

mgr Justyna Makowska
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet w Białymstoku

OPERATORY PRZESUNIĘCIA Z WAGĄ GENEROWANE PRZEZ ODWZOROWANIE AFINICZNE TYPU MORSE'A-SMALE'A

Streszczenie

Rozważane są operatory przesunięcia z wagą B w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ generowane przez afiniczne odwzorowanie $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ typu Morse'a-Smale'a. Uzyskano opis własności spektralnych operatora $B - \lambda I$ dla λ należących do widma operatora B .

1 Wprowadzenie

Rozważmy klasę operatorów przesunięcia z wagą w przestrzeni $L^2(X, \mu)$ z miarą Lebesgue'a postaci

$$Bu(x) = a_0(x)u(\alpha(x)) = a_0(x)T_\alpha u(x), \quad x \in X, \quad (1)$$

gdzie $\alpha : X \rightarrow X$ jest danym odwzorowaniem a funkcją a_0 określoną na zbiorze X . Własności tj. odwracalność, jednostronna odwracalność i domkniętość obrazu, operatora B postaci (1) zależą od rozważanej przestrzeni, od współczynnika a_0 oraz od dynamiki odwzorowania α . Głównym problemem, przed jakim staje- my jest opisanie relacji między dynamiką odwzorowania α a w/w własnościami operatora B . Badaniami tych związków w przestrzeni $L^2(X, \mu)$ zajmowano się w przypadku pewnych klas odwzorowań α . W pracach [9], [10] rozważano odwzorowania α określone na odcinku, które posiadało tylko dwa punkty stałe: przyciągający i odpychający. W [4], [5], [12] rozpatrzono modelowy przykład odwzorowania α określonego na n -wymiarowej kostce, które posiadało skończoną liczbę punktów stałych, w tym punkt odpychający, przyciągający i punkty siodłowe. Natomiast w [13] rozważono odwzorowanie $\alpha : X \rightarrow X$ typu Morse'a-Smale'a, czyli odwzorowanie dla którego zbiór punktów stałych $Fix(\alpha) = \{F(i) : \alpha(F(i)) = F(i)\}$ jest skończony oraz dla którego trajektoria $\{\alpha^j(x)\}$ dowolnego punktu $x \in X$ dąży zarówno przy $j \rightarrow +\infty$ jak i przy $j \rightarrow -\infty$ do punktu stałego (mogą to być różne punkty stałe).

W artykule opiszemy dynamikę afinicznego odwzorowania $\alpha(x) = Mx + h$ nieredukowalnego do przypadku liniowego, gdzie M jest nieosobliwą macierzą a h niezerowym wektorem oraz opiszemy własności spektralne operatora przesunięcia z wagą B w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$.



2 Widmo operatora przesunięcia z wagą

W przestrzeni $L^2(X, \mu)$ operator $B = a_0 T_\alpha$ dla odwracalnego odwzorowania α może być przedstawiony w postaci $B = a \tilde{T}_\alpha$, gdzie operator \tilde{T}_α jest operatorem izometrycznym. Takie przedstawienie jest możliwe jeżeli odwracalne odwzorowanie α jest mierzalne oraz dla dowolnego zbioru mierzalnego ω mamy: $\mu(\omega) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = 0$. Wówczas istnieje funkcja ρ dla której izometryczny operator \tilde{T}_α jest postaci

$$\tilde{T}_\alpha u(x) = \rho(x)u(\alpha(x))$$

oraz współczynnik zredukowany $a \in C(X)$ jest postaci $a(x) = \rho^{-1}(x)a_0(x)$. Z [11] wiemy, że jeżeli X jest zwartą, α -spójną przestrzenią topologiczną a zbiór punktów nieokresowych odwzorowania α jest gęsty w X i funkcja $a \in C(X)$, spełnia warunek $\forall_{x \in X} a(x) \neq 0$ to widmo operatora $B = a \tilde{T}_\alpha$ będzie pierścieniem

$$\Sigma(B) = \{\lambda : r(B) \leq |\lambda| \leq R(B)\}, \quad (2)$$

gdzie

$$r(B) = \min_{\nu \in M_\alpha(X)} \exp\left\{\int_X \ln |a(x)| d\nu\right\}, \quad R(B) = \max_{\nu \in M_\alpha(X)} \exp\left\{\int_X \ln |a(x)| d\nu\right\},$$

po zbiorze $M_\alpha(X)$ wszystkich miar α -niezmienniczych i ergodycznych. Jeżeli odwzorowanie α będzie odwzorowaniem typu Morse'a-Smale'a, wówczas zbiór $M_\alpha(X)$ będzie zawierał tylko miary

$$\delta_{F(i)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } F(i) \in \omega, \\ 0, & \text{gdy } F(i) \in X \setminus \omega, \end{cases}$$

dla dowolnego zbioru mierzalnego ω oraz punktu stałego $F(i) \in \text{Fix}(\alpha)$. Zbiór punktów nieokresowych odwzorowania α typu Morse'a-Smale'a jest gęsty. Zatem widmo operatora B generowanego odwzorowaniem α typu Morse'a-Smale'a jest też określone w postaci pierścienia (2) przy czym

$$r(B) = \min\{|a(F(i))|\}, \quad R(B) = \max\{|a(F(i))|\}, \quad F(i) \in \text{Fix}(\alpha).$$

Widmo operatora B jest podzielone okręgami

$$O_k = \{\lambda : |\lambda| = |a(F(i))|, F(i) \in \text{Fix}(\alpha)\}$$

na mniejsze pierścienie. Nasz problem polega na opisie własności operatora $B - \lambda I$ w zależności od położenia λ względem tych pierścieni.

3 Operatory generowane przez odwzorowanie afiniczne

Niech $B = a_0 T_\alpha$ będzie operatorem przesunięcia z wagą w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ z miarą Lebesgue'a, generowanym przez odwracalne odwzorowanie afiniczne $\alpha(x) = Mx + h$ i a_0 będzie funkcją mierzalną. Wówczas istnieje funkcja $\rho(x) = \sqrt{|\det(M)|}$ dla której operator $\tilde{T}_\alpha u(x) = \sqrt{|\det(M)|}u(Mx + h)$ jest izometryczny a współczynnik zredukowany jest postaci $a(x) = |a_0(x)| \frac{1}{\sqrt{|\det(M)|}}$. Zatem operator przesunięcia z wagą możemy przedstawić w postaci

$$Bu(x) = a(x) \sqrt{|\det(M)|} u(Mx + h). \quad (3)$$

Dalsze badania operatora przesunięcia z wagą (3) możemy zredukować do badań operatora przesunięcia z wagą na zwartej przestrzeni X . W tym celu określimy przykładową algebrę \mathbb{A} , niezmienniczą względem odwzorowania α i α^{-1} . Przy wykorzystaniu tej algebry skonstruujemy przestrzeń zwartą będącą rozszerzeniem przestrzeni \mathbb{R}^n . Określimy też odwzorowanie $\hat{\alpha} : X \rightarrow X$ będące rozszerzeniem odwzorowania $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

3.1 Uzwanie przestrzeni \mathbb{R}^n przez sferę \mathbb{S}_∞^{n-1}

Pokażemy konstrukcję uzwania przestrzeni \mathbb{R}^n przez sferę \mathbb{S}_∞^{n-1} . W zbiorze

$$X = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{S}_\infty^{n-1},$$

zadajemy topologię. Dla punktów $x \in \mathbb{R}^n$ otoczenie $V(x)$ będzie kulą o środku w punkcie x i promieniu $r > 0$, z kolei dla punktów $x_0 \in \mathbb{S}_\infty^{n-1}$ otoczeniem jest zbiór:

$$V(x_0) = \{x \in \mathbb{S}_\infty^{n-1} : \|x - x_0\| < \delta\} \cup \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| > r \Rightarrow \left\| \frac{y}{\|y\|} - x_0 \right\| < \delta\}.$$

Tak określona przestrzeń topologiczna X jest zwarta. Z uzwaniem przestrzeni \mathbb{R}^n związana jest algebra \mathbb{A} , której elementami są funkcje $a(x)$ takie, że dla dowolnego x , takiego że $\|x\| = 1$ istnieje granica $\lim_{t \rightarrow +\infty} a(tx) := \hat{a}(x)$. Określamy funkcję $\hat{a} \in C(X)$ będącą przedłużeniem funkcji $a \in C(\mathbb{R}^n)$, zadaną formułą

$$\hat{a}(x) = \begin{cases} a(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} a(tx) & \text{dla } x \in \mathbb{S}_\infty^{n-1}. \end{cases} \quad (4)$$

Algebra \mathbb{A} jest niezmiennicza ze względu na odwzorowanie α i α^{-1} , $x \in \mathbb{R}^n$, zatem istnieje ciągłe przedłużenie $\hat{\alpha}$ odwzorowania α na X , określone wzorem

$$\hat{\alpha}(x) = \begin{cases} Mx + h & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{Mx}{\|Mx\|} & \text{dla } x \in \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}. \end{cases} \quad (5)$$

Na zwartej przestrzeni X zadajemy miarę μ_x taką, że $\mu_x(X \setminus \mathbb{R}^n) = 0$ a dla $\mathbb{R}^n \subset X$ miara μ_x określona jak miara Lebesgue'a μ . Zatem będziemy opisywać własności operatora $B = a\tilde{T}_\alpha$ dla $a \in \mathbb{A}$, określonego w przestrzeni $L^2(X, \mu_x)$.

3.2 Afiniczne odwzorowanie α typu Morse'a-Smale'a

Opisując dynamikę odwzorowania α , opisujemy zachowanie się trajektorii $\{\alpha^j(x)\}$ punktu $x \in X$. Do opisu dynamiki użyjemy grafu skierowanego $G(X, \alpha)$ (konstrukcja opisana w [13]). Wierzchołkami tego grafu będą punkty stałe odwzorowania α , natomiast krawędź zorientowana z $F(l)$ do $F(k)$ w grafie $G(X, \alpha)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $x \in X$ taki, że jego trajektoria przy $j \rightarrow -\infty$ dąży do punktu stałego $F(l)$, a przy $j \rightarrow +\infty$ do punktu $F(k)$.

Własności dynamiki afinicznego odwzorowania $\alpha(x) = Mx + h$ zależą od macierzy M i wektora h . Możemy wyróżnić dwie sytuacje.

1. Jeżeli $h \in \text{Im}(I - M) = \{y : \exists x (I - M)x = y\}$, wówczas istnieje x_0 , takie że

$$h = (I - M)x_0 = x_0 - Mx_0, \quad x_0 = Mx_0 + h, \quad x_0 = \alpha(x_0).$$

Zatem podstawiając $y = x - x_0$ odwzorowanie α można zredukować do odwzorowania liniowego $\alpha(y) = My$. Opis dynamiki odwzorowania liniowego otrzymano w [2].

2. Jeżeli $h \notin \text{Im}(I - M) = \{y : \exists x (I - M)x = y\}$, wówczas odwzorowanie α nie da się zredukować do odwzorowania liniowego.

Niech

$$\alpha(x) = Mx + h = x + (M - I)x + h,$$

wówczas trajektoria punktu x ma postać

$$\alpha^j(x) = x_j = x_{j-1} + (M - I)x_{j-1} + h.$$

Niech $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in \text{Im}(M - I)$ i $h_2 \perp \text{Im}(M - I)$. Rozważmy funkcję pomocniczą $f(x) = \langle x, u \rangle$, $u \perp \text{Im}(M - I)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Pokażemy, że trajektoria dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}^n$ przy $j \rightarrow \infty$ dąży do punktów ze sfery¹ $\mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$. Zauważmy, że $f(x) = 0$ dla $x \in \text{Im}(M - I)$ a $f(h) = \langle h, u \rangle := c$.

$$f(x_j) = \langle x_j, u \rangle = f(x_{j-1}) + c = f(x_{j-2}) + 2c = \dots = f(x) + jc \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty.$$

¹ Sfery jako zbioru punktów uzupełniających na nieskonczonosci zbiór \mathbb{R}^n

Z nierówności Cauchy'ego–Buniakowskiego–Schwarza:

$$|f(x)| = |\langle x, u \rangle| \leq \|x\| \|u\|,$$

zatem

$$\|x_j\| \geq \frac{1}{\|u\|} |f(x_j)| = \frac{1}{\|u\|} (f(x) + jc)^{j \rightarrow \pm\infty} \pm \infty.$$

Okazuje się, że podobny wyniki otrzymamy badając trajektorie $\{\alpha^j(x)\}$ punktów $x \in \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$. Jeżeli α jest odwzorowaniem afinicznym postaci (5), nieredukowalnym do odwzorowania liniowego, to trajektoria punktów $x \in \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ zbiega do punktów ze sfery $\mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$. Pokażemy to w sposób jawny. Jeżeli $x \in \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ to $\alpha(x) = \frac{Mx}{\|Mx\|}$. Macierz M zapiszemy w postaci klatek Jordana. Niech J będzie klatką Jordana dla wartości własnej λ wymiaru m . Wykorzystując rozważania z [7] dla macierzy J i $f(J)$ otrzymujemy:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \frac{1}{\lambda^3} & \cdots & (-1)^{m-1} \frac{1}{\lambda^m} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} & \ddots & (-1)^{m-2} \frac{1}{\lambda^{m-1}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

$$J^j = \begin{pmatrix} \lambda^j & C_{|j|}^1 \lambda^{j-1} & C_{|j|}^2 \lambda^{j-2} & \cdots & C_{|j|}^{m-1} \lambda^{j-m+1} \\ 0 & \lambda^j & C_{|j|}^1 \lambda^{j-1} & \cdots & C_{|j|}^{m-2} \lambda^{j-m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & C_{|j|}^1 \lambda^{j-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^j \end{pmatrix}, \quad C_{|j|}^k = (-1)^k \binom{j}{k} \quad (6)$$

Niech $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. Zdefiniujmy wartość $p := \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{i : x_i \neq 0\}$. Rozważa-

my odwzorowanie α dla klatki Jordana, tzn. $\alpha(x) = \frac{Jx}{\|Jx\|}$. Wówczas dla $j > 0$

$$\begin{aligned}
 J^j x &= \begin{pmatrix} \lambda^j x_1 + C_j^1 \lambda^{j-1} x_2 + C_j^2 \lambda^{j-2} x_3 + \dots + C_j^{p-1} \lambda^{j-p+1} x_p \\ \lambda^j x_2 + C_j^1 \lambda^{j-1} x_3 + \dots + C_j^{p-2} \lambda^{j-p} x_p \\ \vdots \\ \lambda^j x_p \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} C_j^{p-1} \lambda^{j-p+1} x_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{p-2} C_j^i \lambda^{j-i} x_{i+1} \\ \sum_{i=0}^{p-2} C_j^i \lambda^{j-i} x_{i+2} \\ \sum_{i=0}^{p-3} C_j^i \lambda^{j-i} x_{i+3} \\ \vdots \\ \lambda^j x_p \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Ponadto $\|J^j x\| \cong |C_j^{p-1} x_p|$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha^j(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{J^j x}{\|J^j x\|} = \begin{pmatrix} \frac{x_p}{|x_p|} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_\infty^{n-1}.$$

Analogicznie rozważamy przypadek gdy $j < 0$. Wówczas wektor $J^j(x)$ też będzie zdominowany przez jedną współzrędną x_p i trajektoria $\alpha^j(x)$ będzie dążyła do punktu ze sfery.

Rozważmy teraz macierz M przedstawioną w postaci Jordana, tzn. złożoną z klatek Jordana J_1, J_2, \dots, J_q odpowiadającym wartościom własnym $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ wymiaru odpowiednio m_1, m_2, \dots, m_q . Niech

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_q > 0.$$

Dla takiej macierzy M współzrędną wektora $M^j x$ również będą zdominowane przez jedną współzrędną. Żeby lepiej określić przez którą, potrzebne jest wprowadzenie specjalnej podwójnej notacji $x(t, s)$, gdzie $1 \leq t \leq q$ oraz $1 \leq s \leq m_t$.

Wówczas dla $x \in \mathbb{S}_\infty^{n-1}$ postaci



$$x = (x(1, 1), x(1, 2), \dots, x(1, m_1), x(2, 1), \dots, x(2, m_2), \dots, x(q, 1), \dots, x(q, m_q))$$

otrzymujemy, że

$$\alpha^j(x) = \frac{M^j x}{\|M^j x\|} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{x(k,1)}{|x(k,1)|} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \pm e(k, 1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

gdzie $k = \min \{z : \exists s x(z, s) \neq 0\}$.

Pamiętamy, że interesują nas afiniczne odwzorowania typu Morse'a-Smale'a. Możemy sformułować następujący warunek na macierz M i wektor h .

Lemat 3.1. Niech $X = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ oraz odwzorowanie α zadane jest formułą (5). Jeżeli macierz M posiada q różnych, dodatnich i 1-krotnych (w sensie geometrycznym) wartości własnych oraz istnieje $i \in \{1, \dots, q\}$, takie że $\lambda_i = 1$ i na współrzędnych odpowiadających tej wartości własnej wektor h jest niezerowy, to wówczas odwzorowanie α jest odwzorowaniem typu Morse'a-Smale'a.

Dowód. Aby odwzorowania afiniczne α było odwzorowaniem typu Morse'a-Smale'a wystarczy pokazać, że przy założeniach na macierz M zbiór punktów stałych jest skończony oraz trajektoria dowolnego punktu $x \in X$ zbiega do punktu stałego. Zauważmy, że założenia na macierz M i wektor h są równoważne warunkowi na nieredukowalność odwzorowania α do odwzorowania liniowego. Zatem z wcześniejszych rozważań otrzymaliśmy, że dla dowolnego punktu $x \in X$ trajektoria $\alpha^j(x)$ zbiega do punktów ze sfery.

Teraz opiszemy zbiór punktów stałych $Fix(\alpha)$. Załóżmy, że $x \in \mathbb{R}^n$ jest punktem stałym odwzorowania α , wówczas

$$\alpha(x) = x \Leftrightarrow (M - I)x = -h.$$

Z warunku na macierz M istnieje $i \in \{1, \dots, q\}$ takie, że $\lambda_i = 1$. Wówczas wektor h przyjmuje wartość zero na współrzędnych odpowiadających wartości własnej $\lambda_i = 1$, co jest sprzeczne z założeniami dotyczącymi macierzy M . Natomiast $x \in \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ jest punktem stałym, bo

$$x = \alpha(x) = \frac{Mx}{\|Mx\|} \Leftrightarrow \frac{\lambda x}{\|\lambda x\|} = x \Leftrightarrow \frac{\lambda}{|\lambda|} = 1 \Leftrightarrow \lambda > 0.$$

Z założenia wszystkie λ są dodatnie. Jeżeli x jest punktem stałym odwzorowania α , to $-x$ również jest punktem stałym tego odwzorowania. Zatem moc zbioru $Fix(\alpha)$ wynosi $2q$.

Reasumując, trajektoria dowolnego punkt $x \in X$ zbiega do punktu stałego odwzorowania α , który możemy zapisać w następujący sposób.

Dla macierzy M zbudowanej z klatek Jordana J_1, \dots, J_q odpowiadającym wartościom własnym

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_i = 1 > \dots > \lambda_q > 0 \quad (9)$$

punkty stałe są postaci

$$\begin{aligned} F(\pm 1) &= (\pm e(1, 1), 0, \dots, 0), \\ F(\pm k) &= (0, \dots, 0, \pm e(k, 1), 0, \dots, 0), \quad 1 < k < q, \\ F(\pm q) &= (0, \dots, 0, \pm e(q, 1)). \end{aligned}$$

Wykorzystując rozważania odnośnie trajektorii $\alpha^j(x)$ dla klatki Jordana J i uogólnienie dla macierzy M oraz przy zajęciu zależności (9) możemy określić konkretny rodzaj punktów stałych, tzn. wektory $F(\pm 1)$ będą punktami stałymi przyciągającymi, natomiast wektory $F(\pm q)$ punktami stałymi odpychającymi.

4 Własności spektralne operatora B

Dla każdej funkcji $a \in C(X)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ określamy następujące pary zbiorów

$$\begin{aligned} G^-(\lambda, a) &= \{F(i) \in Fix(\alpha) : |a(F(i))| < |\lambda|\}, \\ G^+(\lambda, a) &= \{F(i) \in Fix(\alpha) : |\lambda| < |a(F(i))|\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Para $(G^-(\lambda, a), G^+(\lambda, a))$ stanowi podział grafu $G(X, \alpha)$, tzn.

$$G^-(\lambda, a) \cap G^+(\lambda, a) = \emptyset, \quad G(X, \alpha) = G^-(\lambda, a) \cup G^+(\lambda, a),$$

jeżeli $|\lambda| \neq |a(F(i))|, \forall F(i) \in Fix(\alpha)$.

Podział grafu $G(X, \alpha)$ nazywamy *prawostronnie skierowanym*, jeżeli każda krawędź, która łączy punkty $F(l) \in G^-(\lambda, a)$ i $F(k) \in G^+(\lambda, a)$ jest zorientowana z $F(l)$ do $F(k)$. Natomiast podział $(G^-(\lambda, a), G^+(\lambda, a))$ nazywamy

lewostronnie skierowanym jeżeli każda krawędź łącząca punkty $F(l) \in G^-(\lambda, a)$ i $F(k) \in G^+(\lambda, a)$ jest zorientowana z $F(k)$ do $F(l)$. Wykorzystując wyniki z [13] otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek 4.1. Niech $B = a\tilde{T}_\alpha$ będzie operatorem przesunięcia z wagą postaci (3) określonym w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n \cup \mathbb{S}_\infty^{n-1}, \mu_x)$, gdzie $a \in \mathbb{A}$ oraz odwzorowanie α postaci (5) jest odwzorowaniem typu Morse'a-Smale'a. Operator $B - \lambda I$ jest prawostronnie (lewostronnie) odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy para $(G^-(\lambda, a), G^+(\lambda, a))$ stanowi prawostronnie (lewostronnie) skierowany podział grafu $G(X, a)$.

Gdy rozbijemy zbiór $X = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{S}_\infty^{n-1}$ na zbiory $\Omega_{kl} = \Omega_k^+ \cap \Omega_l^-$, $\mu(\Omega_{kl}) > 0$, gdzie

$$\Omega_k^+ = \{x : \lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha^j(x) = F(k)\}, \quad \Omega_l^- = \{x : \lim_{j \rightarrow -\infty} \alpha^j(x) = F(l)\},$$

i rozpatrzmy operator $B - \lambda I$ w przestrzeni $L^2(\overline{\Omega_{kl}}, \mu_{kl})$, gdzie $\overline{\Omega_{kl}}$ będzie zbiorem zwartym oraz miara μ_{kl} określona jest w następujący sposób:

$$\forall_{E \subset \overline{\Omega_{kl}}} \mu_{kl}(E) = \mu(E \cap \Omega_{kl}).$$

Wówczas otrzymamy następujący warunek na domkniętość obrazu operatora $B - \lambda I$.

Wniosek 4.2. Obraz operatora $B - \lambda I$ jest niedomknięty wtedy i tylko wtedy gdy para $(G^-(\lambda, a), G^+(\lambda, a))$ nie stanowi ani prawostronnie ani lewostronnie skierowanego podziału grafu $G(\overline{\Omega_{kl}}, \alpha)$.

W szczególności, jako przykład obrazujący własności opisane we wcześniejszych wnioskach rozpatrzmy odwzorowanie α gdy M jest macierzą diagonalną

$$M = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

gdzie

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{i-1} > \lambda_i = 1 > \lambda_{i+1} > \dots > \lambda_n > 0,$$

a wektor $h \in \mathbb{R}^n$ taki, że $h_i > 0$ a $h_k = 0$ $k \neq i$. Wówczas afiniczne odwzorowanie α posiada $2n$ punktów stałych $F(\pm k)$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

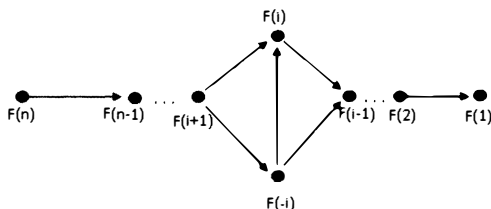
Przestrzeń \mathbb{R}^n możemy rozbić na α niezmiennicze zbiory, np. rozważmy zbiór $\{x \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0, k \neq i\}$. Temu rozbiciu będzie odpowiadało odpowiednie rozbiecie sfery \mathbb{S}_∞^{n-1} . Wówczas będziemy mogli badanie operatora B w przestrzeni $L^2(X, \mu)$ zredukować do badania operatora B w przestrzeni określonej na jednym

z tych niezmienniczych zbiorów. Na tak określonym rozbiściu $X_0 \subset \mathbb{R}^n \cup \mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$ odwzorowanie α ma $n + 1$ punktów stałych:

$$Fix(\alpha) = \{F(1), F(2), \dots, F(i - 1), F(\pm i), F(i + 1), \dots, F(n)\}.$$

Dynamikę odwzorowania α przedstawia graf z Rysunku 1.

Rysunek 1. Graf odwzorowania α na zbiorze zredukowanym X_0 .



Stwierdzenie 4.1. Przy tak określonym odwzorowaniu α na zbiorze zredukowanym X_0 para $(G^-(\lambda, a), G^+(\lambda, a))$ stanowi lewostronnie [prawostronnie] skierowane rozbiście grafu $G(X, \alpha)$ jeżeli

$$G^-(\lambda, a)[G^+(\lambda, a)] = \{F(1), \dots, F(k)\}, \quad 1 \leq k \leq i,$$

lub

$$G^-(\lambda, a)[G^+(\lambda, a)] = \{F(1), \dots, F(i - 1), F(-i), F(k)\}, \quad i \leq k < n.$$

Pokażemy zastosowanie Stwierdzenia 4.1 rozważając następujący przykład.

Przykład 4.1. Niech $X = \mathbb{R}^3 \cup \mathbb{S}_{\infty}^2$ odwzorowanie $\alpha : X \rightarrow X$, postaci (5), gdzie macierz $M = \text{diag}(2, 1, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zbadamy własności operatora $B - \lambda I$, $\lambda \in \Sigma(B)$.

Zbiór punktów stałych odwzorowania α ma 6 elementów:

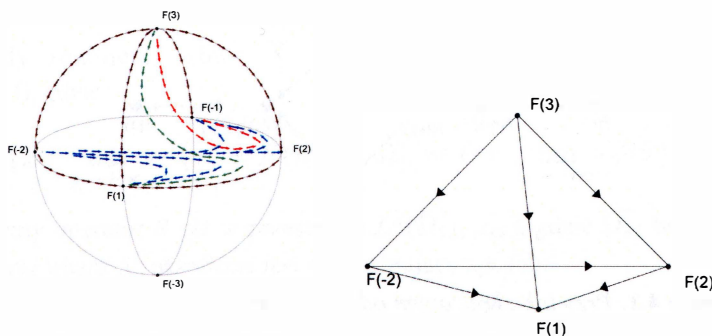
$$Fix(\hat{\alpha}) = \{F(\pm 1) = (\pm 1, 0, 0), F(\pm 2) = (0, \pm 1, 0), F(\pm 3) = (0, 0, \pm 1)\}.$$

Punkty $F(\pm 1)$ są punktami przyciągającymi, $F(\pm 3)$ są punktami odpychającymi, a $F(\pm 2)$ są punktami siodłowymi. Podzieliłiśmy X na niezmiennicze względem odwzoro-

wania α zbiory Ω_{ij} , $\mu(\Omega_{kj}) > 0$. Rozważmy operator $B - \lambda I$ na uzwarconym zbiorze Ω_{31} . Przebieg trajektorii $\alpha^j(x)$ oraz graf odwzorowania α przedstawia Rysunek 2.

Operator $B - \lambda I$ jest prawostronnie odwracalny, przy następujących podziałach grafu $G(\Omega_{3,1}, \alpha)$:

Rysunek 2. Przebieg trajektorii odwzorowania α dla $x_3 > 0$ oraz Graf odwzorowania α dla zbioru Ω_{31} .



$$1. G^-(\lambda, a) = \{F(3), F(2), F(-2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(1)\},$$

$$2. G^-(\lambda, a) = \{F(3)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(1), F(2), F(-2)\},$$

$$3. G^-(\lambda, a) = \{F(3), F(-2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(2), F(1)\}.$$

Operator $B - \lambda I$ nie jest prawostronnie odwracalny i $\dim(\text{Ker}(B - \lambda I)) = \infty$ gdy mamy podział

$$G^-(\lambda, a) = \{F(3), F(2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(1), F(-2)\}.$$

Operator $B - \lambda I$ jest lewostronnie odwracalny przy podziałach grafu

$$1. G^-(\lambda, a) = \{F(1), F(2), F(-2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(3)\},$$

$$2. G^-(\lambda, a) = \{F(2), F(1)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(3), F(-2)\},$$

$$3. G^-(\lambda, a) = \{F(1)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(3), F(2), F(-2)\}.$$

Operator nie jest lewostronnie odwracalny i $\dim(\text{Ker}(B^* - \lambda I)) = \infty$ gdy mamy podział

$$G^-(\lambda, a) = \{F(1), F(-2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(3), F(2)\}.$$

Zbiór $\text{Im}(B - \lambda I)$ jest niedomknięty gdy $|\lambda| = |a(F(3))|$, $|\lambda| = |a(F(1))|$ oraz przy podziałach

$$1. G^-(\lambda, a) = \{F(3), F(1)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(2), F(-2)\},$$

$$2. G^-(\lambda, a) = \{F(2), F(-2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(3), F(1)\},$$

$$3. G^-(\lambda, a) = \{F(3), F(-2), F(1)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(2)\},$$

$$4. G^-(\lambda, a) = \{F(2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(3), F(-2), F(1)\},$$

$$5. G^-(\lambda, a) = \{F(3), F(2), F(1)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(-2)\},$$

$$6. G^-(\lambda, a) = \{F(-2)\}, G^+(\lambda, a) = \{F(3), F(2), F(1)\}.$$

a także przy takich podziałach jak wyżej obraz jest niedomknięty również, dla $|\lambda| = |a(F(-2))|$ i $|\lambda| = |a(F(2))|$.

Literatura

1. Antonevich A. *Linear Functional Equation. Operator Approach*. Birkhauser Verlag, „Operator Theory Advances and Applications”, 1996, V. 83.
2. Antonevich A., Buraczewski A. *Dynamics of linear mapping and invariant measure on sphere*, „Demonstratio Mathematica”, 1996, Vol. XXIX, No 4, s. 817-824.
3. Antonevich A., Lo S.A. *On One-Sided Invertibility of Weighted Shift Operators*, „Spectral and Evolution Problems”, 2008, V.18.
4. Antonevich A., Makowska J. *Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class*. „Journal of Mathematical Sciences”, 2010, no. 4, 497-517
5. Antonevich A., Makowska J. *On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points*, „Complex Analysis and Operator Theory”, 2008, V. 2.
6. Daniluk A., Stochel J. *Seminormal composition operators induced by affine transformations*. „Hokkaido Mathematical Journal”, 1997, Vol. XXVI, No. 2.
7. Gantmakher F. R. *Theory of matrices*, „Nauka”, Moscow, 1988.
8. Górczyńska M. *Jednostronna odwracalność operatora $B - \lambda I$ generowanego przez odwzorowanie afiniczne*, praca magisterska Instytut Matematyki UWb w 2010r.
9. Karlovich Yu. I., Mardiev R. *One-sided invertibility of functional operator with non-Carleman shift in Hölder spaces*. „Izv. Vyssh. Uchebnykh Zaved. Mat.”, 1987, 3.
10. Karlovich A. Yu., Karlovich Yu.I. *One sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces*. „Integral Equations Operator Theory”, 2002, 42.
11. Lebedev A. V. *Invertibility of elements in C^* -algebras generated by dynamical systems*. „Uspekhi Mat. Nauk”, 1979, Vol. 34, no. 4.
12. Makowska J. *On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points in L_p* . Proceedings of the XXVII Workshop on Geometric Methods in Physics, American Institute of Physics, 2008.
13. Makowska J. *On-side invertibility of the weighted shift operators*. Proceedings of the XXIX Workshop on Geometric Methods in Physics, American Institute of Physics, 2010.
14. Pietruczuk B. *Operatory $B - \lambda I$ generowane przez odwzorowanie liniowe*, praca magisterska Instytut Matematyki UwB w 2010r.
15. Stochel J. *Seminormal composition operators on L_2 spaces induced by matrices*. „Hokkaido Mathematical Journal”, 1990, XIX.

