - (\partial_0 - \alpha \partial_3)(K^3 + \alpha K^0), \end{aligned} \quad (\text{E.15d})$$

gdzie d'Alambertjan jest kowariantnym operatorem różniczkowym, choć człony niejednorodne są ewidentnie niekowariantne. Jest to dobry argument, ponieważ w dalszej analizie bierzemy przypadek pól swobodnych.

Niezerowe nawiasy Poissona dla niezależnych modów w tej samej chwili czasu $x^0 = y^0 = 0$, co dla przejrzystości zapisu pomijamy

$$\{\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \mathcal{A}_3(\mathbf{y})\}_D = -2\alpha \partial_3^x \Delta_{\perp}^{-1}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp}) \delta(x^3 - y^3), \quad (\text{E.16a})$$

$$\{\mathcal{C}_3(\mathbf{x}), \mathcal{C}_3(\mathbf{y})\}_D = -2\alpha \partial_3^x \Delta_{\perp}^{-1}(\mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{y}_{\perp}) \delta(x^3 - y^3), \quad (\text{E.16b})$$

$$\{\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \Pi_3^A(\mathbf{y})\}_D = \{\mathcal{C}_3(\mathbf{x}), \Pi_3^C(\mathbf{y})\}_D = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{E.16c})$$

$$\{\partial_3 \mathcal{C}_i(\mathbf{x}), \mathcal{C}_j(\mathbf{y})\}_D = -\frac{\alpha}{2} \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{E.16d})$$

$$\{\partial_3 \Lambda(\mathbf{x}), \Lambda(\mathbf{y})\}_D = \{\partial_3 \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}), \tilde{\Lambda}(\mathbf{y})\}_D = -\frac{\alpha}{2} \Delta_{\perp} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{E.16e})$$

Procedura kwantowania kanonicznego pozwala teraz na zamianę otrzymanych nawiasów Diraca dla pól klasycznych na komutatory odpowiednich operatorów pól kwantowych

$$[\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \mathcal{A}_3(\mathbf{y})] = -2i\alpha\partial_3^x\Delta_\perp^{-1}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp)\delta(x^3 - y^3), \quad (\text{E.17a})$$

$$[\mathcal{C}_3(\mathbf{x}), \mathcal{C}_3(\mathbf{y})] = -2i\alpha\partial_3^x\Delta_\perp^{-1}(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp)\delta(x^3 - y^3), \quad (\text{E.17b})$$

$$[\mathcal{A}_3(\mathbf{x}), \Pi_3^A(\mathbf{y})] = [\mathcal{C}_3(\mathbf{x}), \Pi_3^C(\mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{E.17c})$$

$$[\partial_3\mathcal{C}_i(\mathbf{x}), \mathcal{C}_j(\mathbf{y})] = -i\frac{\alpha}{2}\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{E.17d})$$

$$[\partial_3\Lambda(\mathbf{x}), \Lambda(\mathbf{y})] = [\partial_3\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}), \tilde{\Lambda}(\mathbf{y})] = -i\frac{\alpha}{2}\Delta_\perp\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{E.17e})$$

Mody niekowariantne, które przedyskutujemy na przykładzie pola \mathcal{C}_i spełniającego następujące równanie ruchu $(\partial_0 - \alpha\partial_3)\mathcal{C}_i = 0$ można przedstawić w reprezentacji Focka za pomocą operatorów kreacji i anihilacji

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i(x) = & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_3}{(2\pi)} (e^{+ik_\perp x_\perp} e^{+ik_3(x^3 + \alpha x^0)} c_i^\dagger(\mathbf{k}) + \\ & + e^{-ik_\perp x_\perp} e^{-ik_3(x^3 + \alpha x^0)} c_i(\mathbf{k})) \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Z komutatorów dla pól (E.17d) możemy odczytać komutatory dla operatorów kreacji i anihilacji

$$[c_i(\mathbf{k}), c_j^\dagger(\mathbf{p})] = \frac{\alpha}{2k_3}\delta_{ij}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad [c_i^\dagger(\mathbf{k}), c_j^\dagger(\mathbf{p})] = [c_i(\mathbf{k}), c_j(\mathbf{p})] = 0. \quad (\text{E.19})$$

Pozwala to na wyznaczenie funkcji Wightmana dla modów niekowariantnych

$$\langle 0|\mathcal{C}_i(x)\mathcal{C}_j(0)|0\rangle = \frac{\alpha}{2}\delta_{ij} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_3}{2\pi} \frac{1}{k_3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\alpha k_3 x^0}, \quad (\text{E.20a})$$

Podobnie odczytujemy komutatory dla operatorów kreacji i anihilacji dla pozostałych modów niekowariantnych

$$[\lambda(\mathbf{k}), \lambda^\dagger(\mathbf{p})] = [\tilde{\lambda}(\mathbf{k}), \tilde{\lambda}^\dagger(\mathbf{p})] - \frac{\alpha}{2} \frac{k_\perp^2}{k_3} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}),$$

co prowadzi do odpowiednich funkcji Wightmana

$$\langle 0|\Lambda(x)\Lambda(0)|0\rangle = \langle 0|\tilde{\Lambda}(x)\tilde{\Lambda}(0)|0\rangle = -\frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2k_\perp}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk_3}{2\pi} \frac{k_\perp^2}{k_3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\alpha k_3 x^0}, \quad (\text{E.20b})$$

a pozostałe funkcje Wightmana znikają. Całki po k_3 , w funkcjach Wightmana dla modów niekowariantnych mają tę samą strukturę

$$\int_0^\infty \frac{dk_3}{k_3} e^{-ik_3 x^3} e^{-i\alpha k_3 x^0} \quad (\text{E.21})$$

i stają się rozbieżne dla $k_3 \rightarrow 0$. Oznacza to, że nie ma kanonicznego rozkładu funkcji

komutatorowych - w tym sensie mamy analogiczną sytuację jak w przypadku masywnych pól skalarnych na hiperpowierzchni stożka świetlnego $x^+ = 0$ [60].

Mody kowariantne przedstawiamy za pomocą całek po pędach

$$\mathcal{A}_3(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i|\mathbf{k}|x^0} a_3^\dagger(\mathbf{k}) + e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} a_3(\mathbf{k}) \right), \quad (\text{E.22a})$$

$$\mathcal{B}_3(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i|\mathbf{k}|x^0} b_3^\dagger(\mathbf{k}) + e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} b_3(\mathbf{k}) \right), \quad (\text{E.22b})$$

$$\Pi_3^A(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i|\mathbf{k}|x^0} p_3^{A\dagger}(\mathbf{k}) + e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} p_3^A(\mathbf{k}) \right), \quad (\text{E.22c})$$

$$\Pi_3^B(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i|\mathbf{k}|x^0} p_3^{B\dagger}(\mathbf{k}) + e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0} p_3^B(\mathbf{k}) \right). \quad (\text{E.22d})$$

Wychodząc od komutatorów dla pól kowariantnych znajdujemy niezerowe komutatory dla operatorów kreacji i anihilacji

$$\begin{aligned} [a_3(\mathbf{k}), a_3^\dagger(\mathbf{p})] &= [b_3(\mathbf{k}), b_3^\dagger(\mathbf{p})] = \\ &= (2\pi)^3 \left(4 \frac{|\mathbf{k}|k_3}{k_\perp^2} (k_3 - \alpha|\mathbf{k}|) + 2|\mathbf{k}| \right) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{E.23a})$$

$$\begin{aligned} [a_3(\mathbf{k}), p_3^{A\dagger}(\mathbf{p})] &= [b_3(\mathbf{k}), p_3^{B\dagger}(\mathbf{p})] = \\ &= i(2\pi)^3 (2|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}| - \alpha k_3)) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (\text{E.23b})$$

$$\begin{aligned} [p_3^A(\mathbf{k}), p_3^{A\dagger}(\mathbf{p})] &= [p_3^B(\mathbf{k}), p_3^{B\dagger}(\mathbf{p})] = \\ &= i(2\pi)^3 2|\mathbf{k}|k_\perp^2 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{E.23c})$$

To pozwala wyznaczyć niezerowe funkcje Wightmana dla modów kowariantnych

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{A}_3(x)\mathcal{A}_3(0)|0\rangle &= \langle 0|\mathcal{B}_3(x)\mathcal{B}_3(0)|0\rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} \left(\frac{2k_3}{k_\perp^2} (k_3 - \alpha|\mathbf{k}|) + 1 \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0}, \end{aligned} \quad (\text{E.24a})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{A}_3(x)\Pi_3^A(y)|0\rangle &= \langle 0|\mathcal{B}_3(x)\Pi_3^B(y)|0\rangle = \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2|\mathbf{k}|} (|\mathbf{k}| - \alpha k_3) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0}, \end{aligned} \quad (\text{E.24b})$$

$$\begin{aligned} \langle 0|\Pi_3^A(x)\Pi_3^A(y)|0\rangle &= \langle 0|\Pi_3^B(x)\Pi_3^B(y)|0\rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{k_\perp^2}{2|\mathbf{k}|} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i|\mathbf{k}|x^0}, \end{aligned} \quad (\text{E.24c})$$

Wyrażenia te można zapisać przy użyciu funkcji $D_+(x)$ w następujący sposób

$$\langle 0|\mathcal{A}_3(x)\mathcal{A}_3(0)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{B}_3(x)\mathcal{B}_3(0)|0\rangle = 2\partial_3\Delta_\perp^{-1} \star (\alpha\partial_0 + \partial_3)D_+(x) + D_+(x), \quad (\text{E.25a})$$

$$\langle 0|\mathcal{A}_3(x)\Pi_3^A(y)|0\rangle = \langle 0|\mathcal{B}_3(x)\Pi_3^B(y)|0\rangle = -(\partial_0 + \alpha\partial_3)D_+(x), \quad (\text{E.25b})$$

$$\langle 0|\Pi_3^A(x)\Pi_3^A(y)|0\rangle = \langle 0|\Pi_3^B(x)\Pi_3^B(y)|0\rangle = -\Delta_\perp D_+(x). \quad (\text{E.25c})$$

Bibliografia

- [1] P.Curie, Séances de la Société française de physique (1894) 76.
- [2] H.Poincaré, Compt. Rend. **123**(1896) 530.
- [3] P.A.M.Dirac, Proc.Roy.Soc. **A133** (1931) 60.
- [4] E.Dzimida, Few-Body Systems, **36** (2005) 87.
- [5] M.Blogojevic, P.Senjanovic, Phys.Rep. **157** (1988) 233.
- [6] C.Itzykson, J.-B.Zuber, *Quantum Field Theory*, (Dover Publications, 2005).
- [7] I.Białyński-Birula *Wstęp do teorii pól kwantowych*, PWN Warszawa 1971.
- [8] I.Białyński-Birula, Z.Białyńska-Birula *Elektrodynamika kwantowa*, PWN Warszawa 1974.
- [9] P. A. M. Dirac, Phys. Rev., vol. 74, Issue 7, (1948) 817-830
- [10] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, PWN Warszawa 2001.
- [11] O.Heaviside, Philos.Trans.R.Soc.London **A 183**, (1892) 423.
- [12] J.D.Jackson, *Elektrodynamika klasyczna*, PWN Warszawa 1982.
- [13] D.Lynden-Bell and M.Nouri-Zon'ozz, Rev. of Mod. Phys. **70** (1998) 427
- [14] D.G.Boulware et al.: Phys. Rev. D14 (1976) 2708
- [15] J.S. Schwinger, Phys.Rev. **144**, (1966) 1087.
- [16] T.T.Wu i C.N.Yang, Phys.Rev. **D 12**, (1975) 3845.
- [17] D.Zwanziger, Phys.Rev. **137B**, (1965) 647.
- [18] S.Weinberg, Phys.Rev. **138B**, (1965) 988.
- [19] C.R.Hagen, Phys.Rev. **140B**, (1965) 804.
- [20] A.S.Goldhaber, Phys.Rev. **140B**, (1965) 1407.
- [21] N.Cabibbo i E.Ferrari, Nuovo Cim., **23** (1962) 1147.
- [22] J.S.Schwinger, Phys.Rev. **151**, (1966) 1048, 1055.
- [23] A.Rabl, Phys.Rev. **179**, (1969) 1363.
- [24] D.Zwanziger, Phys.Rev. **D 3**, (1971), 880.
- [25] D.Zwanziger, Phys.Rev. **176**, (1968), 1480, 1489.

- [26] I.Białynicki-Birula, Phys.Rev. **D 3**, (1971) 2413.
- [27] L.Gamberg i K.A.Milton, Phys.Rev. **D 61**, (2000) 075013.
- [28] I.Białynicki-Birula i Z.Białynicka-Birula, Phys.Rev. **D 3**, (1971) 2410.
- [29] R.W.Kühne, Mod.Phys.Lett. **A 12** (1997) 3153.
- [30] O.P.S.Negi i H.Dehnen, Int.J.Theor.Phys. **50** (2011) 2446.
- [31] S.Deser i C.Teitelboim, Phys.Rev. **D 13**, (1976) 1592.
- [32] F.R.Ore Jr., Phys.Rev. **D 13**, (1976) 2295.
- [33] G.Giacomelli, Riv.Nuovo Cim. **7** (1984) 1.
- [34] G. Giacomelli, L. Patrizii, Z. Sahnoun, eprint arXiv:1105.2724
- [35] A. Rajantie, Contemporary Physics 53 (2012) 195
- [36] M.Fidecaro, G.Finocchiaro and G.Giacomelli, Il Nuovo Cim. **XXII** (1961) 657.
- [37] S. Balestra et al., Eur.Phys.J. **C 55** (2008) 57.
- [38] G.Giacomelli, S.Manzoor, E.Medinaceli i L.Patrizii, J.Phys. Conference Series **116** (2008) 012005
- [39] ATLAS Collaboration, Phys.Lett. **B 698** (2011) 353.
- [40] N.L.Epele, H.Fanchiotti, C.A.Garcia Canal i V. Vento, Eur.Phys.J. **C 56** (2008) 87.
- [41] N.L.Epele, H.Fanchiotti, C.A.Garcia Canal i V. Vento, Eur.Phys.J. **C 62** (2009) 587.
- [42] D.J.P.Morris et al, Science 326 411 (2009)
- [43] D.Singleton, Am.J.Phys. **64** (1996) 452.
- [44] J.A.Przeszowski, J. Phys. **A 38**, (2005) 7021.
- [45] E.Dzimida-Chmielewska i J.A.Przeszowski, PoS, 110 (EPS-HEP 2013) - SISSA.
- [46] R.E.Peierls, Proc.Roy.Soc. **A214** (1952) 124.
- [47] K.G.Wilson, Phys.Rev. **bf D 10** (1974) 2445.
- [48] A.Bassetto, G.Nardelli i R.Soldati, *Yang-Mills Theories in Algebraic Non-covariant Gauges: Canonical Quantization and Renormalization*, World Scientific, 1991.
- [49] A. S. Wightman, Phys. Rev. 101, 860–866 (1956)
- [50] L.D.Faddeev i R.Jackiw, Phys.Rev.Lett. **60** (1988) 1692.
- [51] E.Dzimida-Chmielewska i J.A.Przeszowski, Acta Phys. Polon. **B 6** Proceedings Supplement, (2013) 359.
- [52] R.Jackiw, *(Constrained) Quantization Without Tears* hep-th/9306074 (1993).
- [53] P.A.Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (Academic Press, New York, 1964)

- [54] R.A.Brandt, F.Neri i D.Zwanziger, Phys.Rev.Let. **40** (1978) 147.
- [55] R.A.Brant, F.Neri, D.Zwanziger, Phys. Rev. **D19** (1979) 1153.
- [56] L. Schwartz, *Metody matematyczne w fizyce*, PWN Warszawa 1984.
- [57] I.S.Gradstein, I.M.Rhizik, *Table of Integrals, seires and Products*, Academic Press, 1994.
- [58] P.A.M.Dirac, Phys.Rev. **74** (1948) 817
- [59] R. Jackiw, Int.J.Mod.Phys. A19S1 (2004) 137-144
- [60] J.A.Przeszowski, Acta Phys. Polon. **B 6** Proceedings Supplement, (2013) 327.