Józef Rogowski, Ewa Roszkowska

TESTY Z WNIOSKOWANIA STATYSTYCZNEGO

Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku

Białystok 2010

Recenzent: Ryszard J. Grabowski

Projekt okładki: Marek Owieczko

Korekta: Maria Kubala

Skład: Bożena Dubiaga

ISBN 978-83-7431-241-7

Publikacja sfinansowana ze środków Wydziału Ekonomii i Zarządzania
Uniwersytetu w Białymstoku

Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku
ul. Marii Skłodowskiej-Curie 14, tel. 85 7457059,
e-mail: ac-dw@uwb.edu.pl http://wydawnictwo.uwb.edu.pl

Druk i oprawa:
TOTEM, Inowrocław
www.totem.com.pl

Spis Treści

WSTĘP

Publikacja powstała z myślą o studentach studiów stacjonarnych i niestacjonarnych kierunków ekonomicznych. Mogą z niej również korzystać studenci innych kierunków, których program nauczania obejmuje wnioskowanie statystyczne lub statystykę matematyczną.

Celem przygotowanych testów jest możliwość sprawdzenia wiadomości przewidzianych programem tych przedmiotów. Publikacja powinna być wykorzystana przez studentów jako materiał pomocniczy do: studiowania wnioskowania statystycznego, przygotowania się do zajęć, zaliczeń czy egzaminów. Może także służyć prowadzącym ćwiczenia do utrwalenia czy sprawdzenia wiadomości na zajęciach, lub do zaliczenia przedmiotu. Testy powinny ułatwić zrozumienie, przyswojenie i interpretację podstawowych pojęć statystycznych. Autorzy mają także nadzieję, że testy uprzyjemnią studiowanie statystyki oraz zachęcą do stosowania metod statystycznych we własnej działalności zawodowej.

Publikacja obejmuje: podstawy rachunku prawdopodobieństwa, jednowymiarową zmienną losową typu skokowego i ciągłego, dwuwymiarową zmienną losową typu skokowego, parametry zmiennej losowej jednowymiarowej oraz dwuwymiarowej, wybrane rozkłady skokowe i ciągłe, zbieżność stochastyczną, prawa wielkich liczb, twierdzenia graniczne, wybrane rozkłady statystyk z próby, estymację punktową i przedziałową, określanie minimalnej liczebności próby oraz weryfikację hipotez.

Testy są jednokrotnego wyboru, co oznacza, że tylko jedna z odpowiedzi jest prawidłowa. Uzupełnienie testów stanowią: klucz odpowiedzi oraz zestawienie podstawowych definicji i wzorów z zakresu rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

ROZDZIAŁ 1

PODSTAWY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1.1. Permutację bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego można interpretować jako:

a) n-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wyrazy ciągu muszą być różne;
b) n-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wyrazy ciągu niekoniecznie muszą być różne;
c) m-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, gdzie $m < n$;
d) zbiór zawierający m elementów tego zbioru, przy czym elementy nie mogą się powtarzać.

1.2. Permutację z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego można interpretować jako:

a) n-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wszystkie wyrazy ciągu są różne;
b) n-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wyrazy ciągu niekoniecznie muszą być różne;
c) m-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym $m < n$;
d) zbiór zawierający m elementów tego zbioru, przy czym elementy mogą się powtarzać.

1.3. Wariację bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego można interpretować jako:

a) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wszystkie wyrazy ciągu są różne;
b) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wyrazy ciągu niekoniecznie muszą być różne;
c) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy nie mogą się powtarzać;
d) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy mogą się powtarzać.

1.4. Wariację z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego można interpretować jako:

a) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wszystkie wyrazy ciągu są różne;

b) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wyrazy ciągu niekoniecznie muszą być różne;
c) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy nie mogą się powtarzać;
d) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy mogą się powtarzać.

1.5. Kombinację bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego można interpretować jako:

a) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wszystkie wyrazy ciągu są różne;
b) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wyrazy ciągu niekoniecznie muszą być różne;
c) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy nie mogą się powtarzać;
d) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy mogą się powtarzać.

1.6. Kombinację z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego można interpretować jako:

a) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wszystkie wyrazy ciągu są różne;
b) k-wyrazowy ciąg, którego wyrazami są elementy tego zbioru, przy czym wyrazy ciągu niekoniecznie muszą być różne;
c) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy nie mogą się powtarzać;
d) zbiór zawierający k elementów tego zbioru, przy czym elementy mogą się powtarzać.

1.7. Permutacje bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego można interpretować jako:

a) n-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie elementów odbywa się bez zwracania i istotny jest porządek elementów w próbce;
b) n-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie elementów odbywa się ze zwracaniem i kolejność elementów w próbce odgrywa rolę;
c) nieuporządkowane n-elementowe próbki pobierane bez zwracania z n-elementowej populacji, różniące się składem elementów, ale nie różniące się porządkiem;
d) n-elementowe próbki pobierane ze zwracaniem z n-elementowej populacji, przy czym kolejność w próbce nie jest ważna.

1.8. Wariacje bez powtórzeń z n elementów po k można interpretować jako:

a) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie odbywa się bez zwracania i istotny jest porządek elementów w próbce;
b) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie odbywa się ze zwracaniem i kolejność elementów odgrywa rolę;
c) nieuporządkowane k-elementowe próbki pobierane bez zwracania z n-elementowej populacji, różniące się składem elementów, ale nie różniące się porządkiem;
d) k-elementowe próbki pobierane ze zwracaniem z n-elementowej populacji, przy czym kolejność w próbce nie jest ważna.

1.9. Wariacje z powtórzeniami z n elementów po k można interpretować jako:

a) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie odbywa się bez zwracania i istotny jest porządek elementów w próbce;
b) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie elementów odbywa się ze zwracaniem i kolejność elementów odgrywa rolę;
c) nieuporządkowane k-elementowe próbki pobierane bez zwracania z n-elementowej populacji, różniące się składem elementów, ale nie różniące się porządkiem;
d) k-elementowe próbki pobierane ze zwracaniem z n-elementowej populacji, przy czym kolejność w próbce nie jest ważna.

1.10. Kombinacje bez powtórzeń z n elementów po k można interpretować jako:

a) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie odbywa się bez zwracania i istotny jest porządek elementów w próbce;
b) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie odbywa się ze zwracaniem i kolejność elementów odgrywa rolę;
c) nieuporządkowane k-elementowe próbki pobierane bez zwracania z k-elementowej populacji, różniące się składem elementów, ale nie różniące się porządkiem;
d) k-elementowe próbki pobierane ze zwracaniem z n-elementowej populacji, przy czym kolejność w próbce nie jest ważna.

1.11. Kombinacje z powtórzeniami z n elementów po k można interpretować jako:

a) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie odbywa się bez zwracania i istotny jest porządek elementów w próbce;

b) k-elementowe próbki pobrane z n-elementowej populacji, przy czym pobieranie elementów odbywa się ze zwracaniem i kolejność elementów odgrywa rolę;
c) nieuporządkowane k-elementowe próbki pobierane bez zwracania z k-elementowej populacji, różniące się składem elementów, ale nie różniące się porządkiem;
d) k-elementowe próbki pobierane ze zwracaniem z n-elementowej populacji, przy czym kolejność w próbce nie jest ważna.

1.12. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe? Permutacja bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego to inaczej:

a) n-elementowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego;
b) n-elementowa kombinacja bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego;
c) n-elementowa wariacja z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

1.13. Liczba k-elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego jest równa:

a) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;
b) $\frac{n!}{(n-k)!}$;
c) n^k;
d) $\binom{n+k-1}{k}$.

1.14. Liczba k-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego jest równa:

a) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;
b) $\frac{n!}{(n-k)!}$;
c) n^k;
d) $\binom{n+k-1}{k}$.

1.15. Liczba k-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego jest równa:

a) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;

b) $\frac{n!}{(n-k)!}$;

c) n^k;

d) $\binom{n+k-1}{k}$.

1.16. Liczba k-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego jest równa:

a) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$;

b) $\frac{n!}{(n-k)!}$;

c) n^k;

d) $\binom{n+k-1}{k}$.

1.17. Na konkursie tańca spotyka się 5 panów i 6 pań. Każdy pan ma zatańczyć z każdą panią 1 taniec. Na parkiecie tańczą jednocześnie 3 pary. Orkiestra powinna zagrać:

a) 10 razy;
b) 5 razy;
c) 6 razy.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.18. W zawodach pływackich startowało 6 zawodników. Liczba wszystkich możliwych wyników, przy założeniu, że wszyscy zawodnicy ukończyli zawody i nie dzielą oni miejsc *ex aequo*, wynosi:

a) 6;
b) 120;
c) 720.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.19. Ilość słów mających sens lub nie, które można ułożyć ze słowa MAMA wynosi:

a) 2;
b) 4;
c) 6;
d) 24.

1.20. Ilość słów mających sens lub nie, które można ułożyć ze słowa LISTA wynosi:

a) 40;
b) 60;
c) 120.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.21. Liczb trzycyfrowych, w których cyfry nie mogą się powtarzać mamy:

a) 720;
b) 648;
c) 120.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.22. Liczb trzycyfrowych, w których cyfry mogą się powtarzać mamy:

a) 1000;
b) 900;
c) 890.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.23. Delegację składającą się z 5 osób można wybrać spośród ośmioosobowej grupy na:

a) 20 sposobów;
b) 40 sposobów;
c) 56 sposobów;
d) 336 sposobów.

1.24. Rzucamy jeden raz kostką do gry. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek jest zdarzeniem:

a) pewnym;
b) niemożliwym;
c) prawdopodobnym.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.25. Rzucamy jeden raz kostką do gry. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek i zdarzenie polegające na wyrzuceniu szóstki są zdarzeniami:

a) wykluczającymi się;
b) przeciwnymi;
c) równoważnymi.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.26. Rzucamy jeden raz kostką do gry i określamy dwa zdarzenia: A – wypadła parzysta liczba oczek, B – wypadła liczba oczek podzielna przez 3. Zdarzenia A, B:

a) są niezależne;
b) wykluczają się;
c) są zdarzeniami przeciwnymi.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.27. Spośród liczb od 1 do 20 losujemy jedną liczbę i określamy zdarzenia: A – wylosowana liczba jest podzielna przez 4, B – wylosowana liczba jest podzielna przez 6. Zdarzenia A, B:

a) są zależne;
b) wykluczają się;
c) są zdarzeniami przeciwnymi.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.28. Spośród liczb od 1 do 9 losujemy jedną liczbę i określamy zdarzenia: A – wylosowana liczba jest podzielna przez 9, B – wylosowana liczba nie jest większa niż 9. Zdarzenia A, B:

a) są zależne;
b) są niemożliwe;
c) są zdarzeniami przeciwnymi.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

1.29. Rzucamy dwa razy monetą i określamy trzy zdarzenia: A – wypadł orzeł w pierwszym rzucie, B – wypadła reszka w drugim rzucie; C – w obu rzutach otrzymaliśmy to samo. Zdarzenia A, B, C są:

a) niezależne parami i niezależne zespołowo;
b) niezależne parami i zależne zespołowo;
c) zależne parami i zależne zespołowo;
d) zależne parami i niezależne zespołowo.

1.30. Rzucamy dwa razy kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia na obu kostkach takiej samej liczy oczek jest równe:

a) $\frac{1}{6}$;
b) $\frac{1}{12}$;
c) $\frac{1}{16}$;
d) innej liczbie.

1.31. Rzucamy raz monetą i raz kostką. Prawdopodobieństwo wyrzucenia orła i parzystej liczy oczek jest równe:

a) $\frac{1}{2}$;
b) $\frac{1}{4}$;
c) $\frac{1}{6}$;
d) innej liczbie.

1.32. Gracz otrzymuje 13 kart z tali 52 kart. Prawdopodobieństwo, że dostanie on cztery króle, jest równe:

a) $\frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$;
b) $\frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{13}}$;
c) $\frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}}$;
d) innej liczbie.

1.33. W koszyku znajduje się 20 brzoskwiń, wśród których 5% jest zepsutych. Z koszyka wybieramy losowo 5 brzoskwiń bez zwracania. Prawdopodobieństwo wyjęcia maksymalnej liczby zepsutych brzoskwiń jest równe:

a) $\frac{1}{4}$;

b) $\frac{1}{5}$;

c) $\frac{1}{20}$;

d) innej liczbie.

1.34. W wesołym miasteczku karuzela i pociąg mają po dziesięć jednoosobowych fotelików. Dzieci losowo zajmują miejsca na karuzeli, a następnie w pociągu. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że Jaś i Małgosia będą sąsiadami, jest:

a) większe na karuzeli niż w pociągu;
b) większe w pociągu niż na karuzeli;
c) takie samo w pociągu i na karuzeli.
d) Mamy za mało informacji, żeby porównać oba prawdopodobieństwa.

1.35. Z talii 52 kart losujemy jedna kartę. Prawdopodobieństwo wylosowania króla lub karty pik jest równe:

a) $\frac{16}{52}$;

b) $\frac{17}{52}$;

c) $\frac{1}{52}$;

d) innej liczbie.

1.36. Z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6 losujemy kolejno bez zwracania dwie liczby. Prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie większa od 9, pod warunkiem, że za pierwszym razem wylosowano liczbę nieparzystą, jest równe:

a) $\frac{1}{3}$;

b) $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{15}$;

d) innej liczbie.

1.37. Rzucamy symetryczną kostką do gry. Prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek, pod warunkiem, że zaszło zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej 3 oczek, jest równe:

a) $\frac{1}{2}$;

b) $\frac{1}{3}$;

c) $\frac{1}{4}$;

d) innej liczbie.

1.38. W urnie znajduje się 9 kul: 3 białe, 3 zielone i 3 czarne. Losujemy kolejno 2 kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo wylosowania za pierwszym i drugim razem kuli zielonej jest równe:

a) $\frac{1}{4}$;

b) $\frac{1}{12}$;

c) $\frac{1}{16}$;

d) innej liczbie.

1.39. W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losowo wyciągamy 2 kule, przy czym losowanie odbywa się ze zwracaniem. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia obu kul białych jest równe:

a) $\frac{9}{25}$;

b) $\frac{3}{5}$;

c) $\frac{1}{3}$;

d) innej liczbie.

1.40. W urnie znajduje się 6 kul białych i 4 czarne. Losowo wyciągamy 2 kule, przy czym losowanie odbywa się bez zwracania. Prawdopodobieństwo wyciągnięcia obu kul białych jest równe:

a) $\frac{9}{25}$;

b) $\frac{3}{5}$;

c) $\frac{1}{3}$;

d) innej liczbie.

1.41. W urnie znajdują się 2 kule białe i 3 czarne. Losujemy 2 kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy dokładnie jedną kulę czarną, jest równe:

a) $\frac{2}{5}$;

b) $\frac{3}{5}$;

c) $\frac{1}{5}$;

d) innej liczbie.

1.42. W urnie znajdują się 2 kule białe i 3 czarne. Losujemy 2 kule ze zwracaniem. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy dokładnie jedną kulę czarną, jest równe:

a) $\frac{12}{25}$;

b) $\frac{6}{25}$;

c) $\frac{10}{25}$;

d) innej liczbie.

1.43. W urnie są 3 kule czerwone, 5 kul białych i 4 zielone. Losujemy 2 kule ze zwracaniem. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy kule tego samego koloru, jest równe:

a) $\frac{19}{66}$;
b) $\frac{18}{132}$;
c) $\frac{49}{66}$;
d) innej liczbie.

1.44. W urnie są 3 kule czerwone, 5 kul białych i 4 zielone. Losujemy 2 kule bez zwracania. Prawdopodobieństwo, że wylosujemy kule tego samego koloru, jest równe:

a) $\frac{19}{66}$;
b) $\frac{18}{132}$;
c) $\frac{49}{66}$;
d) innej liczbie.

1.45. Winda ma dwa niezależne systemy bezpieczeństwa, które działają z prawdopodobieństwem 0,8 i 0,9. Prawdopodobieństwo, że nie zadziała żaden z mechanizmów, jest równe:

a) 0,98;
b) 0,72;
c) 0,02;
d) innej liczbie.

1.46. Samochód jest wyposażony w dwa niezależne systemy antywłamaniowe, które w razie próby kradzieży samochodu zadziałają z prawdopodobieństwami równymi odpowiednio 0,7 i 0,8. Prawdopodobieństwo, że w przypadku próby kradzieży zadziała przynajmniej jeden z systemów, jest równe:

a) 0,96;
b) 0,04;
c) 0,94;
d) innej liczbie.

1.47. Pierwszy strzelec trafia z prawdopodobieństwem 0,8, a drugi 0,7. Obaj strzelili do celu równocześnie (strzelcy strzelają w sposób niezależny). Prawdopodobieństwo nie trafienia do celu jest równe:

a) 0,56;
b) 0,06;
c) 0,94;
d) innej liczbie.

1.48. Mamy dwa identyczne automaty do gry. Na jednym z nich można wygrać z prawdopodobieństwem 0,5, a na drugim z prawdopodobieństwem 0,25. Wybieramy losowo automat. Prawdopodobieństwo wygrania jest równe:

a) 0,125;
b) 0,750;
c) 0,375;
d) innej liczbie.

1.49. Partia telefonów komórkowych została wyprodukowana przez dwa zakłady: Z_1 i Z_2 odpowiednio w 40% i 60%. Ilość braków w dostawach z poszczególnych zakładów jest równa 1% i 3%. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrany telefon komórkowy będzie sprawny, jest równe:

a) 0,022;
b) 0,900;
c) 0,978;
d) innej liczbie.

1.50. Zakład przemysłowy współpracuje z trzema kooperantami, którzy dostarczają mu niezbędnych do produkcji detali, przy czym od I kooperanta pochodzi 25% ogólnej ilości detali, od II kooperanta pochodzi 30% ogólnej ilości detali, a dostawcą pozostałej części jest III kooperant. Przeprowadzona na terenie zakładu kontrola ujawniła, że wśród detali dostarczanych przez I kooperanta jest 2% wadliwych, przez II kooperanta – 4% wadliwych, a przez III – 1% wadliwych. Prawdopodobieństwo, że wybrany losowo z całej dostawy detal będzie wadliwy jest równe:

a) 0,0355;
b) 0,0215;
c) 0,10;
d) innej liczbie.

1.51. Zakład przemysłowy współpracuje z trzema kooperantami, którzy dostarczają mu niezbędnych do produkcji detali, przy czym od I kooperanta pochodzi 25% ogólnej ilości detali, od II kooperanta pochodzi 30% ogólnej ilości detali, a dostawcą pozostałej części jest III kooperant. Przeprowadzona na terenie zakładu kontrola ujawniła, że wśród detali dostarczanych przez I kooperanta jest 2% wadliwych, przez II kooperanta – 4% wadliwych, a przez III – 1% wadliwych. Losowo wybrany detal okazał się wadliwy. Najprawdopodobniej pochodzi on od:

a) pierwszego kooperanta;
b) drugiego kooperanta;
c) trzeciego kooperanta.
d) Mamy za mało informacji, żeby ocenić, od którego kooperanta pochodzi wadliwy detal.

1.52. Prawdopodobieństwo wygrania 5 partii z 8 z przeciwnikiem o jednakowej sile jest równe:

a) $\frac{1}{2}$;
b) $\frac{7}{32}$;
c) $\frac{5}{8}$;
d) innej liczbie.

1.53. Prawdopodobieństwo, że w 5 rzutach monetą orzeł wypadnie dokładnie dwa razy, jest równe:

a) $\frac{5}{16}$;
b) $\frac{1}{32}$;
c) $\frac{1}{2}$;
d) innej liczbie.

1.54. Prawdopodobieństwo wyrzucenia co najmniej jednej szóstki w trzech rzutach symetryczną kostką do gry jest równe:

a) $\frac{203}{216}$;
b) $\frac{11}{216}$;
c) $\frac{91}{216}$;
d) innej liczbie.

1.55. Wykonano 71 rzutów kostką do gry.

a) Najbardziej prawdopodobna liczba wyrzuconych szóstek wynosi 11.
b) Najbardziej prawdopodobna liczba wyrzuconych szóstek wynosi 12.
c) Mamy dwie najbardziej prawdopodobne liczby wyrzuconych szóstek 11 oraz 12.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

1.56. Prawdopodobieństwo trafienia do celu w jednym strzale jest równe $\frac{1}{2}$.

Ilość strzałów n, które trzeba oddać, aby prawdopodobieństwo trafienia co najmniej raz, było mniejsze niż 0,9, wynosi:

a) $n \geq 3 \wedge n \in N$;
b) $n \leq 3 \wedge n \in N$;
c) $n \in N$;
d) $n = 4$.

1.57. Prawdopodobieństwa zajścia niezależnych zdarzeń A i B są następujące: $P(A) = 0{,}25$ i $P(B) = 0{,}5$. Wówczas prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$ jest równe:

a) 0,125;
b) 0,1;
c) 0,5.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$.

1.58. Prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń A i B są następujące: $P(A) = 0{,}4$ i $P(B) = 0{,}25$. Wówczas prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$ jest równe:

a) 0,125;
b) 0,1;

c) 0,5.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$.

1.59. Zdarzenia A i B są rozłączne oraz $P(A) = 0{,}6$ i $P(B) = 0{,}3$. Wówczas prawdo-podobieństwo $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,9;
b) 0,1;
c) 0,18.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$.

1.60. Prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń A i B są następujące: $P(A) = 0{,}1$ i $P(B) = 0{,}4$. Wówczas prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,2;
b) 0,5;
c) 0,3.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$.

1.61. Zdarzenia A, B są niezależne. Prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń A, B są następujące: P(A) = 0,3, P(B) = 0,4. Wówczas prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$ jest równe:

a) 0,12;
b) 0,7;
c) 0,58.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(A \cup B)$.

1.62. Wiadomo, że $P(A') = \frac{1}{3}$ i $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ oraz $P(B') = \frac{1}{2}$. Wówczas prawdo-podobieństwo $P(A \cap B)$ jest równe:

a) $\frac{1}{3}$;
b) $\frac{1}{6}$;

c) $\frac{1}{2}$.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$.

1.63. Zdarzenia A, B są niezależne. Prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń A oraz $A \cup B$ są następujące: P(A) = 0,5, P($A \cup B$) = 0,8. Prawdopodobieństwo P(B) jest równe:

a) 0,15;
b) 0,3;
c) 0,6.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(B)$.

1.64. Które ze stwierdzeń jest fałszywe? Jeżeli A i B są niezależnymi zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, to:

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
b) $P(A \mid B) = P(B)$;
c) $P(A \mid B) = P(A)$.
d) Każde z powyższych stwierdzeń jest fałszywe.

1.65. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe? Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A) \neq 0$ i $P(B) \neq 0$, to:

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
c) $\frac{P(A \mid B)}{P(B \mid A)} = \frac{P(A)}{P(B)}$.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

1.66. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe? Jeżeli A i B są zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A) \neq 0$ i $P(B) \neq 0$, to:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;
b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

1.67. Które ze stwierdzeń jest fałszywe? Jeżeli A i B są niezależnymi zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, to:

a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$;

b) $P(A \mid B) = P(B)$;

c) $P(A \mid B) = P(A)$.

d) Każde z powyższych stwierdzeń jest fałszywe.

1.68. Dane są zdarzenia losowe A oraz B_i, i = 1, ..., n takie, że $B_i \cap B_j = \varnothing$, gdy $i \neq j$ oraz $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Wówczas:

a) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A|B_i)}{P(B_1)}$

b) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(B_i|A)}{P(B_1)}$;

c) $\frac{P(B_i|A)}{P(B_i)} = \frac{P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$.

d) Każde z powyższych stwierdzeń jest fałszywe.

1.69. Dane są zdarzenia losowe A oraz B_i , i = 1, ..., n takie, że $B_i \cap B_j = \varnothing$, gdy $i \neq j$ oraz $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) $P(A) \leq \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$;

b) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)$;

c) $P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|\,|B_i)}$;

d) $P(B_k|A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}{P(A|B_k)}$.

ROZDZIAŁ 2

JEDNOWYMIAROWA ZMIENNA LOSOWA

2.1. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Zmienną losową **X** nazywamy dowolną funkcję **X** określoną na przestrzeni zdarzeń Ω o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\Re$ oraz taką, że dla każdego $x \in \Re$ zbiór $A = \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) < x\}$ jest zdarzeniem.

b) Zmienną losową **X** nazywamy dowolną funkcję **X** określoną na przestrzeni zdarzeń Ω o wartościach w zbiorze liczb naturalnych N oraz taką, że dla każdego $x \in N$ zbiór $A = \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) > x\}$ jest zdarzeniem.

c) Zmienną losową **X** nazywamy dowolną funkcję **X** określoną na przestrzeni zdarzeń Ω o wartościach w zbiorze liczb całkowitych C oraz taką, że dla każdego $x \in C$ zbiór $A = \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) < x\}$ jest zdarzeniem.

d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

2.2. Dystrybuantę F(x) zmiennej losowej **X** definiujemy następująco: $F(x) = P(\mathbf{X} \le x)$. Które z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Dystrybuanta F(x) dowolnej zmiennej losowej spełnia warunek $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 0$.

b) Dystrybuanta F(x) dowolnej zmiennej losowej jest funkcją rosnącą.

c) Dystrybuanta F(x) dowolnej zmiennej losowej jest funkcją ciągłą.

d) Dystrybuanta F(x) dowolnej zmiennej losowej przyjmuje wartości z przedziału $< 0,1 >$.

2.3. Dystrybuantę zmiennej losowej **X** definiujemy następująco: $F(x) = P(\mathbf{X} \le x)$. Który z powyższych wzorów jest fałszywy?

a) $P(a < \mathbf{X} \le b) = F(b) - F(a)$;

b) $0 \le F(x) \le 1$ dla każdego $x \in \Re$;

c) $P(\mathbf{X} = x_o) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

2.4. Dystrybuantę F(x) zmiennej losowej **X** definiujemy następująco: $F(x) = P(\mathbf{X} < x)$. Który ze wzorów zachodzi dla zmiennej losowej skokowej?

a) $P(\mathbf{X} \le b) = 1 - F(b)$;
b) $P(\mathbf{X} > b) = F(b)$;
c) $P(a < \mathbf{X} < b) = F(b) - F(a)$.
d) Żaden wzór nie zachodzi.

2.5. Który ze wzorów nie zachodzi dla zmiennej losowej ciągłej?

a) $P(\mathbf{X} < b) = P(\mathbf{X} \le b)$;
b) $P(\mathbf{X} > b) = P(\mathbf{X} \ge b)$;
c) $P(a < \mathbf{X} < b) = P(a \le \mathbf{X} \le b)$;
d) $P(\mathbf{X} < b) = P(\mathbf{X} > b)$.

2.6. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x). Która z zależności nie jest spełniona?

a) $\bigwedge_{x \in \Re} F(x) = P(\mathbf{X} \le x) \Rightarrow P(a \le \mathbf{X} \le b) = F(b) - F(a)$;
b) $\bigwedge_{x \in \Re} F(x) = P(\mathbf{X} < x) \Rightarrow P(a \le \mathbf{X} < b) = F(b) - F(a)$;
c) $P(\mathbf{X} = a) = \lim_{x \to a^+} F(x) - \lim_{x \to a^-} F(x)$;
d) dla dowolnego $a, b \in \Re$ $[a < b] \Rightarrow [F(a) \le F(b)]$.

2.7. Które ze stwierdzeń jest fałszywe? Funkcja gęstości zmiennej losowej ciągłej spełnia warunek:

a) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = P(\mathbf{X} \ge a)$ dla dowolnego $a \in \Re$.
b) $\int_a^b f(x)dx = P(a < \mathbf{X} \le b)$ dla dowolnych $a < b$.
c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(-\infty < \mathbf{X} \le +\infty) = 1$.
d) $P(\mathbf{X} = a) > 0$ dla dowolnego $a \in \Re$.

2.8. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej jest funkcją ciągłą.
b) Funkcja gęstości zmiennej losowej ma postać

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \mathbf{X} < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

c) Funkcja gęstości spełnia warunek $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$.

d) Funkcja gęstości spełnia warunek $f(x) > 0$ dla dowolnego $x \in \Re$.

2.9. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	2	4	5
p_i	0,3	a	0,1	0,5

Wartość a wynosi:

a) 0;
b) 0,1;
c) 0,2.
d) Wartość a może być dowolna.

2.10. Poniżej przedstawiony został rozkład zmiennej losowej **X**, gdy wartość a wynosi:

x_i	0	2	4	5
p_i	–0,3	a	0,1	0,5

a) 0;
b) 0,7;
c) 1;
d) dla żadnej wartości a.

2.11. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	1	2	4	5
p_i	0,1	0,2	0,1	0,6

Prawdopodobieństwo $P(1 < \mathbf{X} < 5)$ wynosi:

a) 0,2;
b) 0,3;

c) 0,4;
d) żadne z powyższych.

2.12. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	5
p_i	0,2	0,1	0,5	0,2

Prawdopodobieństwo P(**X** ≤ 5) wynosi:

a) 0;
b) 0,3;
c) 0,7;
d) 1.

2.13. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	6	8
p_i	0,1	0,1	0,1	0,7

Prawdopodobieństwo P(**X** ≥ 6) wynosi:

a) 0,2;
b) 0,3;
c) 0,7;
d) 0,8.

2.14. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	2	6	8
p_i	0,2	0,1	0,2	0,5

Wartość dystrybuanty F(6,3) wynosi:

a) 0;
b) 0,2;
c) 0,5;
d) żadne z powyższych.

2.15. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	1	2	5	8
p_i	0,3	0,2	0,2	0,3

Wartość dystrybuanty F(0) wynosi:

a) 0;
b) 0,3;
c) 0,5;
d) 1.

2.16. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	2	4	9
p_i	0,3	0,1	0,1	0,5

Wartość dystrybuanty F(10,2) wynosi:

a) 0;
b) 0,3;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.17. Zmienna losowa **X** ma następującą funkcję prawdopodobieństwa P(**X** = 0) = 0,25, P(**X** = 1) = 0,25, P(**X** = 2) = 0,5. Niech F oznacza dystrybuantę zmiennej **X**. Wówczas F(2,001) jest równe:

a) 1;
b) 0,5;
c) 0,25;
d) 0.

2.18. Zmienna losowa **X** ma następującą funkcję prawdopodobieństwa P(**X** = 0) = 0,25, P(**X** = 1) = 0,25, P(**X** = 2) = 0,5. Niech F oznacza dystrybuantę zmiennej **X**. Wówczas F(1,999) jest równe:

a) 1;
b) 0,5;
c) 0,25;
d) 0.

2.19. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<1\\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 1\le x<3\\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 3\le x<4\\ 1 & \text{dla} \quad x\ge 4\end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** = 5,5) wynosi:

a) 0;
b) 0,2;
c) 0,5;
d) żadne z powyższych.

2.20. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<1\\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 1\le x<3\\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 3\le x<4\\ 1 & \text{dla} \quad x\ge 4\end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** = 3) wynosi:

a) 0;
b) 0,2;
c) 0,5;
d) żadne z powyższych.

2.21. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<1\\ 0{,}1 & \text{dla} \quad 1\le x<4\\ 0{,}4 & \text{dla} \quad 4\le x<6\\ 0{,}9 & \text{dla} \quad 6\le x<8\\ 1 & \text{dla} \quad x\ge 8\end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(5 ≤ **X** ≤ 8) wynosi:

a) 0;
b) 0,6;
c) 0,9;
d) żadne z powyższych.

2.22. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 2 \\ 0{,}1 & \text{dla} \quad 2 \le x < 5 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad 5 \le x < 6 \\ 0{,}7 & \text{dla} \quad 6 \le x < 7 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 7 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** > 5,5) wynosi:

a) 0,7;
b) 0;
c) 0,3;
d) żadne z powyższych.

2.23. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 2 \\ 0{,}1 & \text{dla} \quad 2 \le x < 5 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad 5 \le x < 6 \\ 0{,}7 & \text{dla} \quad 6 \le x < 7 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 7 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** < 6) wynosi:

a) 0,1;
b) 0,2;
c) 0,3;
d) żadne z powyższych.

2.24. Dystrybuantę F(x) zmiennej losowej **X** postaci F(x) = P(**X** ≤ x) przedstawia funkcja:

a) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 3 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 4 \le x < 7 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 7 \le x < 8 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 8 \end{cases}$$

b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 3 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}4 & \text{dla} \quad 4 \le x < 7 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 7 \le x < 8 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 8 \end{cases}$$

c) $$F(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{dla} \quad x < 3 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}4 & \text{dla} \quad 4 \le x < 7 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 7 \le x < 8 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 8 \end{cases}$$

d) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 3 \\ 0{,}3 & \text{dla} \quad 3 \le x < 4 \\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 4 \le x < 7 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 7 \le x < 8 \\ 1{,}1 & \text{dla} \quad x \ge 8 \end{cases}$$

2.25. Zmienna losowa **X** ma funkcję prawdopodobieństwa postaci:

x_i	–2	–1	2	5
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

Funkcja zmiennej losowej **U** = 2**X** – 1 ma postać:

a)

x_i	–5	–3	3	9
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

b)

x_i	–2	–1	2	5
p_i	–0,8	–0,3	0,3	–0,3

c)

x_i	–2	–1	2	5
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

d) żadna z powyższych.

2.26. Zmienna losowa **X** ma funkcję prawdopodobieństwa postaci:

x_i	–1	0	1	3
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

Funkcja zmiennej losowej $\mathbf{U} = \mathbf{X}^2$ ma postać:

a)

x_i	–1	0	1	3
p_i	0,01	0,04	0,25	0,04

b)

x_i	1	0	9
p_i	0,6	0,2	0,2

c)

x_i	–2	0	2	6
p_i	0,1	0,2	0,5	0,2

d) żadna z powyższych.

2.27. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{dla} \quad 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Wartość a wynosi:

a) 4;
b) 5;
c) 1;
d) żadna z powyższych.

2.28. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} ax & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Wartość a wynosi:

a) 1;
b) 0,5;
c) 2;
d) żadna z powyższych.

2.29. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla} \quad 0 \le x \le a \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Wartość a wynosi:

a) 1;
b) –1;
c) 2;
d) żadna z powyższych.

2.30. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}2 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 6 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo $P(2 \le \mathbf{X} \le 4)$ wynosi:

a) 0,4;
b) 0,2;

c) 0;
d) żadne z powyższych.

2.31. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad 1\le x\le 2\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x\end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** ≤ 1,5) wynosi:

a) 0,5;
b) 0;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.32. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & \text{dla} \quad 4\le x\le 7\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x\end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** = 5) wynosi:

a) 0,3;
b) 0;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.33. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x & \text{dla} \quad 0\le x\le 2\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x\end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(–0,5 < **X** < 1) wynosi:

a) 0,5;
b) 0;
c) 0,25;
d) żadne z powyższych.

2.34. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(1 < **X** < 4) wynosi:

a) 0,25;
b) 0,75;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.35. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** > 1) wynosi:

a) 0,25;
b) 0,75;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.36. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Która z równości jest fałszywa?

a) P(0 < **X** < 0,5) = P(0,5 < **X** < 1);
b) P(0 < **X** < 0,5) = P(**X** < 0,5);
c) P(0 < **X** < 0,5) = P(–5 < **X** < 0,5);
d) P(0 < **X** < 0,5)= P(0 < **X** ≤ 0,5).

2.37. Zmienna losowa **X** ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{dla} \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** > 1) wynosi:

a) 0;
b) 0,5;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.38. Dystrybuanta zmiennej losowej **X** ma postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x^3 & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(0,1 < **X** < 0,2) wynosi:

a) 0,008;
b) 0,007;
c) 0;
d) żadne z powyższych.

2.39. Dystrybuanta zmiennej losowej **X** ma postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x^3 & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Prawdopodobieństwo P(**X** > 0,5) wynosi:

a) 0,125;
b) 0, 875;
c) 0,2;
d) żadne z powyższych.

2.40. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}2 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 6 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Dystrybuanta F(5) wynosi:

a) 0;
b) 0,8;

c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.41. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Dystrybuanta F(2) wynosi:

a) 0;
b) 0,5;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.42. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla} \quad 4 \le x \le 7 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Dystrybuanta F(3) wynosi:

a) 0;
b) 0,3;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.43. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Dystrybuanta F(0,2) wynosi:

a) 0;
b) 0,01;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.44. Zmienna losowa **X** ma rozkład o gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{dla} \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Dystrybuanta F(1) wynosi:

a) 0,25;
b) 0,5;
c) 1;
d) żadne z powyższych.

2.45. Dystrybuanta zmiennej losowej **X** o funkcji gęstości:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x \end{cases}$$

określona jest wzorem:

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0{,}5x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0{,}5x & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}$

d) żadnym z powyższych.

2.46. Dystrybuanta zmiennej losowej **X** wyrażona jest wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x < -0{,}5 \\ x + 0{,}5 & \text{gdy} \quad -0{,}5 \le x \le 0 \\ 0{,}5 & \text{gdy} \quad 0 < x < 0{,}5 \\ x & \text{gdy} \quad 0{,}5 \le x \le 1 \\ 1 & \text{gdy} \quad x > 1 \end{cases}$$

Zatem funkcja gęstości ma postać:

a) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x < -0{,}5, \\ 1 & \text{gdy} \quad -0{,}5 \le x \le 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad 0 < x < 0{,}5 \\ 1 & \text{gdy} \quad 0{,}5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x < -0{,}5, \\ x & \text{gdy} \quad -0{,}5 \le x \le 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad 0 < x < 0{,}5 \\ x & \text{gdy} \quad 0{,}5 \le x \le 1 \\ 1 & \text{gdy} \quad x > 1 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad x < -0{,}5 \\ x + 0{,}5 & \text{gdy} \quad -0{,}5 \le x \le 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad 0 < x < 0{,}5 \\ x & \text{gdy} \quad 0{,}5 \le x \le 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad x > 1 \end{cases}$$

d) żadną z powyższych.

ROZDZIAŁ 3

PARAMETRY ZMIENNEJ LOSOWEJ JEDNOWYMIAROWEJ

3.1. Które z powyższych stwierdzeń jest fałszywe? Jeżeli istnieje wartość oczekiwana zmiennej losowej $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$, tzn. $E(\mathbf{X})$, $E(\mathbf{Y})$, to:

a) istnieje $E(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$ oraz $E(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) - E(\mathbf{Y})$;
b) istnieje $E(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$ oraz $E(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{Y})$;
c) $E(a\mathbf{X} + b) = aE(\mathbf{X}) + b$ dla dowolnych stałych a, b;
d) $E[(a\mathbf{X})^k] = aE(\mathbf{X}^k)$, gdzie: k to dowolna liczba naturalna, a to dowolna liczba rzeczywista.

3.2. Które z powyższych stwierdzeń jest fałszywe? Jeżeli istnieje wariancja zmiennej losowej $\mathbf{X}$, tzn. $D^2(\mathbf{X})$, to:

a) dla dowolnej stałej b zachodzi: $D^2(\mathbf{X} + b) = D^2(\mathbf{X})$;
b) dla dowolnej stałej a zachodzi: $D^2(a\mathbf{X}) = aD^2(\mathbf{X})$;
c) $D^2(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}^2) - [E(\mathbf{X})]^2$;
d) dla każdego $c \neq E(\mathbf{X})$ zachodzi: $D^2(\mathbf{X}) < E((\mathbf{X} - c)^2)$.

3.3. Które z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe? Dla dowolnej stałej zachodzi:

a) $E(a) = 1$, $D(a) = a$;
b) $E(a) = a$, $D(a) = 0$;
c) $E(a) = 0$, $D(a) = 1$;
d) żadne z powyższych.

3.4. Dla dowolnej zmiennej $\mathbf{X}$ zachodzi:
a) $E(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) = 0$, $D(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) = D(\mathbf{X})$;
b) $E(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) = E(\mathbf{X})$, $D(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) = 0$;
c) $E(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) = E(\mathbf{X})$, $D(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) = D(\mathbf{X})$;
d) żadne z powyższych.

3.5. Dla zmiennej losowej $\mathbf{X}$ zachodzi $E(\mathbf{X}) = 5$, $D(\mathbf{X}) = 2$. Zatem dla zmiennej losowej $\mathbf{Y} = 2\mathbf{X} - 1$ mamy:

a) $E(\mathbf{Y}) = 9$, $D(\mathbf{Y}) = 4$;
b) $E(\mathbf{Y}) = 9$, $D(\mathbf{Y}) = 8$;
c) $E(\mathbf{Y}) = 5$, $D(\mathbf{Y}) = 3$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

3.6. Momentem centralnym rzędu r zmiennej losowej **X** nazywamy:

a) wartość oczekiwaną funkcji $[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^r$ tej zmiennej losowej;
b) wariancję funkcji $[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^r$ tej zmiennej losowej;
c) wartość oczekiwaną r-tej potęgi zmiennej losowej;
d) wariancję r-tej potęgi zmiennej losowej.

3.7. Momentem zwykłym rzędu r zmiennej losowej **X** nazywamy:

a) wartość oczekiwaną funkcji $[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^r$ tej zmiennej losowej;
b) wariancję funkcji $[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^r$ tej zmiennej losowej;
c) wartość oczekiwaną r-tej potęgi zmiennej losowej;
d) wariancję r-tej potęgi zmiennej losowej.

3.8. Która z zależności nie jest prawdziwa?

a) $\mu_1 = 0$;
b) $\mu_2 = m_2 - m_1^2$;
c) $D^2(\mathbf{X}) = \mu_2$;
d) $E(\mathbf{X}) = m_2$.

3.9. Dla zmiennej **X** wyznaczamy zmienną $\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{X}}{D(\mathbf{X})}$. Wówczas:

a) $D^2(\mathbf{Y}) < 1$;
b) $D^2(\mathbf{Y}) > 1$;
c) $D^2(\mathbf{Y}) = 1$.
d) Żadna z odpowiedzi a), b), c) nie jest prawdziwa.

3.10. Dominantą (modą) zmiennej losowej skokowej **X** nazywamy wartość zmiennej losowej, której odpowiada:

a) największe prawdopodobieństwo;
b) maksimum lokalne funkcji gęstości;
c) najmniejsze prawdopodobieństwo;
d) minimum lokalne funkcji gęstości.

3.11. Dominantą (modą) zmiennej losowej ciągłej **X** nazywamy wartość zmiennej losowej, której odpowiada:

a) największe prawdopodobieństwo;
b) maksimum lokalne funkcji gęstości;
c) najmniejsze prawdopodobieństwo;
d) minimum lokalne funkcji gęstości.

Kwantylem rzędu p zmiennej losowej **X** nazywamy wartość K_p spełniającą nierówności:

a) $P(\mathbf{X} \geq K_p) \geq p, \quad P(\mathbf{X} \leq K_p) \geq 1 - p, \quad 0 < p < 1;$

b) $P(\mathbf{X} \geq K_p) \leq p, \quad P(\mathbf{X} \leq K_p) \geq 1 - p, \quad 0 < p < 1;$

c) $P(\mathbf{X} \leq K_p) \geq p, \quad P(\mathbf{X} \geq K_p) \geq 1 - p, \quad 0 < p < 1.$

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

3.12. Kwantyl K_p rzędu p ($0 < p < 1$) zmiennej losowej **X** typu ciągłego o dystrybuancie F(x) i gęstości f(x), spełnia następujące zależności:

a) $F(K_p) < P(\mathbf{X} \leq K_p) < \int\limits_{-\infty}^{K_p} f(x)dx = p;$

b) $P(\mathbf{X} \leq K_p) < F(K_p) = p < \int\limits_{-\infty}^{K_p} f(x)dx;$

c) $\int\limits_{-\infty}^{K_p} f(x)dx < F(K_p) = P(\mathbf{X} \leq K_p) = p;$

d) $F(K_p) = P(\mathbf{X} \leq K_p) = \int\limits_{-\infty}^{K_p} f(x)dx = p.$

3.13. Kwantyl K_p rzędu p ($0 < p < 1$) zmiennej losowej **X** typu skokowego o dystrybuancie $F(x) = P(\mathbf{X} \leq x)$ spełnia następujący warunek:

a) $\lim\limits_{x \to K_p^-} F(x) < p < F(K_p)$ oraz $P(\mathbf{X} < K_p) \leq p \leq P(\mathbf{X} \leq K_p);$

b) $\lim\limits_{x \to K_p^-} F(x) \leq p \leq F(K_p)$ oraz $P(\mathbf{X} < K_p) \leq p \leq P(\mathbf{X} \leq K_p);$

c) $\lim\limits_{x \to K_p^-} F(x) \leq p \leq F(K_p)$ oraz $P(\mathbf{X} \leq K_p) < p \leq P(\mathbf{X} < K_p);$

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

3.14. Wskaźnikiem (współczynnikiem) zmienności zmiennej losowej **X** nazywamy wyrażenie określone wzorem:

a) $\gamma = \dfrac{\mu_3}{D^3(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0;$

b) $\nu = \dfrac{D(\mathbf{X})}{E(\mathbf{X})}$, gdzie $E(\mathbf{X}) \neq 0;$

c) $K = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$;

d) $k = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})} - 3$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$.

3.15. Współczynnikiem skośności zmiennej losowej **X** nazywamy wyrażenie:

a) $\gamma = \dfrac{\mu_3}{D^3(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$;

b) $\nu = \dfrac{D(\mathbf{X})}{E(\mathbf{X})}$, gdzie $E(\mathbf{X}) \neq 0$;

c) $K = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$;

d) $k = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})} - 3$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$.

3.16. Ekscesem nazywamy wyrażenie postaci:

a) $\gamma = \dfrac{\mu_3}{D^3(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$;

b) $\nu = \dfrac{D(\mathbf{X})}{E(\mathbf{X})}$, gdzie $E(\mathbf{X}) \neq 0$;

c) $K = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$;

d) $k = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})} - 3$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$.

3.17. Wskaźnikiem skupienia (współczynnikiem spłaszczenia lub kurtozą) nazywamy wyrażenie:

a) $\gamma = \dfrac{\mu_3}{D^3(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$;

b) $\nu = \dfrac{D(\mathbf{X})}{E(\mathbf{X})}$, gdzie $E(\mathbf{X}) \neq 0$;

c) $K = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})}$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$;

d) $k = \dfrac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})} - 3$, gdzie $D(\mathbf{X}) > 0$.

3.18. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,2	0,3

Wartość oczekiwana E(**X**) rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1,8;
b) 1,5;
c) 1,7.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.19. Zmienna losowa **X** ma następującą funkcję prawdopodobieństwa

P(**X** = –1) = 0,25, P(**X** = 0) = 0,25, P(**X** = 1) = 0,5. Wówczas E(**X**) wynosi:

a) 0;
b) 0,25;
c) 0,75;
d) 1,25.

3.20. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,2	0,3

Wartość oczekiwana E(**Y**) rozkładu zmiennej losowej **Y** = 2**X** – 1 wynosi:

a) 3;
b) 2;
c) 1,5.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.21. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,3	0,2	0,2	0,3

Moment zwykły m_2 rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1,5;
b) 3,7;
c) 1,2.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.22. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,2	0,5

Wariancja D^2(**X**) rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1,2;
b) 2,2;
c) 0,76.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.23. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,2	0,5

Wariancja D^2(**Y**) rozkładu zmiennej losowej **Y** = –2**X** + 1 wynosi:

a) –1,52;
b) 3,04;
c) 0,76.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.24. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

Dominanta rozkładu wynosi:

a) 0,25;
b) 1;

c) 5.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.25. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

Kwartyl pierwszy rozkładu wynosi:

a) 1;
b) 0,25;
c) brak kwartyla pierwszego.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.26. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

Mediana rozkładu wynosi:

a) 0,5;
b) 2;
c) brak mediany.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.27. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,05

Kwartyl trzeci rozkładu wynosi:

a) 0,75;
b) 3;
c) brak kwartyla trzeciego;
d) 4.

3.28. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

Kwartylem pierwszym rozkładu jest:

a) 0;
b) 1;
c) dowolna liczba z przedziału < 0,1 >;
d) brak kwartyla pierwszego.

3.29. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

Medianą rozkładu jest:

a) 1;
b) 2;
c) dowolna liczba z przedziału < 1,2 >.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.30. Dany jest rozkład zmiennej losowej **X**:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

Kwartylem trzecim rozkładu jest:

a) 2;
b) 3;
c) dowolna liczba z przedziału < 2,3 >.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.31. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ 0{,}1 & \text{dla } 0\le x<1\\ 0{,}2 & \text{dla } 1\le x<2\\ 0{,}7 & \text{dla } 2\le x<3\\ 1 & \text{dla } x\ge 3\end{cases}$$

Wartość oczekiwana rozkładu wynosi:

a) 2;
b) 3;
c) 1.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.32. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ 0{,}1 & \text{dla } 0\le x<1\\ 0{,}2 & \text{dla } 1\le x<2\\ 0{,}7 & \text{dla } 2\le x<3\\ 1 & \text{dla } x\ge 3\end{cases}$$

Wariancja rozkładu wynosi:

a) 0,2;
b) 0,8;
c) 2.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.33. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ 0{,}1 & \text{dla } 0\le x<1\\ 0{,}2 & \text{dla } 1\le x<2\\ 0{,}7 & \text{dla } 2\le x<3\\ 1 & \text{dla } x\ge 3\end{cases}$$

Dominanta rozkładu wynosi:

a) 2;
b) 4;
c) 0,5.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.34. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X ≤** x**)**, gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ 0{,}1 & \text{dla } 0\le x<1\\ 0{,}2 & \text{dla } 1\le x<2\\ 0{,}7 & \text{dla } 2\le x<3\\ 1 & \text{dla } x\ge 3\end{cases}$$

Kwartyl pierwszy rozkładu wynosi:

a) 1;
b) 2.
c) Rozkład nie posiada kwartyla pierwszego.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.35. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X ≤** x**)**, gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ 0{,}1 & \text{dla } 0\le x<1\\ 0{,}2 & \text{dla } 1\le x<2\\ 0{,}7 & \text{dla } 2\le x<3\\ 1 & \text{dla } x\ge 3\end{cases}$$

Kwartyl trzeci rozkładu wynosi:

a) 2;
b) 3.
c) Rozkład nie posiada kwartyla trzeciego.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.36. Dana jest zmienna losowa **X** z dystrybuantą F(x) = P(**X** ≤ x), gdzie:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<0\\ 0{,}1 & \text{dla } 0\le x<1\\ 0{,}2 & \text{dla } 1\le x<2\\ 0{,}7 & \text{dla } 2\le x<3\\ 1 & \text{dla } x\ge 3\end{cases}$$

Medianą rozkładu jest:

a) 2;
b) 3;
c) dowolna liczna z przedziału < 2,3 >.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.37. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x & \text{dla } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\end{cases}$$

Wartość oczekiwana E(**X**) zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 2;
b) $\frac{4}{3}$;
c) $\frac{2}{9}$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.38. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5x & \text{dla } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\end{cases}$$

Moment zwykły m_2 zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 2;
b) $\frac{4}{3}$;

c) $\frac{2}{9}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.39. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Wariancja D^2(**X**) zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 2;

b) $\frac{4}{3}$;

c) $\frac{2}{9}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.40. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Kwartyl pierwszy rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1;

b) $\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{0{,}25}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.41. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \quad x \end{cases}$$

Mediana rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1;
b) $\sqrt{2}$;
c) $\sqrt{0,75}$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.42. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}0,5x & \text{dla} \quad 0\le x\le 2\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x\end{cases}$$

Kwartyl trzeci rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1;
b) $\sqrt{2}$;
c) $\sqrt{3}$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.43. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}0,5x & \text{dla} \quad 0\le x\le 2\\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostałych} \quad x\end{cases}$$

Dominantą rozkładu zmiennej losowej **X** jest:

a) 1;
b) 0,5;
c) brak dominanty.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.44. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad 0\le x<1\\ 2-x & \text{dla} \quad 1\le x<2\\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach}\end{cases}$$

Wartość oczekiwana E(**X**) zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 2;
b) 1;
c) 0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.45. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 2-x & \text{dla} \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Dominanta zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 2;
b) 1;
c) 0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.46. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości wyrażonej wzorem:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 2-x & \text{dla} \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Mediana losowej **X** wynosi:

a) 1;
b) 2;
c) 0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.47. Rozkład zmiennej losowej **X** określony jest dystrybuantą:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Wartość oczekiwana E(**X**) zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 0;
b) 1;

c) 0,5.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.48. Rozkład zmiennej losowej **X** określony jest dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Moment zwykły m_2 zmiennej losowej **X** wynosi:

a) $\frac{1}{3}$;
b) 1;
c) 0,5.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.49. Rozkład zmiennej losowej **X** określony jest dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Wariancja $D^2(\mathbf{X})$ zmiennej losowej **X** wynosi:

a) $\frac{1}{2}$;
b) $\frac{1}{3}$;
c) $\frac{1}{12}$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.50. Rozkład zmiennej losowej **X** określony jest dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Dominantą rozkładu zmiennej losowej **X** jest:

a) 0,5;
b) 1;
c) brak dominanty.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.51. Rozkład zmiennej losowej **X** określony jest dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Mediana rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 0,25;
b) 0,5;
c) 0,75.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.52. Rozkład zmiennej losowej **X** określony jest dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \le 0 \\ x & \text{dla} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Kwartyl pierwszy rozkładu zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 0,5;
b) 0,25;
c) 0,75.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

3.53. Dla dystrybuanty F symetrycznego rozkładu o zerowej wartości oczekiwanej zachodzi równość:

a) $\bigwedge_{x \in \Re} F(-x) = F(x)$;
b) $\bigwedge_{x \in \Re} F(-x) = 1 + F(x)$;
c) $\bigwedge_{x \in \Re} F(-x) = 1 - F(x)$.
d) Żadna z powyższych równości nie jest spełniona.

ROZDZIAŁ 4

DWUWYMIAROWA ZMIENNA LOSOWA TYPU SKOKOWEGO I JEJ PARAMETRY

4.1. Które ze stwierdzeń jest fałszywe? Dystrybuanta $F(x,y) = P(\mathbf{X} \leq x, \mathbf{Y} \leq y)$ dwuwymiarowej zmiennej losowej $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ posiada następujące własności:

a) $\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$ dla dowolnego $x \in \Re$;

b) $\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$ dla dowolnego $y \in \Re$;

c) $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1$.

d) Dystrybuanta jest funkcją rosnącą, co najmniej prawostronnie ciągłą względem każdego z argumentów.

4.2. Dla dowolnych punktów: (x_1,y_1), (x_2,y_2) takich że, $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ zachodzi nierówność, gdzie $F(x,y) = P(\mathbf{X} \leq x, \mathbf{Y} \leq y)$:

a) $P(x_1 < \mathbf{X} \leq x_2, y_1 < \mathbf{Y} \leq y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \geq 0$;
b) $P(x_1 < \mathbf{X} \leq x_2, y_1 < \mathbf{Y} \leq y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) \geq 0$;
c) $P(x_1 < \mathbf{X} \leq x_2, y_1 < \mathbf{Y} \leq y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) \geq 0$;
d) $P(x_1 < \mathbf{X} \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_1) \geq 0$.

4.3. Funkcja $P(\mathbf{X} = x_i) = p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa nazywany:

a) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **X** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej **(X, Y)**;
b) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **Y** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**);
c) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **X,** pod warunkiem, że $\mathbf{Y} = y_j$ $(i \in N)$;
d) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **Y,** pod warunkiem, że $\mathbf{X} = x_j$ $(i \in N)$.

4.4. Funkcja $P(\mathbf{Y} = y_j) = p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa nazywany:

a) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **X** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej **(X, Y)**;

b) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **Y** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**);
c) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **X,** pod warunkiem, że **Y** = y_j ($i \in N$);
d) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **Y,** pod warunkiem, że **X** = x_j ($i \in N$).

4.5. Funkcja $P\left(\mathbf{X} = x_i \middle| \mathbf{Y} = y_j\right) = \dfrac{P(\mathbf{X} = x_i, \mathbf{Y} = y_j)}{P(\mathbf{Y} = y_j)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa nazywany:

a) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **X** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej **(X**, **Y**);
b) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **Y** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**);
c) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **X,** pod warunkiem, że **Y** = y_j ($i \in N$);
d) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **Y**, pod warunkiem, że **X** = x_j ($i \in N$).

4.6. Funkcja $P\left(\mathbf{Y} = y_j \middle| \mathbf{X} = x_i\right) = \dfrac{P(\mathbf{X} = x_i, \mathbf{Y} = y_j)}{P(\mathbf{X} = x_i)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa nazywany:

a) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **X** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej **(X**, **Y**);
b) rozkładem brzegowym zmiennej losowej **Y** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**);
c) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **X**, pod warunkiem, że **Y** = y_j ($i \in N$);
d) rozkładem warunkowym zmiennej losowej **Y**, pod warunkiem, że **X** = x_j ($i \in N$).

4.7. Które ze stwierdzeń jest fałszywe? Zmienne losowe **X**, **Y** typu skokowego są niezależne według prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy:

a) dla każdej pary wartości (x_i, y_j) spełniony jest warunek $P(\mathbf{X} = x_i, \mathbf{Y} = y_j) = P(\mathbf{X} = x_i)P(\mathbf{Y} = y_j)$;
b) $P(\mathbf{X}=x_i | \mathbf{Y} = y_j) = P(\mathbf{X} = x_i)$ oraz $P(\mathbf{Y} = y_j | \mathbf{X} = x_i) = P(\mathbf{Y} = y_j)$ dla dowolnych i, j takich, że $p_{\bullet j} > 0$, $p_{i\bullet} > 0$, czyli gdy rozkłady warunkowe zmiennych losowych **X**, **Y** są równe odpowiednim rozkładom brzegowym;

c) $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$, czyli dystrybuanta łącznego rozkładu zmiennych losowych (**X**,**Y**) równa jest iloczynowi odpowiednich dystrybuant ich rozkładów brzegowych.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

4.8. Które z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe, przy założeniu, że istnieje wartość oczekiwana zmiennej losowej **X** i **Y**, tzn. E(**X**), E(**Y**)?

a) Jeżeli zmienne losowe są niezależne, to E(**XY**) = E(**X**) E(**Y**).
b) Zmienne losowe są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy E(**XY**) = E(**X**) E(**Y**).
c) Jeżeli E(**XY**) = E(**X**), to zmienne losowe są niezależne.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie musi być prawdziwe.

4.9. Które z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe, przy założeniu, że istnieje wariancja zmiennej losowej **X** i **Y**, tzn. $D^2(\mathbf{X})$, $D^2(\mathbf{Y})$?

a) Jeżeli zmienne losowe są niezależne, to $D^2(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) - D^2(\mathbf{Y})$.
b) Jeżeli zmienne losowe są niezależne, to $D^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) + D^2(\mathbf{Y})$.
c) Zmienne losowe są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $D^2(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) + D^2(\mathbf{Y})$.
d) Jeżeli $D^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) + D^2(\mathbf{Y})$, to zmienne losowe są niezależne.

4.10. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Jeżeli zmienne losowe **X**, **Y** są niezależne, to są nieskorelowane.
b) Jeżeli zmienne losowe **X**, **Y** są nieskorelowane, to są niezależne.
c) Zmienne losowe **X**, **Y** są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy są nieskorelowane.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

4.11. Dane są dwie zmienne losowe: **X** oraz **Y** ze skończonymi wartościami oczekiwanymi i wariancjami. Która z zależności nie musi być prawdziwa?

a) $E(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{Y})$;
b) $E(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) - E(\mathbf{Y})$;
c) $E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y})$;
d) $D^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) + D^2(\mathbf{Y}) + 2E(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))\, E(\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y}))$.

4.12. Dane są dwie zmienne losowe: **X** oraz **Y** ze skończonymi wartościami oczekiwanymi i wariancjami. Która z zależności jest prawdziwa?

a) $E(E(\mathbf{Y}|\mathbf{X})) = E(\mathbf{X})$;
b) $E(E(\mathbf{Y}|\mathbf{X})) = E(\mathbf{Y})$;

c) $E(E(\mathbf{Y}|\mathbf{X})) = E(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$;
d) $E(E(\mathbf{Y}|\mathbf{X})) = E(E(\mathbf{X}|\mathbf{Y}))$.

4.13. $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi, takimi, że $D(\mathbf{X}) = 3$, $D(\mathbf{Y}) = 4$. Wówczas odchylenie standardowe zmiennej $\mathbf{Y} - \mathbf{X}$ jest równe:

a) 1;
b) $\sqrt{7}$;
c) 7;
d) 5.

4.14. Dane są dwie zmienne losowe $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$. Która z poniższych sytuacji jest niemożliwa?

a) $D^2(\mathbf{X}) = 0{,}25$, $D^2(\mathbf{Y}) = 0{,}9$, $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0{,}3$;
b) $D^2(\mathbf{X}) = 0{,}75$, $D^2(\mathbf{Y}) = 0{,}9$, $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0{,}5$;
c) $D^2(\mathbf{X}) = 0{,}75$, $D^2(\mathbf{Y}) = 0{,}9$, $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$;
d) $D^2(\mathbf{X}) = 0{,}25$, $D^2(\mathbf{Y}) = 0{,}2$, $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0{,}5$.

Wskazówka: proszę policzyć $D^2(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$.

4.15. Jeżeli zmienne są niezależne, to:

a) $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$;
b) $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 1$;
c) $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -1$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.16. Który ze wzorów nie zachodzi?

a) $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mu_{11}$;
b) $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = m_{11} - m_{10}m_{01}$;
c) $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E(\mathbf{XY}) - E\mathbf{X} \cdot E\mathbf{Y}$;
d) $\operatorname{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mu_{22} - m_{10}m_{01}$.

4.17. Korelacja dodatnia występuje, gdy:

a) wzrostowi wartości jednej zmiennej odpowiada wzrost średniej wartości drugiej zmiennej;
b) spadkowi wartości jednej zmiennej odpowiada wzrost średniej wartości drugiej zmiennej;
c) wzrostowi wartości jednej zmiennej odpowiada spadek średniej wartości drugiej zmiennej.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.18. Korelacja ujemna występuje, gdy:

a) wzrostowi wartości jednej zmiennej odpowiada wzrost średniej wartości drugiej zmiennej;
b) spadkowi wartości jednej zmiennej odpowiada wzrost średniej wartości drugiej zmiennej;
c) spadkowi wartości jednej zmiennej odpowiada spadek średniej wartości drugiej zmiennej.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.19. Wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona bliska zeru oznacza:

a) brak jakiejkolwiek zależności między zmiennymi;
b) brak zależności liniowej między zmiennymi;
c) silną zależność między zmiennymi;
d) silną zależność liniową między zmiennymi.

4.20. Wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona bliska 1 oznacza:

a) brak jakiejkolwiek zależności między zmiennymi;
b) brak zależności liniowej między zmiennymi;
c) silną zależność liniową dodatnią między zmiennymi;
d) silną zależność liniową ujemną między zmiennymi.

4.21. Wartość współczynnika korelacji liniowej Pearsona bliska –1 oznacza:

a) brak jakiejkolwiek zależności między zmiennymi;
b) brak zależności liniowej między zmiennymi;
c) silną zależność liniową dodatnią między zmiennymi;
d) silną zależność liniową ujemną między zmiennymi.

4.22. Kowariancja $\mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) > 0$ oznacza:

a) brak jakiejkolwiek zależności między zmiennymi;
b) brak zależności liniowej między zmiennymi;
c) zależność liniową dodatnią między zmiennymi;
d) zależność liniową ujemną między zmiennymi.

4.23. Z talii 24 kart do gry losujemy jedną kartę. Oznaczmy przez **X** zmienną losową przyjmującą w przypadku wylosowania kara – wartość 1, kiera – wartość 2, trefla – wartość 3, pika – wartość 4. Przez **Y** oznaczmy zmienną losową przyjmującą wartości 4, 3, 2 odpowiednio w przypadku wylosowania asa, króla, damy i wartość 0 w pozostałych przypadkach. Prawdopodobieństwo $P(\mathbf{X} = 1, \mathbf{Y} = 0)$ wynosi:

a) $\frac{1}{8}$;

b) $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{1}{24}$;

d) żadne z powyższych.

4.24. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ **Y**	2	3	4
1	0,10	0,15	0
2	0,20	0,10	a
3	0	0,25	0,10

W miejscu a należy wstawić:

a) 0,05;
b) 0,20;
c) 0,10.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.25. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ **Y**	1	3	4
0	0,10	0,05	0
2	0,20	0,10	0,10
3	0,10	0,25	0,10

Prawdopodobieństwo P(**X** = 2) wynosi:

a) 0,20;
b) 0,40;
c) 0,10.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.26. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	2	3	4
0	0,10	0,05	0,10
2	0	0,10	0,20
3	0,10	0,25	0,10

Prawdopodobieństwo P(**Y** = 3) wynosi:

a) 0,10;
b) 0,25;
c) 0,40.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.27. Dany jest rozkład zmiennej losowej **(X, Y)**:

X \ Y	2	3	4
0	0,10	0,05	0,10
2	0	0,10	0,20
3	0,10	0,25	0,10

Prawdopodobieństwo P(**X** < 2,5; **Y** ≥ 3) wynosi:

a) 0,30;
b) 0,45;
c) 0,10.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.28. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	2	3	4
0	0,10	0,05	0,10
2	0	0,1	0,20
3	0,10	0,25	0,10

Wartość dystrybuanty F(2,01; 3,01) wynosi:

a) 0,10;
b) 0,25;
c) 0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.29. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ **Y**	2	3
0	0,1	0
2	0,5	0,2
3	0,1	0,1

Wartość dystrybuanty F(3,1; 3,2) wynosi:

a) 0,1;
b) 0;
c) 1.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.30. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ **Y**	2	3	4
0	0,10	0,05	0,10
2	0	0,10	0,20
3	0,10	0,25	0,10

Prawdopodobieństwo P(**X** = 0|**Y** = 2) wynosi:

a) 0,1;
b) 0,2;
c) 0,5.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.31. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	2	3	7
0	0,10	0,05	0,10
2	0	0,10	0,10
4	0,10	0,25	0,20

Prawdopodobieństwo P(**Y** = 3|**X** = 2) wynosi:

a) 0,5;
b) 0,2;
c) 0,25.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.32. Dany jest rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	0	2	4
1	0,1	0,2	0,2
2	0,3	0,1	0,1

Rozkład brzegowy zmiennej losowej **X** ma postać:

a)

X	1	2
P(**X** = x_i)	0,5	0,5

b)

X	1	2
P(**X** = x_i)	0,3	0,7

c)

X	1	2
P(**X**=x_i)	0,1	0,9

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.33. Dany jest rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ **Y**	0	2	4
1	0,1	0,2	0,2
2	0,3	0,1	0,1

Rozkład brzegowy zmiennej losowej **Y** ma postać:

a)

Y	0	2	4
P(**Y** = y_j)	0,1	0,5	0,4

b)

Y	0	2	4
P(**Y** = y_j)	0,4	0,3	0,3

c)

Y	0	2	4
P(**Y** = y_j)	0,2	0,1	0,7

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.34. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	1	2	3
0	0,20	0,30	0,10
2	0,10	0,10	0,20

Wartość oczekiwana E(**X**) rozkładu brzegowego zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1,0;
b) 0,8;
c) 2,0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.35. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	0	2	4
1	0,30	0,20	0,10
2	0,10	0,20	0,10

Wartość oczekiwana E(**Y**) rozkładu brzegowego zmiennej losowej **Y** wynosi:

a) 2,0;
b) 0,4;
c) 1,6.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.36. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	1	2
0	0,20	0,40
2	0,10	0,30

Moment zwykły m_{20} zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1,6;
b) 0,6;
c) 0,96.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.37. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	1	2
0	0,20	0,40
2	0,10	0,30

Wariancja D^2(**X**) rozkładu brzegowego zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 1,2;
b) 0,6;
c) 0,96.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.38. Dany jest rozkład zmiennej losowej **(X**, **Y**):

X \ Y	0	2
1	0,30	0,40
2	0,10	0,20

Moment zwykły m_{02} wynosi:

a) 0,6;
b) 2,02;
c) 2,40.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.39. Dany jest rozkład zmiennej losowej **(X**, **Y**):

X \ **Y**	0	2
1	0,30	0,40
2	0,10	0,20

Moment centralny μ_{02} wynosi:

a) 1,2;
b) 0,96;
c) 2,40.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.40. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ **Y**	0	1
1	0,10	0,50
2	0,30	0,10

Moment zwykły m_{11} wynosi:

a) 0,7;
b) 0,1;
c) 0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.41. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ **Y**	1	2	3
0	0,20	0,30	0,10
2	0,10	0,10	0,20

Wartość oczekiwana $E(\mathbf{X}|\mathbf{Y} = 2)$ rozkładu warunkowego zmiennej losowej $\mathbf{X}|\mathbf{Y} = 2$ wynosi:

a) 0,25;
b) 0,5;
c) 0,75.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.42. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	0	2	4
1	0,30	0,20	0,10
2	0,10	0,20	0,10

Wartość oczekiwana $E(\mathbf{Y}|\mathbf{X} = 2)$ rozkładu warunkowego zmiennej losowej $\mathbf{Y}|\mathbf{X} = 2$ wynosi:

a) 2,25;
b) 2,0;
c) 3,0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.43. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	1	2
0	0,20	0,40
2	0,30	0,10

Wariancja rozkładu warunkowego zmiennej losowej $\mathbf{X}|\mathbf{Y} = 2$ wynosi:

a) 0,64;
b) 0,16;
c) 0,0625.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.44. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	0	2
1	0,30	0,50
2	0,10	0,10

Wariancja rozkładu warunkowego zmiennej losowej **Y**|**X** = 2 wynosi:

a) 1,0;
b) 2,0;
c) 1,5.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.45. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	1	2	3
0	0,20	0,30	0,1
2	0,10	0,10	0,2

Wartość dystrybuanty $F_1(2,5)$ rozkładu brzegowego zmiennej losowej **X** wynosi:

a) 0;
b) 0,6;
c) 1.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.46. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	0	2	4
1	0,30	0,20	0,1
2	0,10	0,20	0,1

Wartość dystrybuanty $F_2(3{,}5)$ rozkładu brzegowego zmiennej losowej **Y** wynosi:

a) 0,4;
b) 0,8;
c) 1.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.47. Dane są rozkłady brzegowe zmiennej losowej (**X**, **Y**):

Y	0	2	4
$P(\mathbf{Y} = y_j)$	0,1	0,5	0,4

X	0	2
$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i)$	0,4	0,6

Wiadomo, że zmienne losowe **X**, **Y** sa niezależne. Zatem $P(\mathbf{X} = 0,\ \mathbf{Y} = 2)$ wynosi:

a) 0,2;
b) 0,9;
c) 0,6.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć $P(\mathbf{X} = 0, \mathbf{Y} = 2)$.

4.48. Dane są rozkłady brzegowe zmiennej losowej (**X**, **Y**):

Y	1	2
$P(\mathbf{Y} = y_j)$	0,3	0,7

X	0	2
P(**X** = x_i)	0,6	0,4

Zatem P(**X** = 0, **Y** = 2) wynosi:

a) 0,9;
b) 0,18;
c) 0,3.
d) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć P(**X** = 0, **Y** = 2).

4.49. Zmienne losowe **X**, **Y** są niezależne. Prawdopodobieństwo P(**X** = 1) = 0,2 oraz P(**Y** = 2) = 0,3. Zatem P(**X** = 1, **Y** = 2) wynosi:

a) 0,5;
b) 0,06.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć P(**X** = 1, **Y** = 2).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.50. Dane są rozkłady brzegowe zmiennej losowej (**X**, **Y**):

Y	1	2
P(**Y** = y_j)	0,2	0,8

X	0	1
P(**X** = x_i)	0,4	0,6

Zatem P(**X** = 0|**Y** = 2) wynosi:

a) 0,32;
b) 0,40.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć P(**X** = 0|**Y** = 2).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.51. Dane są rozkłady brzegowe zmiennej losowej (**X**, **Y**):

Y	0	2	4
P(**Y** = y_j)	0,1	0,5	0,4

X	0	2
P(**X** = x_i)	0,4	0,6

Wiadomo, że zmienne losowe **X**, **Y** są niezależne. Zatem P(**Y** = 2|**X** = 0) wynosi:

a) 0,2;
b) 0,9.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć P(**Y** = 2|**X** = 0).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.52. Dane są rozkłady brzegowe zmiennej losowej (**X**, **Y**):

Y	1	5
P(**Y** = y_j)	0,4	0,6

X	0	1
P(**X** = x_i)	0,6	0,4

Zatem P(**X** = 0|**Y** = 1) wynosi:

a) 0,24;
b) 0,4.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć P(**X** = 0|**Y** = 1).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.53. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	2	3
1	0,40	0,40
2	0,10	0,10

Zmienne losowe **X**, **Y** są:

a) niezależne i nieskorelowane;
b) niezależne i skorelowane;
c) zależne i skorelowane;
d) zależne i nieskorelowane.

4.54. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	0	1
1	0,10	0,50
2	0,30	0,10

Zmienne losowe **X**, **Y** są:

a) niezależne i nieskorelowane;
b) niezależne i skorelowane;
c) zależne i skorelowane;
d) zależne i nieskorelowane.

4.55. Dany jest rozkład zmiennej losowej (**X**, **Y**):

X \ Y	0	4
–2	0	1/3
0	1/3	0
2	0	1/3

Zmienne losowe **X**, **Y** są:

a) niezależne i nieskorelowane;
b) niezależne i skorelowane;
c) zależne i skorelowane;
d) zależne i nieskorelowane.

4.56. Dane są dystrybuanty rozkładów brzegowych dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**) postaci $F_1(x) = P(\mathbf{X} \le x)$, $F_2(y) = P(\mathbf{Y} \le y)$, gdzie:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 3 \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad y < 0 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 0 \le y < 2 \\ 0{,}8 & \text{dla} \quad 2 \le y < 4 \\ 1 & \text{dla} \quad y \ge 4 \end{cases}$$

Wiadomo, że zmienne losowe **X**, **Y** są niezależne. Zatem F(0,5; 1) wynosi:

a) 0,1;
b) 0,5.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć F(0,5; 1).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.57. Dane są dystrybuanty rozkładów brzegowych dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**) postaci $F_1(x) = P(\mathbf{X} \le x)$, $F_2(y) = P(\mathbf{Y} \le y)$, gdzie:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 3 \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad y < 0 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 0 \le y < 2 \\ 0{,}8 & \text{dla} \quad 2 \le y < 4 \\ 1 & \text{dla} \quad y \ge 4 \end{cases}$$

Zatem F(0,5; 1) wynosi:

a) 0,1;
b) 0,5.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć F(0,5; 1).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.58. Dane są dystrybuanty rozkładów brzegowych dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**), postaci $F_1(x) = P(\mathbf{X} \le x)$, $F_2(y) = P(\mathbf{Y} \le y)$, gdzie:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 3 \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad y < 0 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 0 \le y < 2 \\ 0{,}8 & \text{dla} \quad 2 \le y < 4 \\ 1 & \text{dla} \quad y \ge 4 \end{cases}$$

Wiadomo, że zmienne losowe **X**, **Y** są niezależne. Zatem $P(\mathbf{X} = 3, \mathbf{Y} = 4)$ wynosi:

a) 0,1;
b) 0,5.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć $P(\mathbf{X} = 3, \mathbf{Y} = 4)$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.59. Dane są dystrybuanty rozkładów brzegowych dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**, **Y**), postaci $F_1(x) = P(\mathbf{X} \le x)$, $F_2(y) = P(\mathbf{Y} \le y)$, gdzie:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0{,}2 & \text{dla} \quad 0 \le x < 1 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & \text{dla} \quad x \ge 3 \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad y < 0 \\ 0{,}5 & \text{dla} \quad 0 \le y < 2 \\ 0{,}8 & \text{dla} \quad 2 \le y < 4 \\ 1 & \text{dla} \quad y \ge 4 \end{cases}$$

Zatem $P(\mathbf{X} = 3, \mathbf{Y} = 4)$ wynosi:

a) 0,1;
b) 0,5.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć $P(\mathbf{X} = 3, \mathbf{Y} = 4)$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.60. Dana jest zmienna losowa **X** o zbiorze wartości {1,2} oraz zmienna losowa **Y** o zbiorze wartości {3,4}. Rozkłady warunkowe zmiennej losowej (**X**, **Y**) mają postać:

X	**P(X|Y = 3)**	**P(X|Y= 4)**
1	0,6	0,6
2	0,4	0,4

Y	**P(Y|X = 1)**	**P(Y|X = 2)**
3	0,5	0,5
4	0,5	0,5

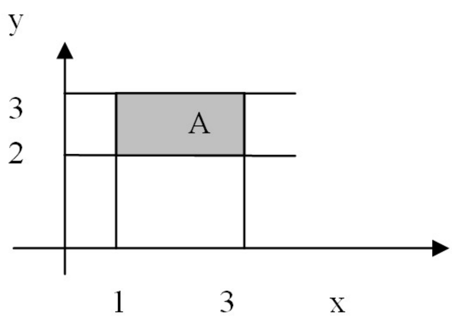
Zatem prawdopodobieństwo P(**X** = 1, **Y** = 4) wynosi:

a) 0,6;
b) 0,3.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć P(**X** = 1, **Y** = 4).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

4.61. **X** i **Y** są niezależnymi zmiennymi ciągłymi oraz P(1 < **X** < 2) = 0,2 oraz P(2 ≤ **Y** < 4) = 0,3. Wówczas prawdopodobieństwo P((**X**, **Y**)∈A) jest równe:

a) 0,05;
b) 0,5;
c) 0,06;
d) żadnej z powyższych,

gdzie



ROZDZIAŁ 5

WYBRANE ROZKŁADY SKOKOWE I CIĄGŁE

5.1. Które ze stwierdzeń jest fałszywe? Dla rozkładu jednopunktowego zachodzi:

a) E(**X**) = a, D^2(**X**) = 0;
b) P(**X** = 1) = a, gdzie a = 0 lub a = 1;
c) P(**X** = a) = 1.
d) Dystrybuanta rozkładu ma postać: $F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<a \\ 1 & \text{dla} \quad x\geq a\end{cases}$

5.2. Wartość oczekiwana E(**X**) rozkładu zero-jedynkowego, w którym

P(**X** = 0) = 0,3, P(**X** = 1) = 0,7 wynosi:

a) 0;
b) 0,3;
c) 0,7.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

5.3. Odchylenie standardowe D(**X**) rozkładu zero-jedynkowego, w którym

P(**X** = 0) = 0,1, P(**X** = 1) = 0,9 wynosi:

a) 0,8;
b) 0,3;
c) 0,09.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

5.4. Skuteczność działania leku „B plus" jest oceniana na 80%. Obserwację działania tego specyfiku na dowolnym chorym można zapisać w następujący sposób: **X** = 0, w przypadku niezadziałania leku; **X** = 1, w przypadku zadziałania leku. Funkcja prawdopodobieństwa ma postać:

a) P(**X** = 0) = 0,8 oraz P(**X** = 1) = 0,2;
b) P(**X** = 0) = 0,2 oraz P(**X** = 1) = 0,8;
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć rozkład zmiennej losowej.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

5.5. Skuteczność działania leku „B plus" jest oceniana na 80%. Obserwację działania tego specyfiku na dowolnym chorym można zapisać w następujący sposób: **X** = 0, w przypadku niezadziałania leku; **X** = 1, w przypadku zadziałania leku. Wartość oczekiwana E(**X**) i wariancja rozkładu D^2(**X**) wynoszą odpowiednio:

a) E(**X**) = 0,8 oraz D^2(**X**) = 0,16;
b) E(**X**) = 0,16 oraz D^2(**X**) = 0,8.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć E(**X**) oraz D^2(**X**).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

5.6. Lek „B plus", którego skuteczność oceniono na 80%, zastosowano w grupie czterech losowo wybranych chorych. Obserwację działania specyfiku w tej grupie można zapisać w następujący sposób: niech **X** = k, gdzie k jest liczbą wyleczonych osób. Prawdopodobieństwo P(**X** = 2) wynosi:

a) 0,16;
b) 0,1536;
c) 0,654.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

5.7. Lek „B plus", którego skuteczność oceniono na 80%, zastosowano w grupie czterech losowo wybranych chorych. Obserwację działania specyfiku w tej grupie można zapisać w następujący sposób: niech **X** = k, gdzie k jest liczbą wyleczonych osób. Wartość oczekiwana E(**X**) i wariancja D^2(**X**) rozkładu wynoszą odpowiednio:

a) E(**X**) = 0,8 oraz D^2(**X**) = 0,16;
b) E(**X**) = 0,64 oraz D^2(**X**) = 3,2;
c) E(**X**) = 3,2 oraz D^2(**X**) = 0,64.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

5.8. Zmienna **X** ma zero-jedynkowy rozkład prawdopodobieństwa z prawdopodobieństwem P(**X** = 1) = 0,25. Które ze stwierdzeń nie jest prawdziwe?

a) P(**X** = 0) = 0,65;
b) D^2(**X**) = 0,1875;
c) E(**X**) = 0,25.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

5.9. Na określonej trasie jeżdżą 4 autobusy. Awarie autobusów są zdarzeniami niezależnymi i prawdopodobieństwo awarii każdego z nich w określonym czasie wynosi 0,1. Niech zmienna losowa **X** oznacza liczbę autobusów, które w danym przedziale czasu uległy awarii. Przedstawiona sytuacja może być opisana za pomocą rozkładu:

a) dwupunktowego;
b) Bernoulliego;

c) Poissona;
d) żadnego z powyższych.

5.10. Na określonej trasie jeżdżą 4 autobusy. Awarie autobusów są zdarzeniami niezależnymi i prawdopodobieństwo awarii każdego z nich w określonym czasie wynosi 0,1. Niech zmienna losowa **X** oznacza liczbę autobusów, które w danym przedziale czasu uległy awarii. Prawdopodobieństwo, że na trasie będą miały miejsce nie więcej niż trzy awarie autobusów w określonym przedziale czasu wynosi:

a) 0,99;
b) 0,0001;
c) 0,9999.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.11. W dużej partii wyrobów znajduje się 20% wyrobów wybrakowanych. Losujemy ze zwracaniem 40 sztuk wyrobów. Niech zmienna losowa **W** oznacza częstość względną wylosowanych wyrobów wybrakowanych. Wartość oczekiwana E(**W**) oraz wariancja D^2(**W**) rozkładu zmiennej losowej **W** wynoszą odpowiednio:

a) E(**W**) = 0,02 oraz D^2(**W**) = 0,004;
b) E(**W**) = 0,2 oraz D^2(**W**) = 0,02;
c) E(**W**) = 8 oraz D^2(**W**) = 0,08.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.12. Suma n zmiennych losowych, gdy każda ze zmiennych ma jednakowy rozkład zero-jedynkowy z parametrem p, jest zmienną losową o rozkładzie:

a) dwupunktowym;
b) Bernoulliego;
c) Poissona.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.13. Rozkład Bernoulliego jest:

a) sumą n niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie zero-jedynkowym;
b) sumą n zmiennych losowych o rozkładzie zero-jedynkowym;
c) sumą dowolnych n zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.14. Rozkład Bernoulliego jest rozkładem:

a) skokowym o skończonej liczbie punktów skokowych;
b) skokowym o nieskończonej liczbie punktów skokowych;
c) ciągłym.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.15. Z rozkładu Poissona korzysta się dla zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym, w którym:

a) n jest duże, a prawdopodobieństwo „sukcesu" p jest małe;
b) n jest duże, prawdopodobieństwo „sukcesu" p jest duże;
c) n jest małe, a prawdopodobieństwo „sukcesu" p jest duże;
d) n jest małe, prawdopodobieństwo „sukcesu" p jest małe.

5.16. Rozkład Poissona jest rozkładem:

a) skokowym o skończonej liczbie punktów skokowych;
b) skokowym o nieskończonej liczbie punktów skokowych;
c) ciągłym.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.17. Rozkład Poissona opisany jest przez funkcję prawdopodobieństwa $P(\mathbf{X} = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, gdzie:

a) $E(\mathbf{X}) = D^2(\mathbf{X}) \neq \lambda$;
b) $E(\mathbf{X}) \neq D^2(\mathbf{X}) = \lambda$;
c) $E(\mathbf{X}) = D^2(\mathbf{X}) = \lambda$.
d) Żadna z powyższych zależności nie zachodzi.

5.18. Które z powyższych stwierdzeń jest fałszywe?

a) Jeżeli $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ..., $\mathbf{X}_k$ są niezależnymi zmiennymi losowymi każda o rozkładzie dwumianowym z parametrami (n_i, p) (i = 1, 2, ..., k), to zmienna losowa $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \ldots + \mathbf{X}_k$ ma też rozkład dwumianowy z parametrami $(n = \sum_{i=1}^{k} n_i,\ p)$.
b) Jeżeli $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ..., $\mathbf{X}_k$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o rozkładzie normalnym $N(m_i, \sigma_i)$ (i = 1, 2, ..., k), to dla dowolnych sta-

łych c_i, z których co najmniej jedna jest różna od zera (i = 1, 2, ..., k), zmienna losowa $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_k\mathbf{X}_k$ ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$,

gdzie $m = \sum_{i=1}^{k} c_i m_i$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \sigma_i^2$.

c) Jeżeli $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ..., $\mathbf{X}_k$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona odpowiednio ze średnimi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, to zmienna losowa $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_k$ ma też rozkład Poissona ze średnią $E(\mathbf{X}) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$.

d) Każde z powyższych stwierdzeń jest prawdziwe.

5.19. Czas oczekiwania pacjentów na przyjęcie przez lekarza w pewnej przychodni ma rozkład jednostajny w przedziale od 10 minut do 2 godzin. Funkcja gęstości tak określonego rozkładu ma postać:

a) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{110} & \text{dla } 10 \le x \le 120 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{120} & \text{dla } 0 \le x \le 120 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć funkcję gęstości.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.20. Czas oczekiwania pacjentów na przyjęcie przez lekarza w pewnej przychodni ma rozkład jednostajny w przedziale od 10 minut do 2 godzin. Przeciętnie pacjent będzie czekał na przyjęcie przez lekarza:

a) 50 minut;

b) 65 minut.

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć przeciętny czas oczekiwania pacjenta na lekarza.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.21. Pociągi kolejki elektrycznej odjeżdżają ze stacji co 5 minut. Zakładając, że rozkład czasu przybycia pasażera na stację jest jednostajny, prawdopodobieństwo, że pasażer będzie oczekiwał na nie mniej niż 3 minuty wynosi:

a) 0,4;

b) 0,2.

c) Nie można wyznaczyć prawdopodobieństwa.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

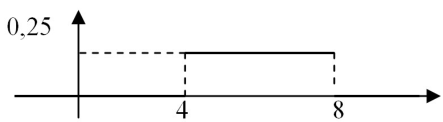
5.22. Pociągi kolejki elektrycznej odjeżdżają ze stacji co 5 minut. Zakładając, że rozkład czasu przybycia pasażera na stację jest jednostajny prawdopodobieństwo, że pasażer będzie oczekiwał na pociąg dokładnie 3 minuty wynosi:

a) 0,2;
b) 0,
c) Nie można wyznaczyć prawdopodobieństwa.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.23. Pociągi kolejki elektrycznej odjeżdżają ze stacji co 5 minut. Zakładając, że rozkład czasu przybycia pasażera na stację jest jednostajny, wartość przeciętna E(**X**) i wariancja $D^2(\mathbf{X})$ czasu oczekiwania na pociąg wynoszą odpowiednio:

a) $E(\mathbf{X}) = 5$ oraz $D^2(\mathbf{X}) = \frac{25}{12}$;
b) $E(\mathbf{X}) = 2{,}5$ oraz $D^2(\mathbf{X}) = \frac{25}{12}$;
c) $E(\mathbf{X}) = \frac{25}{12}$ oraz $D^2(\mathbf{X}) = 2{,}5$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

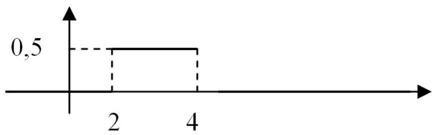
5.24. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości, której wykres przedstawia rysunek:



Prawdopodobieństwo P(**X** > 5) wynosi:

a) 0,5;
b) 0,75.
c) Nie można wyznaczyć prawdopodobieństwa.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.25. Zmienna losowa **X** podlega rozkładowi według gęstości, której wykres przedstawia rysunek:



Dystrybuanta F(3) wynosi:

a) 0,5;
b) 0,25;
c) 0.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.26. Rozkład normalny N(m,σ) jest rozkładem:

a) symetrycznym;
b) o asymetrii prawostronnej;
c) o asymetrii lewostronnej.
d) To zależy od wartości parametrów m oraz σ.

5.27. W rozkładzie normalnym N(m,σ) parametry m oraz σ oznaczają odpowiednio:

a) m – wartość oczekiwaną, σ – wariancję;
b) m – wartość oczekiwaną, σ – odchylenie standardowe;
c) m – kwartyl pierwszy, σ – odchylenie standardowe;
d) m – dominantę, σ – współczynnik zmienności.

5.28. Które ze stwierdzeń jest fałszywe? Krzywa gęstości f(x) rozkładu normalnego N(m,σ):

a) ma „kształt dzwonu" i jest symetryczna względem prostej x = m;
b) osiąga maksimum w punkcie x = m, które jest równe $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
c) maksimum krzywej gęstości jest jednocześnie wartością oczekiwaną, medianą i modalną rozkładu;
d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ oraz $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

5.29. Niech $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_k$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o standardowym rozkładzie normalnym N(0,1). Rozkład zmiennej losowej będącej sumą ich kwadratów $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{U}_i^2$ nazywamy rozkładem:

a) F-Snedecora o k stopniach swobody;
b) chi-kwadrat o k stopniach swobody;
c) t-Studenta o k stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.30. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Rozkład χ^2 jest asymetryczny, dodatnia asymetria malejąca za wzrostem liczby stopni swobody k.
b) Parametr k rozkładu χ^2, zwany liczbą stopni swobody, oznacza liczbę niezależnych składników $\mathbf{U}_i^2$, które sumujemy.
c) Wartość oczekiwana rozkładu χ^2 wynosi k.
d) Wariancja rozkładu χ^2 wynosi k.

5.31. Niech **U** będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym N(0,1), **V** zmienną losową o rozkładzie χ^2 o k stopniach swobody, przy czym zmienne losowe **U**, **V** są niezależne. Rozkład zmiennej losowej postaci $\frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\frac{\mathbf{V}}{k}}}$ nazywamy rozkładem:

a) F-Snedecora o k stopniach swobody;
b) normalnym o k stopniach swobody;
c) t-Studenta o k stopniach swobody;
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.32. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Rozkład t-Studenta jest symetryczny względem osi OY.
b) Wykres rozkładu t-Studenta jest bardzo zbliżony do wykresu rozkładu normalnego, przy czym jest on nieco bardziej wysmukły.
c) Wartość oczekiwana rozkładu t-Studenta wynosi 0 dla k > 1.
d) Wariancja rozkładu t-Studenta wynosi $\frac{k}{k-2}$ dla k > 2.

5.33. Niech **U**, **V** będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach χ^2 odpowiednio z k_1 oraz k_2 stopniami swobody. Rozkład zmiennej losowej $\frac{\mathbf{U}/k_1}{\mathbf{V}/k_2} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{V}} \cdot \frac{k_2}{k_1}$ nazywamy rozkładem:

a) F-Snedecora z $k_1 + k_2$ stopniami swobody;
b) t-Studenta o $k_1 + k_2$ stopniach swobody;
c) F-Snedecora z k_1, k_2 stopniami swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jst poprawna.

5.34. Dla dystrybuanty Φ rozkładu normalnego N(0,1) mamy $\Phi(a) = \alpha$. Zatem P(**X** > a) w rozkładzie N(0,1) wynosi:

a) α;
b) $1 - \alpha$.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo P(**X** > a).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.35. Dla dystrybuanty Φ rozkładu normalnego N(0,1) mamy $\Phi(a) = \alpha$.
Zatem P(–a < **X** < a) dla rozkładu normalnego N(0,1) wynosi:

a) $1 - 2\alpha$;
b) $2\alpha - 1$.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć prawdopodobieństwo P(–a < **X** < a).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.36. Prawdopodobieństwo P(**X** > 6), gdzie zmienna losowa **X** podlega rozkładowi N(2,4) można wyrazić za pomocą dystrybuanty Φ rozkładu normalnego N(0,1) następująco:

a) $\Phi(1)$;
b) $1 - \Phi(1)$;
c) $\Phi(4) - \Phi(2)$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.37. Prawdopodobieństwo P(2 < **X** < 3), gdzie zmienna losowa **X** podlega rozkładowi N(1,2) można wyrazić za pomocą dystrybuanty Φ rozkładu normalnego N(0,1) następująco:

a) $1-\Phi(3)$;

b) $\Phi(3)-\Phi(2)$;

c) $\Phi(1)-\Phi(0{,}5)$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.38. Prawdopodobieństwo P(**X** > 4), gdzie zmienna losowa **X** podlega rozkładowi N(3,5) można wyrazić za pomocą dystrybuanty Φ rozkładu normalnego N(0,1) następująco:

a) $\Phi(0{,}2)$;

b) $1-\Phi(0{,}2)$;

c) $\Phi(5)-\Phi(3)$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.39. Prawdopodobieństwo P(–kσ < |**X** – m| < kσ), gdzie zmienna losowa X podlega rozkładowi N(m,σ) oraz k > 0 można wyrazić za pomocą dystrybuanty Φ rozkładu normalnego N(0,1) następująco:

a) $\Phi(k)-1$;

b) $1-2\Phi(k)$;

c) $2\Phi(k)-1$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.40. Wiadomo, że dla zmiennej losowej t-Studenta o k stopniach swobody $P(|t| > a) = \alpha$. Zatem prawdopodobieństwo $P(t > a)$ wynosi:

a) $0{,}5\alpha$;

b) $1-\alpha$;

c) 2α.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.41. Wiadomo, że dla zmiennej losowej t-Studenta o k stopniach swobody $P(|t| > a) = \alpha$. Zatem prawdopodobieństwo $P(t < -a)$ wynosi:

a) $0{,}5\alpha$;

b) $1-\alpha$;

c) 2α.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.42. Wiadomo, że dla zmiennej losowej t-Studenta o k stopniach swobody $P(|t| > a) = \alpha$. Zatem prawdopodobieństwo $P(-a < t < a)$ wynosi:

a) $0{,}5\alpha$;
b) $1-\alpha$;
c) 2α.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.43. Wiadomo, że dla zmiennej losowej t-Studenta o k stopniach swobody $P(t > a) = \alpha$. Zatem prawdopodobieństwo $P(|t| > a)$ wynosi:

a) $0{,}5\alpha$;
b) $1-\alpha$;
c) 2α.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.44. Wiadomo, że dla zmiennej losowej t-Studenta o k stopniach swobody $P(t > a) = \alpha$. Zatem prawdopodobieństwo $P(t < -a)$ wynosi:

a) $0{,}5\alpha$;
b) $1-\alpha$;
c) 2α.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.45. Wiadomo, że dla zmiennej losowej t-Studenta o k stopniach swobody $P(t > a) = \alpha$. Zatem prawdopodobieństwo $P(-a < t < a)$ wynosi:

a) $0{,}5\alpha$;
b) $1-2\alpha$;
c) $1-\alpha$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.46. Rozkład t-Studenta jest asymptotycznie zbieżny, przy rosnącej liczbie stopni swobody k, do rozkładu:

a) chi-kwadrat;
b) F-Snedecora;
c) normalnego.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.47. Rozkład chi-kwadrat jest rozkładem typu:

a) skokowego o skończonej liczbie punktów skokowych;
b) skokowego o nieskończonej liczbie punktów skokowych;
c) ciągłego;
d) innego typu (ani skokowego, ani ciągłego).

5.48. Rozkład chi-kwadrat jest asymptotycznie zbieżny, przy rosnącej liczbie stopni swobody k, do rozkładu:

a) normalnego;
b) chi-kwadrat;
c) F-Snedecora.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.49. Wiadomo, że dla zmiennej losowej chi-kwadrat o k stopniach swobody $P(\chi^2 < a) = \alpha$. Zatem prawdopodobieństwo $P(\chi^2 > a)$ wynosi:

a) $0{,}5\alpha$;
b) $1-\alpha$;
c) 2α.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.50. Wiadomo, że dla zmiennej losowej chi-kwadrat o k stopniach swobody $P(\chi^2 < a) = \alpha$ oraz $P(\chi^2 < b) = \beta$, gdzie a < b. Zatem prawdopodobieństwo $P(a < \chi^2 < b)$ wynosi:

a) $\beta-\alpha$;
b) $\alpha-\beta$;
c) $\beta+\alpha$.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

5.51. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Dla zmiennej **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, 2, ...)

$$P(\mathbf{X}=i)=\frac{20^i}{i!}e^{-20}$$

zachodzi E(**X**) = 20 oraz D^2(**X**) = 20.

b) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5 & \text{dla} \quad x\in\langle 10;12\rangle \\ 0 & \text{dla} \quad x\notin\langle 10;12\rangle \end{cases}$$

ma E(**X**) = 11 oraz $\mu_3 > 0$.

c) Zmienna **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, ...20)

$$P(\mathbf{X}=i)=\binom{20}{i}0{,}2^i 0{,}8^{20-i}$$

ma E(**X**) = 0,2 oraz D^2(**X**) = 3,2.

d) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-3)^2}{8}}$$

ma E(**X**) = 3 oraz D^2(**X**) = 2.

5.52. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Dla zmiennej **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, 2, ...)

$$P(\mathbf{X}=i)=\frac{20^i}{i!}e^{-20}$$

zachodzi E(**X**) = 20 oraz D(**X**) = 20.

b) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}5 & \text{dla} \quad x\in\langle 10;12\rangle \\ 0 & \text{dla} \quad x\notin\langle 10;12\rangle \end{cases}$$

ma E(**X**) = 11 oraz $\mu_3 = 0$.

c) Zmienna **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, ...20)

$$P(\mathbf{X}=i)=\binom{20}{i}0{,}2^i 0{,}8^{20-i}$$

ma E(**X**) = 4 oraz D(**X**) = 3,2.

d) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-3)^2}{8}}$$

ma E(**X**) = 3 oraz D^2(**X**) = 8.

5.53. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Dla zmiennej **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, 2, ...)

$$P(\mathbf{X}=i)=\frac{20^i}{i!}e^{-20}$$

zachodzi E(**X**) = 20 oraz D(**X**) = 20.

b) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x)=\begin{cases}0{,}5 & \text{dla} \quad x\in\langle 10;12\rangle\\ 0 & \text{dla} \quad x\notin\langle 10;12\rangle\end{cases}$$

ma E(**X**) = 11 oraz $\mu_3 < 0$.

c) Zmienna **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, ...20)

$$P(\mathbf{X}=i)=\binom{20}{i}0{,}2^i 0{,}8^{20-i}$$

ma E(**X**) = 4 oraz D^2(**X**) = 3,2.

d) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-3)^2}{8}}$$

ma E(**X**) = 3 oraz D^2(**X**) = 8.

5.54. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Dla zmiennej **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, 2, ...)

$$P(\mathbf{X} = i) = \frac{20^i}{i!} e^{-20}$$

zachodzi E(**X**) = 20 oraz D(**X**) = 20.

b) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5 & \text{dla} \quad x \in \langle 10;12 \rangle \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \langle 10;12 \rangle \end{cases}$$

ma E(**X**) = 11 oraz $\mu_3 > 0$.

c) Zmienna **X** z funkcją prawdopodobieństwa (i = 0, 1, ...10)

$$P(\mathbf{X} = i) = \binom{20}{i} 0{,}2^i 0{,}8^{20-i}$$

ma E(**X**) = 4 oraz D^2(**X**) = 0,08.

d) Zmienna **X** z funkcją gęstości

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-3)^2}{8}}$$

ma E(**X**) = 3 oraz D^2(**X**) = 4.

ROZDZIAŁ 6

TWIERDZENIA GRANICZNE. ZBIEŻNOŚĆ STOCHASTYCZNA. NIERÓWNOŚCI CZEBYSZEWA

6.1. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Twierdzenia graniczne formułują warunki, przy zachowaniu których dla ciągu zmiennych losowych istnieje asymptotyczny rozkład normalny.
b) Twierdzeniami lokalnymi nazywamy te twierdzenia, które omawiają zbieżność ciągu funkcji prawdopodobieństwa w przypadku ciągu $\{\mathbf{X}_n\}$ zmiennych losowych typu skokowego lub zbieżność ciągu gęstości prawdopodobieństwa w przypadku ciągu $\{\mathbf{X}_n)$ zmiennych losowych typu ciągłego.
c) Twierdzeniami integralnymi nazywamy te twierdzenia, które dotyczą zbieżności ciągu dystrybuant zmiennych losowych $\{\mathbf{X}_n\}$ do pewnej dystrybuanty granicznej.
d) Twierdzenia integralne, rozważające ciągi sum niezależnych zmiennych losowych o dystrybuancie granicznej, będącej dystrybuantą rozkładu normalnego, nazywamy centralnymi.

6.2. Rozkład Bernoulliego jest zbieżny asymptotycznie do rozkładu:

a) chi-kwadrat;
b) t-Studenta;
c) Poissona;
d) żadnego z powyższych.

6.3. Rozkład Bernoulliego jest zbieżny asymptotycznie do rozkładu:

a) chi-kwadrat;
b) t-Studenta;
c) normalnego;
d) żadnego z powyższych.

6.4. Rozkład t-Studenta jest zbieżny asymptotycznie do rozkładu:

a) chi-kwadrat;
b) normalnego;
c) F-Snedecora;
d) żadnego z powyższych.

6.5. Rozkład chi-kwadrat jest zbieżny asymptotycznie do rozkładu:

a) normalnego;
b) t-Studenta;
c) Poissona;
d) żadnego z powyższych.

6.6. Fabryka produkuje gwoździe. Znana jest jedynie średnia ich długość równa 20 mm. Nie jest znany rozkład długości gwoździ. Prawdopodobieństwo, że długość pobranego losowo gwoździa nie przekroczy 30 mm można oszacować następująco:

a) $P(X < 30) > \frac{1}{3}$.
b) $P(X < 30) > \frac{1}{2}$.
c) Nie można oszacować prawdopodobieństwa na podstawie podanych danych.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

6.7. Skąd wynika, że jeżeli będziemy powtarzali niezależnie pewne doświadczenie, to przy wystarczająco dużej liczbie powtórzeń częstość pojawienia się pewnego zdarzenia jest prawie równa prawdopodobieństwu, że to zdarzenie zajdzie?

a) Z praw wielkich liczb.
b) Z prawdopodobieństwa całkowitego Bayesa.
c) Z twierdzeń granicznych.
d) Może stwierdzenie to nie jest prawdziwe?

6.8. Ośrodek Badania Opinii Publicznej ocenia, że 80% badanych popiera kandydata X w wyborach samorządowych. Wybrano losowo 100 osób. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego N(0,1). Prawdopodobieństwo, że ilość osób popierających kandydata X w wyborach samorządowych (wśród wybranych) przekracza 77, jest równe:

a) $\Phi(0{,}5)$;
b) $1 - \Phi(0{,}5)$;
c) $\Phi(0{,}75)$;
d) żadne z powyższych.

6.9. Ośrodek Badania Opinii Publicznej ocenia, że 80% badanych popiera kandydata X w wyborach samorządowych. Wybrano losowo 100 osób. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego N(0,1). Prawdopodobieństwo, że ilość osób popierających kandydata X w wyborach samorządowych (spośród wybranych) jest mniejsza niż 78, jest równe:

a) $\Phi(0,5)$;
b) $1-\Phi(0,5)$;
c) $\Phi(0,75)$;
d) żadne z powyższych.

6.10. Ośrodek Badania Opinii Publicznej ocenia, że 80% badanych popiera kandydata X w wyborach samorządowych. Wybrano losowo 100 osób. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego N(0,1). Prawdopodobieństwo, że ilość osób popierających kandydata X w wyborach samorządowych (spośród wybranych) jest zawarta między 76 a 82, jest równe:

a) $\Phi(0,25)+1$;
b) $\Phi(1)-1$;
c) $\Phi(0,25)+\Phi(1)-1$;
d) żadne z powyższych.

6.11. Wadliwość pewnego produktu wynosi 2%. Z bieżącej produkcji pobrano w sposób losowy 400 sztuk. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego N(0,1). Prawdopodobieństwo, że udział sztuk wadliwych w wybranej partii towaru jest zawarty między 1% i 3%, wynosi:

a) $2\Phi(\frac{10}{7})-1$;
b) $\Phi(\frac{10}{7})-1$;
c) $1-2\Phi(\frac{10}{7})$;
d) żadne z powyższych.

6.12. Dokonano 100 niezależnych obserwacji kosztów utrzymania rodzin pracowniczych. Rozkład kosztów jest nieznany, wiadomo jednak, że w badanej populacji rodzin pracowniczych średni koszt utrzymania osoby jest równy $E(\mathbf{X})$ = 400 PLN, a wariancja $D^2(\mathbf{X})$= 40000 (PLN)^2. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego (0,1). Prawdopodobieństwo tego, że średni koszt utrzymania rodzin będzie wyższy niż 410 PLN wynosi:

a) $\Phi(0{,}5)+1$;
b) $1-\Phi(0{,}5)$;
c) $\Phi(0{,}5)-1$;
d) żadne z powyższych.

ROZDZIAŁ 7

WNIOSKOWANIE STATYSTYCZNE – PODSTAWOWE POJĘCIA. ROZKŁADY STATYSTYK Z PRÓBY

7.1. Statystyką z próby nazywamy:

a) zmienną losową Z_n będącą funkcją zmiennych X_1, X_2, ..., X_n stanowiących próbę losową;
b) dane dotyczące próby;
c) wynik liczbowy otrzymany na podstawie próby, który jest miarą siły związku między cechami.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.2. Statystyka z próby jest:

a) stałą;
b) wartością zmiennej losowej;
c) zmienną losową będącą funkcją zmiennych losowych.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.3. Jeżeli liczebność próby dąży do nieskończoności, to rozkład statystyki z próby nazywamy:

a) dokładnym;
b) przybliżonym;
c) granicznym.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.4. Jeżeli populacja generalna ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$ o nieznanym parametrze σ, to statystyka $\frac{\overline{X}_n - m}{s}\sqrt{n-1}$, gdzie $\overline{X}_n$ jest średnią arytmetyczną z próby n-elementowej, ma rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o n-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o n-1 stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.5. Jeżeli populacja generalna ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ o nieznanym parametrze σ, to statystyka $\frac{\overline{X}_n - m}{s}\sqrt{n-1}$, gdzie $\overline{X}_n$ jest średnią arytmetyczną z próby n-elementowej, ma rozkład graniczny:

a) normalny;
b) t-Studenta o n-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o n-1 stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.6. Jeżeli populacja generalna ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ o znanym parametrze σ, to statystyka $\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$, gdzie $\overline{X}_n$ jest średnią arytmetyczną z próby n-elementowej ma rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o n-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o n-1 stopniach swobody;
d) F-Snedecora o n-1, n-1 stopniach swobody.

7.7. Jeżeli populacja generalna ma dowolny rozkład o skończonej wariancji, to statystyka $\frac{\overline{X}_n - m}{s}\sqrt{n}$, gdzie $\overline{X}_n$ jest średnią arytmetyczną z próby n-elementowej ma rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o n-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o n-1 stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.8. Jeżeli dwie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ o nieznanych, ale jednakowych parametrach $\sigma_1 = \sigma_2$, to statystyka $\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(n_1 + n_2 - 2)}$, gdzie $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ jest różnicą średnich arytmetycznych odpowiednio z próby n_1-elementowej oraz n_2-elementowej, ma rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.9. Jeżeli dwie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ o znanych parametrach σ_1 oraz σ_2, to statystyka, która jest różnicą średnich arytmetycznych $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ odpowiednio z próby n_1-elementowej oraz n_2-elementowej ma rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.10. Jeżeli populacja generalna ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, to statystyka $\frac{nS^2}{\sigma^2}$, gdzie S^2 jest wariancją z próby n-elementowej ma rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o n-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o n-1 stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.11. Jeżeli populacja generalna ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, to statystyka $U = \sqrt{2\frac{nS^2}{\sigma^2}} - \sqrt{2(n-1)-1}$, gdzie S^2 jest wariancją z próby n-elementowej ma rozkład graniczny:

a) normalny;
b) t-Studenta o n-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o n-1 stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.12. Jeżeli dwie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ o nieznanych parametrach σ_1 oraz σ_2, to statystyka $\dfrac{\dfrac{n_1 S_1^2}{(n_1-1)\sigma_1^2}}{\dfrac{n_2 S_2^2}{(n_2-1)\sigma_2^2}}$, gdzie S_1^2, S_2^2 to wariancje odpowiednio z próby n_1-elementowej oraz n_2-elementowej, ma rozkład:

a) normalny;
b) F-Snedecora o n_1-1, n_2-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody;
d) t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.

7.13. Jeżeli populacja generalna ma rozkład zero-jedynkowy, to statystyka $\hat{p}$, która jest wskaźnikiem struktury z próby n-elementowej, ma graniczny rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o n-1 stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o n-1 stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.14. Jeżeli dwie populacje mają rozkłady zero-jedynkowe, to statystyka $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, która jest różnicą wskaźników struktury z próby odpowiednio n_1-elementowej oraz n_2-elementowej, ma graniczny rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody;
c) chi-kwadrat o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.15. Jeżeli rozkładem dokładnym statystyki z próby jest rozkład t-Studenta, to jego rozkładem asymptotycznym może być rozkład:

a) normalny;
b) chi-kwadrat;
c) F-Snedecora.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.16. Jeżeli rozkładem dokładnym statystyki z próby jest rozkład chi-kwadrat, to jego rozkładem asymptotycznym może być rozkład:

a) normalny;
b) t-Studenta;
c) F-Snedecora.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.17. Wzrost pewnej grupy ludzi dorosłych podlega rozkładowi normalnemu o średniej 170 cm i odchyleniu standardowym 6 cm. Z tej grupy wybrano losowo próbę złożoną z 25 osób. Prawdopodobieństwo, że średni wzrost w tej próbie będzie większy niż 172 cm, jest równe:

a) $\Phi\left(\frac{5}{3}\right)$;

b) $1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right)$;

c) $1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.18. Wzrost pewnej grupy ludzi dorosłych podlega rozkładowi normalnemu o średniej 170 cm. Z tej grupy losowo wybrano próbę złożoną z 25 osób, dla której odchylenie standardowe wynosi 6 cm. Prawdopodobieństwo, że średni wzrost w tej próbie będzie mniejszy niż 168 cm, jest równe:

a) $\Phi\left(\frac{5}{3}\right)$;

b) $1-\Phi\left(\frac{5}{3}\right)$;

c) $1-\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.19. Z populacji o rozkładzie normalnym N(12,σ) pobrano próbę liczącą 10 elementów. Odchylenie standardowe s w tej próbie jest równe 1,5. Prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z próby jest większa od 11,5, ma postać:

a) $P(t_9 > -1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;

b) $P(t_9 < 1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;

c) $\Phi(-1)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.20. Z populacji o rozkładzie normalnym N(12,σ) pobrano próbę liczącą 10 elementów. Odchylenie standardowe s w tej próbie jest równe 1,5. Prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z próby jest mniejsza od 12,5, ma postać:

a) $P(t_9 > 1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;

b) $P(t_9 < 1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;

c) $\Phi(1)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.21. Z populacji o rozkładzie normalnym N(12,σ) pobrano próbę liczącą 10 elementów. Odchylenie standardowe s w tej próbie jest równe 1,5. Prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z próby jest zawarta pomiędzy 11,5 a 12,5, ma postać:

a) $P(-1 < t_9 < 1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;
b) $P(t_9 < 1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;
c) $\Phi(1)-\Phi(-1)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.22. Z populacji o rozkładzie normalnym N(12,σ) pobrano próbę liczącą 100 elementów. Odchylenie standardowe s w tej próbie jest równe 1,5. Prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z próby jest większa od 11,5, ma postać:

a) $P(t_9 > -1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;
b) $\Phi\left(-\frac{10}{3}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);
c) $\Phi\left(\frac{10}{3}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.23. Z populacji o rozkładzie normalnym N(12,σ) pobrano próbę liczącą 100 elementów. Odchylenie standardowe s w tej próbie jest równe 1,5. Prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z próby jest mniejsza od 12,5, ma postać:

a) $P(t_9 < 1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;
b) $\Phi\left(-\frac{10}{3}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);
c) $\Phi\left(\frac{10}{3}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.24. Z populacji o rozkładzie normalnym N(12,σ) pobrano próbę liczącą 100 elementów. Odchylenie standardowe s w tej próbie jest równe 1,5. Prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna z próby jest zawarta pomiędzy 11,5 a 12,5, ma postać:

a) $2\Phi\left(\frac{10}{3}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);

b) $P(-1 < t_9 < 1)$, gdzie t_9 to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 9 stopniami swobody;

c) $2\Phi\left(\frac{10}{3}\right)-1$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.25. Rozkład błędów pomiarów dokonywanych pewnym przyrządem pomiarowym jest rozkładem normalnym z wariancją 0,1 cm^2. Wykonano 10 niezależnych pomiarów. Prawdopodobieństwo, że wariancja błędów policzona na podstawie próby jest większa od 0,1, ma postać:

a) $P(\chi^2_{10} > 10)$, gdzie χ^2_{10} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 10 stopniami swobody;

b) $P(\chi^2_9 > 10)$, gdzie χ^2_9 to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 9 stopniami swobody;

c) $\Phi(10)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.26. Rozkład błędów pomiarów dokonywanych pewnym przyrządem pomiarowym jest rozkładem normalnym z wariancją 0,1 cm^2. Wykonano 10 niezależnych pomiarów. Prawdopodobieństwo, że wariancja błędów policzona na podstawie próby jest mniejsza od 0,15, ma postać:

a) $P(\chi^2_{10} < 15)$, gdzie χ^2_{10} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 10 stopniami swobody;

b) $\Phi(1{,}5)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);

c) $P(\chi^2_9 < 15)$, gdzie χ^2_9 to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 9 stopniami swobody.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.27. Rozkład błędów pomiarów dokonywanych pewnym przyrządem pomiarowym jest rozkładem normalnym z wariancją 0,1 cm^2. Wykonano 10 niezależnych pomiarów. Prawdopodobieństwo, że wariancja błędów policzona na podstawie próby jest zawarta pomiędzy 0,10 a 0,12, ma postać:

a) $P(10 < \chi^2_{10} < 12)$, gdzie χ^2_{10} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 10 stopniami swobody;
b) $\Phi(1{,}2) - \Phi(1)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);
c) $P(10 < \chi^2_{9} < 12)$, gdzie χ^2_{9} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 9 stopniami swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.28. Rozkład błędów pomiarów dokonywanych pewnym przyrządem pomiarowym jest rozkładem normalnym z wariancją 0,1 cm^2. Wykonano 50 niezależnych pomiarów. Prawdopodobieństwo, że wariancja błędów policzona na podstawie próby jest większa od 0,1, ma postać:

a) $P(\chi^2_{50} > 10)$, gdzie χ^2_{50} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 50 stopniami swobody;
b) $1 - \Phi\left(10 - \sqrt{97}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);
c) $\Phi\left(10 - \sqrt{97}\right)$, gdzie χ^2_{9} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 9 stopniami swobody.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.29. Rozkład błędów pomiarów dokonywanych pewnym przyrządem pomiarowym jest rozkładem normalnym z wariancją 0,1 cm^2. Wykonano 50 niezależnych pomiarów. Prawdopodobieństwo, że wariancja błędów policzona na podstawie próby jest mniejsza od 0,15, ma postać:

a) $P(\chi^2_{50} < 15)$, gdzie χ^2_{50} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 50 stopniami swobody;
b) $1 - \Phi\left(\sqrt{150} - \sqrt{97}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);
c) $\Phi\left(\sqrt{150} - \sqrt{97}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.30. Rozkład błędów pomiarów dokonywanych pewnym przyrządem pomiarowym jest rozkładem normalnym z wariancją 0,1 cm^2. Wykonano 50 niezależnych pomiarów. Prawdopodobieństwo, że wariancja błędów policzona na podstawie próby jest zawarta pomiędzy 0,12 oraz 0,15, ma postać:

a) $P(12 < \chi^2_{50} < 15)$, gdzie χ^2_{50} to zmienna losowa o rozkładzie chi-kwadrat z 50 stopniami swobody;

b) $\Phi(\sqrt{150}) - \phi(\sqrt{120})$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

c) $\Phi(\sqrt{150} - \sqrt{97}) - \Phi(\sqrt{120} - \sqrt{97})$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1).

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.31. Wzrost (w cm) 16-letnich chłopców ma rozkład N(170,5), natomiast 16-letnich dziewcząt ma rozkład N(166,6). Pobiera się niezależnie próbę liczącą 9 chłopców i 9 dziewcząt. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego N(0,1). Obliczone na podstawie obu prób prawdopodobieństwo, że średnia arytmetyczna wzrostu dziewcząt będzie większa od średniej arytmetycznej wzrostu chłopców, ma postać:

a) $\Phi\left(\frac{12}{\sqrt{61}}\right)$;

b) $1 - \Phi\left(\frac{12}{\sqrt{61}}\right)$.

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.32. Wzrost (w cm) 16-letnich chłopców ma rozkład $N(170, \sigma_1)$, natomiast 16-letnich dziewcząt ma rozkład $N(166, \sigma_2)$, gdzie σ_1, σ_2 są nieznane, ale jednakowe. Pobiera się niezależnie próbę liczącą 9 chłopców i 9 dziewcząt, dla której odchylenia standardowe z próby są równe 5 dla chłopców oraz 6 dla dziewcząt. Prawdopodobieństwo, że obliczona na podstawie obu prób średnia arytmetyczna wzrostu dziewcząt będzie większa od średniej arytmetycznej wzrostu chłopców ma postać:

a) $1 - \Phi\left(\frac{12}{\sqrt{61}}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego N(0,1);

b) $P\left(t_{16} > \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{61}}\right)$, gdzie t_{16} to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 16 stopniami swobody.

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.33. Wzrost (w cm) 16-letnich chłopców ma rozkład $N(170, \sigma_1)$, natomiast 16-letnich dziewcząt ma rozkład $N(166, \sigma_2)$, gdzie σ_1, σ_2 są nieznane. Pobiera się niezależnie próbę liczącą 9 chłopców i 9 dziewcząt, dla której odchylenia standardowe z próby są równe 5 dla chłopców oraz 6 dla dziewcząt. Prawdopodobieństwo, że obliczona na podstawie obu prób średnia arytmetyczna wzrostu dziewcząt będzie większa od średniej arytmetycznej wzrostu chłopców, ma postać:

a) $1-\Phi\left(\frac{12}{\sqrt{61}}\right)$, gdzie $\Phi(x)$ to dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$;
b) $P\left(t_{16} < -\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{61}}\right)$, gdzie t_{16} to zmienna losowa o rozkładzie t-Studenta z 16 stopniami swobody.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.34. Wzrost (w cm) 16-letnich chłopców ma rozkład $N(170, \sigma_1)$, natomiast 16-letnich dziewcząt ma rozkład $N(166, \sigma_2)$, gdzie σ_1, σ_2 są nieznane. Pobiera się niezależnie próbę liczącą 100 chłopców i 100 dziewcząt, dla której odchylenia standardowe z próby są równe 5 dla chłopców oraz 6 dla dziewcząt. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0,1)$. Prawdopodobieństwo, że obliczona na podstawie obu prób średnia arytmetyczna wzrostu dziewcząt będzie większa od średniej arytmetycznej wzrostu chłopców, ma postać:

a) $\Phi\left(\frac{40}{\sqrt{61}}\right)$;
b) $1-\Phi\left(\frac{40}{\sqrt{61}}\right)$.
c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.35. W roku szkolnym 2008/2009 w szkołach podstawowych 18% ogółu uczniów uczyło się języka francuskiego. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0,1)$. Prawdopodobieństwo, że wśród 900 losowo wybranych uczniów szkół podstawowych w badanym roku języka francuskiego uczyło się mniej niż 20% dzieci, ma postać:

a) $\Phi\left(\dfrac{0{,}6}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}82}}\right)$;

b) $1-\Phi\left(\dfrac{0{,}6}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}82}}\right)$.

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.36. W roku szkolnym 2008/2009 w szkołach podstawowych 18% ogółu uczniów uczyło się języka francuskiego. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0,1)$. Prawdopodobieństwo tego, że wśród 50 losowo wybranych uczniów szkół podstawowych w badanym roku języka francuskiego uczyło się mniej niż 20% dzieci, ma postać:

a) $\Phi\left(\dfrac{0{,}6}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}72}}\right)$;

b) $1-\Phi\left(\dfrac{0{,}6}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}72}}\right)$.

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.37. W roku szkolnym 2008/2009 w szkołach podstawowych 18% ogółu uczniów uczyło się języka francuskiego. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego $N(0,1)$. Prawdopodobieństwo tego, że wśród 900 losowo wybranych uczniów szkół podstawowych w badanym roku języka francuskiego uczyło się od 90 do 180 dzieci, ma postać:

a) $\Phi\left(\dfrac{0{,}6}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}82}}\right)-\Phi\left(\dfrac{0{,}24}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}82}}\right)$;

b) $\Phi\left(\dfrac{0{,}6}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}82}}\right)+\Phi\left(\dfrac{0{,}24}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}82}}\right)-1$.

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

7.38. W roku szkolnym 2008/2009 w szkołach podstawowych 18% ogółu uczniów uczyło się języka francuskiego. Niech $\Phi(x)$ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego N(0,1). Prawdopodobieństwo, że wśród 50 losowo wybranych uczniów szkół podstawowych w badanym roku języka francuskiego uczyło się od 9 do 18 dzieci, ma postać:

a) $\Phi\left(\dfrac{0{,}2}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}72}}\right)-\Phi\left(\dfrac{1{,}4}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}72}}\right);$

b) $\Phi\left(\dfrac{0{,}2}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}72}}\right)+\Phi\left(\dfrac{1{,}4}{\sqrt{0{,}18\cdot 0{,}72}}\right)-1.$

c) Mamy za mało informacji, żeby wyznaczyć to prawdopodobieństwo.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

ROZDZIAŁ 8

ESTYMACJA PUNKTOWA I PRZEDZIAŁOWA. MINIMALNA LICZEBNOŚĆ PRÓBY

8.1. Estymacja punktowa parametru populacji generalnej to:

a) obliczenie wartości parametru na podstawie danych dotyczących populacji generalnej;
b) obliczenie wartości parametru na podstawie danych dotyczących próby wylosowanej z populacji generalnej;
c) przypisanie parametrowi wartości obliczonej z danych losowej próby pobranej z populacji generalnej.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.2. Estymator T_n to:

a) liczba;
b) zmienna losowa;
c) ocena szacowanego parametru.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.3. Realizacja t_n estymatora T_n w n-elementowej losowej próbie, to:

a) liczba;
b) zmienna losowa;
c) ocena szacowanego parametru.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.4. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Posługując się estymatorem nieobciążonym w celu ustalenia wartości parametru, uzyskujemy wyniki, średnio rzecz biorąc, prawdziwe, tzn. równe parametrowi.
b) Estymatory najefektywniejsze dają oceny parametrów, średnio rzecz biorąc, najmniej różniące się od stanu faktycznego.
c) Estymatory zgodne dają oceny parametru tym bliższe prawdy, im liczniejsza jest próba.
d) Estymatory nieobciążone dają oceny parametrów, średnio rzecz biorąc, najmniej różniące się od stanu faktycznego tylko dla małej próby.

8.5. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Jeśli estymator jest zgodny, to jest nieobciążony.
b) Jeśli estymator jest nieobciążony lub asymptotycznie nieobciążony i jego wariancja maleje do zera wraz ze wzrostem liczebności próby, to jest on estymatorem zgodnym.
c) Jeśli estymator jest nieobciążony, to jest zgodny.
d) Jeśli estymator jest asymptotycznie nieobciążony, to jest nieobciążony.

8.6. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Średnia arytmetyczna z próby $\overline{X}_n$ jest nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej populacji m.
b) Średnia arytmetyczna z próby $\overline{X}_n$ jest zgodnym estymatorem wartości oczekiwanej populacji m.
c) Wariancja z próby S_n^2 jest obciążonym, ale asymptotycznie nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2 z populacji.
d) Wariancja z próby $\hat{S}_n^2$ jest obciążonym estymatorem wariancji σ^2 z populacji.

8.7. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Estymacja parametryczna to szacowanie wartości parametrów rozkładu populacji generalnej.
b) W przypadku estymacji punktowej za ocenę wartości parametru populacji przyjmuje się jedną konkretną wartość otrzymaną na podstawie wyników próby.
c) Estymacja parametryczna to szacowanie wartości parametrów lub postaci funkcyjnej rozkładu populacji generalnej.
d) W przypadku estymacji przedziałowej wyznacza się odpowiednio pewien liczbowy przedział, dotyczący szacowanego parametru populacji.

8.8. Przedział ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\overline{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $P\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha$,

gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $P\left(\frac{n\sigma^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < m < \frac{n\sigma^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz $P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.9. Przedział ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ i małej próbie wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\overline{X}_n - u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $P\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $P\left(\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < m < \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz $P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.10. Przedział ufności dla wartości średniej m w populacji o nieznanym rozkładzie i dużej próbie oraz ze znanym odchyleniem standardowym σ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\overline{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $P\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $P\left(\frac{n\sigma^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < m < \frac{n\sigma^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz

$P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.11. Przedział ufności dla wartości średniej m w populacji o nieznanym rozkładzie i dużej próbie oraz z nieznanym odchyleniem standardowym σ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie

$P(|t| \geq t_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

b) $P\left(\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < m < \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz

$P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$;

c) $P\left(\overline{X}_n - u_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + u_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.12. Przedział ufności dla wariancji σ^2 w populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\overline{X}_n - u_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}} < \sigma^2 < \overline{X}_n + u_\alpha\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $P\left(\frac{s}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma^2 < \frac{s}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) $P\left(\frac{n\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{n\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz

$P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.13. Przedział ufności dla odchylenia standardowego σ w populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ oraz dużej próbie wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\sqrt{\overline{X}_n - u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}} < \sigma < \sqrt{\overline{X}_n + u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $P\left(\frac{s}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) $P\left(\frac{n\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma < \frac{n\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz

$P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.14. Przedział ufności dla odchylenia standardowego σ w populacji o dowolnym rozkładzie i dużej próbie wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\frac{s}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $P\left(\frac{n\,s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma < \frac{n\,s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz

$P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

c) $P\left(\sqrt{\overline{X}_n - u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}} < \sigma < \sqrt{\overline{X}_n + u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.15. Przedział ufności dla parametru p (prawdopodobieństwa sukcesu) w rozkładzie zero-jedynkowym i dużej próbie wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $P\left(\frac{s}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < p < \frac{s}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $P\left(\sqrt{\overline{X}_n - u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}} < p < \sqrt{\overline{X}_n + u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) $P\left(\hat{p} - u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \approx 1-\alpha$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.16. Punktem wyjścia do wyznaczenia przedziału ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ jest formuła:

a) $P(-t_{\alpha,n-1} < t < t_{\alpha,n-1}) = 1-\alpha$;

b) $P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha$;

c) $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.17. Punktem wyjścia do wyznaczenia przedziału ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ jest formuła:

a) $P\left(-u_\alpha < U < u_\alpha\right) = 1 - \alpha;$
b) $P\left(-t_{\alpha,n-1} < t < t_{\alpha,n-1}\right) = 1 - \alpha;$
c) $P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}\right) = 1 - \alpha.$
d) Żadna z powyśzych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.18. Punktem wyjścia do wyznaczenia przedziału ufności dla wartości średniej m w populacji o nieznanym rozkładzie i dużej próbie oraz ze znanym odchyleniem standardowym σ jest formuła:

a) $P\left(-u_\alpha < U < u_\alpha\right) = 1 - \alpha;$
b) $P\left(-t_{\alpha,n-1} < t < t_{\alpha,n-1}\right) = 1 - \alpha;$
c) $P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}\right) = 1 - \alpha.$
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.19. Punktem wyjścia do wyznaczenia przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ w populacji o rozkładzie $N(m, \sigma)$ jest formuła:

a) $P\left(-u_\alpha < U < u_\alpha\right) = 1 - \alpha;$
b) $P\left(-t_{\alpha,n-1} < t < t_{\alpha,n-1}\right) = 1 - \alpha;$
c) $P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2},\,n-1}\right) = 1 - \alpha.$
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.20. Punktem wyjścia do wyznaczenia przedziału ufności dla wskaźnika struktury z próby w populacji o rozkładzie zero-jedynkowym i dużej próbie jest formuła:

a) $P\left(-u_\alpha < U < u_\alpha\right) = 1 - \alpha;$
b) $P\left(-t_{\alpha,n-1} < t < t_{\alpha,n-1}\right) = 1 - \alpha;$

c) $P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}\right) = 1-\alpha.$

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.21. Do wyznaczenia przedziału ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ lub dowolnym rozkładzie ze znanym odchyleniem standardowym σ i dużej próbie wykorzystujemy formułę $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$, gdzie w miejsce U wstawiamy:

a) $U = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$;

b) $U = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$;

c) $U = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.22. Do wyznaczenia przedziału ufności dla wartości średniej m w populacji o dowolnym rozkładzie oraz z nieznanym odchyleniem standardowym σ i dużej próbie wykorzystujemy formułę $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$, gdzie w miejsce U wstawiamy:

a) $U = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$;

b) $U = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$;

c) $U = \dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.23. Do wyznaczenia przedziału ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym wykorzystujemy formułę $P\left(-t_{\alpha,n-1} < t < t_{\alpha,n-1}\right) = 1 - \alpha$, gdzie w miejsce t wstawiamy:

a) $t = \dfrac{\overline{X} - m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$;

b) $t = \dfrac{\overline{X} - m}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}$;

c) $t = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\left(1 - \hat{p}\right)}{n}}}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.24. Do wyznaczenia przedziału ufności dla wskaźnika struktury w populacji o rozkładzie zero-jedynkowym wykorzystujemy formułę $P\left(-u_{\alpha} < U < u_{\alpha}\right) = 1 - \alpha$, gdzie w miejsce U wstawiamy:

a) $U = \dfrac{\overline{X} - m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$;

b) $U = \dfrac{\overline{X} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}}}$.

c) $U = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}\left(1 - \hat{p}\right)}{n}}}$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.25. Przy malejącej liczebności próby oraz przy ustalonym poziomie współczynnika ufności i pozostałych niezmienionych parametrach próby losowej długość przedziału ufności będzie zawsze:

a) rosła;
b) malała;
c) pozostanie bez zmian.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie musi być prawdziwe.

8.26. Zwiększając poziom ufności przy pozostałych niezmienionych parametrach próby losowej, długość przedziału ufności będzie zawsze:

a) rosła;
b) malała;
c) pozostanie bez zmian.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie musi być prawdziwe.

8.27. Przy rosnącej liczebności próby losowej oraz przy ustalonym poziomie współczynnika ufności długość przedziału ufności będzie zawsze:

a) malała;
b) rosła;
c) pozostanie bez zmian.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie musi być prawdziwe.

8.28. Zmniejszając poziom ufności przy pozostałych niezmienionych parametrach próby losowej, długość przedziału ufności będzie zawsze:

a) rosła;
b) malała;
c) pozostanie bez zmian.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie musi być prawdziwe.

8.29. Do wyznaczenia minimalnej liczebności próby potrzebnej do oszacowania przedziału ufności dla wartości średniej m, gdy populacja generalna ma rozkład normalny $N(m, \sigma), \sigma$ jest znane, wykorzystamy wzór:

a) $n \geq \frac{t^2_{\alpha, n_0 - 1} (\hat{s})^2}{d^2}$, gdzie n_0 to liczebność próby pilotażowej,
$P(|t| \geq t_{\alpha; n_0 - 1}) = \alpha$;

b) $n \geq \frac{t^2_{\alpha,n_0-1}\sigma^2}{d^2}$, gdzie n_0 to liczebność próby pilotażowej,

$P(|t| \geq t_{\alpha;n_0-1}) = \alpha$;

c) $n \geq \frac{u^2_\alpha \sigma^2}{d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.30. Do wyznaczenia minimalnej liczebności próby potrzebnej do oszacowania przedziału ufności dla wartości średniej m, gdy populacja generalna ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, σ jest nieznane wykorzystamy wzór:

a) $n \geq \frac{u^2_\alpha s^2}{d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $n \geq \frac{t^2_{\alpha,n_0-1}(\hat{s})^2}{d^2}$, gdzie n_0 to liczebność próby pilotażowej,

$P(|t| \geq t_{\alpha;n_0-1}) = \alpha$;

c) $n \geq \frac{u^2_\alpha pq}{d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.31. Do wyznaczenia minimalnej liczebności próby potrzebnej do oszacowania przedziału ufności dla wskaźnika struktury, gdy znamy spodziewany rząd wielkości szacowanej frakcji p, wykorzystamy wzór:

a) $n \geq \frac{u^2_\alpha s^2}{d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $n \geq \frac{u^2_\alpha}{4d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) $n \geq \frac{u^2_\alpha pq}{d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.32. Do wyznaczenia minimalnej liczebności próby potrzebnej do oszacowania przedziału ufności dla wskaźnika struktury, gdy nie znamy spodziewanego rzędu wielkości szacowanej frakcji p, wykorzystamy wzór:

a) $n \geq \frac{u_\alpha^2 s^2}{d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $n \geq \frac{u_\alpha^2}{4d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) $n \geq \frac{u_\alpha^2 pq}{d^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.33. Do wyznaczenia minimalnej liczebności próby potrzebnej do oszacowania przedziału ufności dla wskaźnika struktury, gdy nie znamy spodziewanego rzędu wielkości szacowanej frakcji p, wykorzystamy wzór $n \geq \frac{u_\alpha^2 p(1-p)}{d^2}$, wstawiając w miejsce p:

a) 0,25;
b) 0,5;
c) 0,75.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna

8.34. Wartość d we wzorze na minimalną liczebność próby oznacza:

a) połowę długości przedziału ufności;
b) długość przedziału ufności;
c) współczynnik ufności.
d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.35. Zakłada się, że rozkład wzrostu w populacji jest normalny $N(m, \sigma)$. Z populacji mężczyzn przyjętych do wojska wylosowano niezależną próbę 20, których średni wzrost był równy 175 cm, a odchylenie standardowe wynosiło 4 cm ($\hat{s}$). Realizację przedziału ufności średniego wzrostu dla całej populacji, przy założeniu poziomu ufności 0,90, wyznaczymy następująco:

a) $\left(175 - u_{0,1}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 + u_{0,1}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|U| \geq u_{0,1}) = 0{,}1$;

b) $\left(175 - t_{0;1;19}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 - t_{0;1;19}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|t| \geq t_{0,1;19}) = 0{,}1$;

c) $\left(175 - u_{0,9}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 + u_{0,9}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|U| \geq u_{0,9}) = 0{,}9$;

d) $\left(175 - t_{0;9;19}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 - t_{0;9;19}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|t| \geq t_{0,9;19}) = 0{,}9$.

8.36. Zakłada się, że rozkład wzrostu w populacji jest normalny $N(m, \sigma)$. Z populacji mężczyzn przyjętych do wojska wylosowano niezależną próbę 20, których średni wzrost był równy 175 cm, a odchylenie standardowe wynosiło 4 cm ($\hat{s}$). Realizację przedziału ufności średniego wzrostu dla całej populacji, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(175 - u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 + u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|U| \geq u_{\alpha}) = \alpha$;

b) $\left(175 - t_{\alpha;19}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 - t_{\alpha;19}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;19}) = \alpha$;

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.37. Zakłada się, że rozkład wzrostu w populacji jest normalny $N(m,4)$. Z populacji mężczyzn przyjętych do wojska wylosowano niezależną próbę 20, których średni wzrost był równy 175 cm. Realizację przedziału ufności średniego wzrostu dla całej populacji, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(175 - u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 + u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|U| \geq u_{\alpha}) = \alpha$;

b) $\left(175 - t_{\alpha;19}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175 - t_{\alpha;19}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;19}) = \alpha$;

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.38. Z populacji mężczyzn przyjętych do wojska wylosowano niezależną próbę 20, których średni wzrost był równy 175 cm. Realizację przedziału, ufności średniego wzrostu dla całej populacji, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(175-u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175+u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|U|\geq u_{\alpha})=\alpha$;

b) $\left(175-t_{\alpha;19}\frac{4}{\sqrt{20}},\ 175-t_{\alpha;19}\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$, gdzie $P(|t|\geq t_{\alpha;n-1})=\alpha$;

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.39. Z populacji mężczyzn przyjętych do wojska wylosowano niezależną próbę 100, których średni wzrost był równy 175 cm, a odchylenie standardowe wynosiło 4 cm. Realizację przedziału, ufności średniego wzrostu dla całej populacji przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(175-u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{100}},\ 175+u_{\alpha}\frac{4}{\sqrt{100}}\right)$, gdzie $P(|U|\geq u_{\alpha})=\alpha$;

b) $\left(175-t_{1-\alpha;99}\frac{4}{\sqrt{100}},\ 175-t_{1-\alpha;99}\frac{4}{\sqrt{100}}\right)$, gdzie $P(|t|\geq t_{1-\alpha;99})=1-\alpha$;

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.40. Rozkład wagi produkowanych tabliczek czekolady jest normalny $N(m,\sigma)$. Na podstawie losowej próby 12 tabliczek czekolady otrzymano średnią wagę równą 95 gram oraz odchylenie standardowe s 10 gram. Realizację przedziału ufności odchylenia standardowego w rozkładzie wagi wszystkich produkowanych tabliczek czekolady, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(\sqrt{\frac{120}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}},\ \sqrt{\frac{120}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}}\right)$, gdzie $P(\chi^2\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1})=\frac{\alpha}{2}$,

$P(\chi^2\geq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1})=1-\frac{\alpha}{2}$;

b) $\left(\dfrac{10}{\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}}}{\sqrt{24}}}, \dfrac{10}{\mathbf{1}-\dfrac{\mathbf{u}_{\boldsymbol{\alpha}}}{\sqrt{24}}} \right)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.41. Na podstawie losowej próby 12 tabliczek czekolady otrzymano średnią wagę równą 95 gram oraz odchylenie standardowe s 10 gram. Realizację przedziału ufności odchylenia standardowego w rozkładzie wagi wszystkich produkowanych tabliczek czekolady, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(\sqrt{\dfrac{120}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}}}, \sqrt{\dfrac{120}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}}} \right)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \dfrac{\alpha}{2}$,

$P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$;

b) $\left(\dfrac{10}{1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{24}}}, \dfrac{10}{1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{24}}} \right)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.42. Na podstawie losowej próby 120 tabliczek czekolady otrzymano średnią wagę równą 95 gram oraz odchylenie standardowe s 10 gram. Realizację przedziału ufności odchylenia standardowego w rozkładzie wagi wszystkich produkowanych tabliczek czekolady, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(\dfrac{1200}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};12}}, \dfrac{1200}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};12}} \right)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};12}) = \dfrac{\alpha}{2}$, $P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};12}) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$;

b) $\left(\dfrac{10}{1+\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{240}}}, \dfrac{10}{1-\dfrac{u_\alpha}{\sqrt{240}}} \right)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.43. Do zakładów jajczarsko-drobiarskich dostarczono 1000 sztuk jaj. W celu zbadania ich jakości prześwietlono wyrywkowo 400 sztuk stwierdzając, że 5% jaj jest zepsutych. Realizację przedziału ufności procentu jaj złej jakości w całej dostarczonej partii, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(0{,}05 - u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{400}},\ 0{,}05 + u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{400}} \right)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $\left(5 - u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{400} \cdot 100},\ 5 + u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{400} \cdot 100} \right)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.44. Do zakładów jajczarsko-drobiarskich dostarczono 1000 sztuk jaj. W celu zbadania ich jakości prześwietlono wyrywkowo 40 sztuk stwierdzając, że 5% jaj jest zepsutych. Realizację przedziału ufności procentu jaj złej jakości w całej dostarczonej partii, przy założeniu poziomu ufności $1-\alpha$, wyznaczymy następująco:

a) $\left(0{,}05 - u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{40}},\ 0{,}05 + u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{40}} \right)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $\left(5 - u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{40} \cdot 100},\ 5 + u_\alpha \sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{40} \cdot 100} \right)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć przedziału ufności.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.45. Minimalna liczebność próby potrzebna dla oszacowania odsetka osób, które wezmą udział w wyborach samorządowych z dopuszczalnym błędem 5% na poziomie ufności $1-\alpha$, przy założeniu wstępnego oszacowania frekwencji w poprzednich wyborach 40%, jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

a) $n \geq \frac{u_\alpha^2 \, 0{,}4 \cdot 0{,}6}{(0{,}05)^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $n \geq \frac{u_\alpha^2}{4(0{,}05)^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć minimalnej liczebności próby.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.46. Minimalna liczebność próby potrzebna dla oszacowania odsetka osób, które wezmą udział w wyborach samorządowych z dopuszczalnym błędem 5% na poziomie ufności $1-\alpha$, jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

a) $n \geq \frac{u_\alpha^2 \, 0{,}4 \cdot 0{,}6}{(0{,}05)^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $n \geq \frac{u_\alpha^2}{4(0{,}05)^2}$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć minimalnej liczebności próby.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.47. Miesięczne wydatki na odbitki kserograficzne (dane w zł) ogółu studentów UwB mają rozkład N(m,6). Minimalna liczebność próby potrzebna do oszacowania średnich wydatków ogółu studentów, aby przy poziomie ufności $1-\alpha$ otrzymać przedział o długości nieprzekraczającej 2 zł, jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

a) $n \geq 36u_\alpha^2$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $n \geq 9u_\alpha^2$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć minimalnej liczebności próby.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.48. Miesięczne wydatki na odbitki kserograficzne (dane w zł) ogółu studentów UwB mają rozkład $N(m, \sigma)$. Na podstawie próby 10-elementowej otrzymano odchylenie standardowe $\hat{s} = 6$. Minimalna liczebność próby potrzebna do oszacowania średnich wydatków ogółu studentów, aby przy poziomie ufności $1-\alpha$ otrzymać przedział o długości nieprzekraczającej 2 zł, jest najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówność:

a) $n \geq 36t^2_{\alpha,9}$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;9}) = \alpha$;

b) $n \geq 9t^2_{\alpha,9}$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;9}) = \alpha$.

c) Nie można wyznaczyć minimalnej liczebności próby.

d) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest poprawna.

8.49. Niech t_n będzie estymatorem zgodnym parametru θ zbudowanym na podstawie n-elementowej prostej próby losowej. Wówczas zawsze:

a) $Et_n = \theta$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} Et_n = 0$;

c) $\underset{n\in N}{\exists} D^2 t_n = 0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} D^2 t_n > 0$.

($\exists$ – oznacza kwantyfikator „istnieje”).

8.50. Dana jest n-elementowa prosta próba losowa z populacji normalnej. Jako estymator wartości średniej z populacji μ przyjmujemy statystykę z próby:

$$a_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

a) Estymator a_n jest zgodny i nieobciążony.

b) Estymator a_n jest zgodny i obciążony.

c) Estymator a_n nie jest zgodny.

d) Estymator a_n nie ma żadnej z powyższych własności.

8.51. Estymator parametru φ z n-elementowej próby ma wartość oczekiwaną $\varphi+n^{-1}$ i wariancję $n^{-2}\sigma^2$, gdzie σ^2 jest wariancją populacji. Wówczas estymator powyższy:

a) jest zgodny;

b) jest nieobciążony;

c) jest obciążony, ale nie asymptotycznie nieobciążony.

d) Estymator ten nie ma żadnej z powyższych własności.

8.52. Na podstawie próby losowej otrzymano, że przedziałem ufności dla średniej z populacji μ z poziomem ufności 0,99, jest przedział (9,50; 10,50), co oznacza, że:

a) $P(9{,}50 < \mu < 10{,}50) = 0{,}99$;

b) 9,50 jest realizacją zmiennej z, a 10,50 jest realizacją zmiennej u, dla których to zmiennych zachodzi: $P(z < \mu < u) = 0{,}99$;

c) $P(9{,}50 < \mu < 10{,}50) = 1 - 0{,}99$.

d) Żadna z powyższych interpretacji nie jest poprawna.

ROZDZIAŁ 9

WERYFIKACJA HIPOTEZ STATYSTYCZNYCH

9.1. Hipoteza statystyczna to:

a) każde przypuszczenie, co do rozkładu populacji generalnej, jego postaci funkcyjnej lub wartości parametru tego rozkładu;
b) ocena wartości parametru populacji generalnej;
c) ocena rozkładu populacji generalnej.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.2. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Przypuszczenie, co do postaci funkcyjnej rozkładu to hipoteza nieparametryczna.
b) Przypuszczenie, co do wartości parametrów rozkładu to hipoteza parametryczna.
c) Przypuszczenie, co do niezależności zmiennych to hipoteza nieparametryczna.
d) Przypuszczenie, co do postaci funkcyjnej rozkładu lub wartości parametrów to hipoteza nieparametryczna.

9.3. Które ze stwierdzeń jest fałszywe?

a) Test statystyczny to reguła postępowania, która każdej możliwej próbie przyporządkowuje decyzję przyjęcia lub odrzucenia hipotezy.
b) Test statystyczny to reguła rozstrzygająca, jakie wyniki próby pozwalają uznać sprawdzaną hipotezę za prawdziwą, a jakie za fałszywą.
c) Test istotności to reguła postępowania, która każdej możliwej próbie przyporządkowuje decyzję odrzucenia lub stwierdzenia, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy.
d) Test istotności to reguła postępowania, która każdej możliwej próbie przyporządkowuje decyzję przyjęcia lub odrzucenia hipotezy.

9.4. Hipoteza statystyczna podlega weryfikacji na podstawie:

a) wyników próby losowej;
b) opinii ekspertów;
c) znajomości rozkładu populacji generalnej.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.5. Narzędziem weryfikacji hipotezy statystycznej jest:

a) estymator;
b) test statystyczny;
c) przedział ufności.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.6. Jeżeli odrzucamy hipotezę prawdziwą, to popełniony błąd nazywamy:

a) błędem I rodzaju;
b) błędem II rodzaju;
c) błędem III rodzaju.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.7. Jeżeli przyjmujemy hipotezę fałszywą, to popełniony błąd nazywamy:

a) błędem I rodzaju;
b) błędem II rodzaju;
c) błędem III rodzaju.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.8. Prawdopodobieństwo popełninia błędu I rodzaju to:

a) moc testu;
b) poziom istotności;
c) współczynnik ufności.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.9. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju to:

a) moc testu;
b) poziom istotności;
c) współczynnik ufności.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.10. Moc testu to:

a) prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju;
b) poziom istotności;
c) współczynnik ufności.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.11. Prawdopodobieństwo podjęcia prawidłowej decyzji to:

a) moc testu;
b) poziom istotności;
c) współczynnik ufności.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.12. Testy istotności upoważniają do podjęcia dwóch następujących decyzji weryfikacyjnych:

a) przy przyjętym poziomie istotności odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej lub nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) przy przyjętym poziomie istotności odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej lub przyjmujemy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
c) przy przyjętym poziomie istotności odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej lub przy ustalonym poziomie prawdopodobieństwa błędu II rodzaju przyjmujemy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.13. Jeżeli obliczona na podstawie wyników z próby odpowiednia statystyka nie przyjmuje wartości należącej do obszaru krytycznego, to przy przyjętym poziomie istotności α:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.14. Jeżeli obliczona na podstawie wyników z próby odpowiednia statystyka przyjmuje wartość należącą do obszaru krytycznego, to przy przyjętym poziomie istotności α:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.15. Jeżeli obliczona na podstawie wyników z próby odpowiednia statystyka nie przyjmuje wartości należącej do obszaru krytycznego jednostronnego, to ze względu na dwustronny obszar krytyczny przy przyjętym poziomie istotności α:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.16. Jeżeli obliczona na podstawie wyników z próby odpowiednia statystyka przyjmuje wartość należącą do obszaru krytycznego jednostronnego, to ze względu na dwustronny obszar krytyczny przy przyjętym poziomie istotności α:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.17. Jeżeli obliczona na podstawie wyników z próby odpowiednia statystyka nie przyjmuje wartości należącej do obszaru krytycznego dwustronnego, to ze względu na jednostronny obszar krytyczny przy przyjętym poziomie istotności α:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.18. Jeżeli obliczona na podstawie wyników z próby odpowiednia statystyka przyjmuje wartość należącą do obszaru krytycznego dwustronnego, to ze względu na jednostronny obszar krytyczny przy przyjętym poziomie istotności α:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.19. Jeżeli przy testowaniu hipotezy przy przyjętym poziomie istotności α odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej, to zwiększenie poziomu istotności α, przy niezmienionych pozostałych warunkach weryfikowania hipotezy spowoduje, że:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;

c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.20. Jeżeli przy testowaniu hipotezy przy przyjętym poziomie istotności α odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej, to zmniejszenie poziomu istotności α, przy niezmienionych pozostałych warunkach weryfikowania hipotezy spowoduje, że:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.21. Jeżeli przy testowaniu hipotezy przy przyjętym poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej, to zwiększenie poziomu istotności α, przy niezmienionych pozostałych warunkach weryfikowania hipotezy spowoduje, że:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej;
c) przyjmujemy hipotezę zerową.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.22. Jeżeli przy testowaniu hipotezy przy przyjętym poziomie istotności α nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na korzyść hipotezy alternatywnej, to zmniejszenie poziomu istotności α, przy niezmienionych pozostałych warunkach weryfikowania hipotezy spowoduje, że:

a) odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej;
b) przyjmujemy hipotezę zerową;
c) nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.
d) Żadne z powyższych nie musi zachodzić.

9.23. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{s}\sqrt{n}$;

b) $t = \frac{\overline{x} - m_0}{s}\sqrt{n-1}$;

c) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.24. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$;

b) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{s} \sqrt{n}$;

c) $t = \frac{\overline{x} - m_0}{s} \sqrt{n - 1}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.25. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla wartości średniej m w populacji o nieznanym rozkładzie i dużej próbie oraz ze znanym odchyleniem standardowym σ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$;

b) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{s} \sqrt{n}$;

c) $t = \frac{\overline{x} - m_0}{s} \sqrt{n - 1}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.26. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla wartości średniej m w populacji o nieznanym rozkładzie i dużej próbie oraz z nieznanym odchyleniem standardowym σ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$;

b) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{s} \sqrt{n}$;

c) $t = \frac{\overline{x} - m_0}{s} n$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.27. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla wariancji σ^2 w populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$;

b) $\chi^2 = \frac{(n-1)(\hat{s})^2}{\sigma_0^2}$;

c) $u = \sqrt{2\frac{ns^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.28. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla wariancji σ^2 w populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$ oraz dużej próbie wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$;

b) $\chi^2 = \frac{(n-1)(\hat{s})^2}{\sigma_0^2}$;

c) $u = \sqrt{2\frac{ns^2}{\sigma_0^2}} - \sqrt{2n-3}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.29. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla parametru p (prawdopodobieństwa sukcesu) w rozkładzie zero-jedynkowym i dużej próbie wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$;

b) $u = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}}$;

c) $u = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.30. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla dwóch wartości średnich w populacjach o rozkładach normalnych $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ ze znanymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2 wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $$u = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}};$$

b) $$u = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}};$$

c) $$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(n_1 + n_2 - 2)}}}.$$

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.31. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla dwóch wartości średnich w populacjach o rozkładach normalnych $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ z nieznanymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2 oraz dużymi próbami wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $$u = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}};$$

b) $$u = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}};$$

c) $$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(n_1 + n_2 - 2)}}}.$$

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.32. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla dwóch wartości średnich w populacjach o rozkładach normalnych $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ z nieznanymi, ale jednakowymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2 oraz małymi próbami wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$;

b) $u = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$;

c) $t = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{\dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(n_1 + n_2 - 2)}}}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.33. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla dwóch wariancji w populacjach o rozkładach normalnych $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $t = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{\dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(n_1 + n_2 - 2)}}}$;

b) $F = \dfrac{(\hat{s}_1)^2}{(\hat{s}_2)^2}$;

c) $u = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.34. Wartość statystyki, przy weryfikowaniu hipotezy dla dwóch parametrów struktury z próby p_1 oraz p_2 w rozkładach zero-jedynkowych i dużej próbie wyznaczamy, korzystając ze wzoru:

a) $u = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}$;

b) $F = \dfrac{(\hat{s}_1)^2}{(\hat{s}_2)^2}$;

c) $F = \dfrac{(\hat{s}_1)^2}{(\hat{s}_2)^2}$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.35. Jeżeli $H_o{:}m = m_0$, $H_A{:}m \neq m_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(-\infty, -t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.36. Jeżeli $H_o{:}m = m_0$, $H_A{:}m > m_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.37. Jeżeli $H_o{:}m = m_0$, $H_A{:}m < m_0$ oraz populacja ma rozkład normalnym $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_{2\alpha})$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(0, \chi^2_{1-\alpha,n-1})$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $(-\infty,-t_{2\alpha,n-1})$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.38. Jeżeli H_o:m = m_0, H_A:m $\neq$ m_0 oraz populacja ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty,-u_{\alpha}) \cup (u_{\alpha},+\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_{\alpha}) = \alpha$;

b) $(-\infty,-t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1},+\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1},+\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.39. Jeżeli H_o:m = m_0, H_A:m > m_0 oraz populacja ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha},+\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_{\alpha}) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha,n-1},+\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha,n-1},+\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.40. Jeżeli H_o:m = m_0, H_A:m < m_0 oraz populacja ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty,-u_{2\alpha})$, gdzie $P(|U| \geq u_{\alpha}) = \alpha$;

b) $(0,\chi^2_{1-\alpha,n-1})$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $(-\infty,-t_{2\alpha,n-1})$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.41. Jeżeli H_o:m = m_0, H_A:m $\neq$ m_0 oraz populacja ma dowolny rozkład oraz próba jest duża, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty,-u_{\alpha}) \cup (u_{\alpha},+\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_{\alpha}) = \alpha$;

b) $(-\infty,-t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1},+\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1},+\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.42. Jeżeli H_o:$m = m_0$, H_A:$m > m_0$ oraz populacja ma dowolny rozkład, a próba jest duża, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.43. Jeżeli H_o:$m = m_0$, H_A:$m < m_0$ oraz populacja ma dowolny rozkład oraz próba jest duża, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_{2\alpha})$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(0, \chi^2_{1-\alpha,n-1})$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $(-\infty, -t_{2\alpha,n-1})$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.44. Jeżeli H_o: $\sigma = \sigma_0$, H_A: $\sigma \neq \sigma_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, a próba jest mała ($n < 30$), to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(-\infty, -t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.45. Jeżeli H_o: $\sigma = \sigma_0$, H_A: $\sigma > \sigma_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, a próba jest mała ($n < 30$), to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.46. Jeżeli H_o: $\sigma = \sigma_0$, H_A: $\sigma < \sigma_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, a próba jest mała ($n < 30$), to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_{2\alpha})$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(0, \chi^2_{1-\alpha,n-1})$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $(-\infty, -t_{2\alpha,n-1})$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.47. Jeżeli $H_o: \sigma = \sigma_0$, $H_A: \sigma \neq \sigma_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, a próba jest duża (n > 30), to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(-\infty, -t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.48. Jeżeli $H_o: \sigma = \sigma_0$, $H_A: \sigma > \sigma_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, a próba jest duża (n > 30), to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.49. Jeżeli $H_o: \sigma = \sigma_0$, $H_A: \sigma < \sigma_0$ oraz populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, a próba jest duża (n > 30), to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_{2\alpha})$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(0, \chi^2_{1-\alpha,n-1})$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $(-\infty, -t_{2\alpha,n-1})$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.50. Jeżeli $H_o: p = p_0$, $H_A: p \neq p_0$ oraz populacja ma rozkład zero-jedynkowy, a próba jest duża, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

b) $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}, +\infty)$;

c) $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.51. Jeżeli H_o:$p = p_0$, H_A:$p > p_0$ oraz populacja ma rozkład zero-jedynkowy, a próba jest duża, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha},+\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha,n-1},+\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha,n-1},+\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.52. Jeżeli H_o:$p = p_0$, H_A:$p < p_0$ oraz populacja ma rozkład zero-jedynkowy, a próba jest duża, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty,-u_{2\alpha})$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(0,\chi^2_{1-\alpha,n-1})$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$;

c) $(-\infty,-t_{2\alpha,n_1+n_2-2})$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.53. Jeżeli H_o: $m_1 = m_2$, H_A: $m_1 \neq m_2$ oraz obie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1,\sigma_1)$, $N(m_2,\sigma_2)$ ze znanymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty,-t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1},+\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$;

b) $(-\infty,-u_\alpha) \cup (u_\alpha,+\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) $(0,\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1},+\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.54. Jeżeli H_o: $m_1 = m_2$, H_A: $m_1 > m_2$ oraz obie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1,\sigma_1)$, $N(m_2,\sigma_2)$ ze znanymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(t_{2\alpha,n_1+n_2},+\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha,n_1+n_2}) = \alpha$;

b) $(u_{2\alpha},+\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha,n_1+n_2-2},+\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n_1+n_2-2}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.55. Jeżeli H_o: $m_1 = m_2$, H_A: $m_1 \neq m_2$ oraz obie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ ze znanymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2, obie próby są duże, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(-\infty, -t_{\alpha, n_1+n_2-1}) \cup (t_{\alpha, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha, n_1+n_2-1}) = \alpha$;

c) $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha; n_1+n_2-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.56. Jeżeli H_o:$m_1 = m_2$, H_A: $m_1 > m_2$ oraz obie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ z nieznanymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2, a obie próby są duże, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha, n_1+n_2-2}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha, n_1+n_2-2}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha; n_1+n_2-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.57. Jeżeli H_o: $m_1 = m_2$, H_A: $m_1 \neq m_2$ oraz obie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ z nieznanymi, ale jednakowymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2, a obie próby są małe, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(-\infty, -t_{\alpha, n_1+n_2-2}) \cup (t_{\alpha, n_1+n_2-2}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha, n_1+n_2-2}) = \alpha$;

c) $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha; n_1+n_2-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.58. Jeżeli H_o:$m_1 = m_2$, H_A: $m_1 > m_2$ oraz obie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$ z nieznanymi, ale jednakowymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2, a obie próby są małe, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, , gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha, n_1+n_2-2}) = \alpha$;

c) $(F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(F \geq F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.59. Jeżeli H_o: $\sigma_1 = \sigma_2$, H_A: $\sigma_1 > \sigma_2$ oraz obie populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha, n_1+n_2-1}) = \alpha$;

c) $(F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(F \geq F_{\alpha, n_1-1, n_2-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.60. Jeżeli $H_o: p_1 = p_2$, $H_A: p_1 \neq p_2$ oraz obie populacje mają rozkłady zero-jedynkowe, a próby są duże to obszar krytyczny ma postać:

a) $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(-\infty, -t_{\alpha, n_1+n_2-1}) \cup (t_{\alpha, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha; n_1+n_2-1}) = \alpha$;

c) $(0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha; n_1+n_2-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.61. Jeżeli $H_o: p_1 = p_2$, $H_A: p_1 > p_2$ oraz obie populacje mają rozkłady zero-jedynkowe, a próby są duże to obszar krytyczny ma postać:

a) $(u_{2\alpha}, +\infty)$, gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$;

b) $(t_{2\alpha, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha, n_1+n_2-1}) = \alpha$;

c) $(\chi^2_{\alpha, n_1+n_2-1}, +\infty)$, gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha; n_1+n_2-1}) = \alpha$.

d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

Pyt. 9.62-9.67.

Automat w fabryce czekolady wytwarza tabliczki czekolady o nominalnej wadze 250 g. Wiadomo, że rozkład wagi produkowanych tabliczek jest N(m,4). Kontrola techniczna pobrała w pewnym dniu próbę losową n = 16 tabliczek czekolady i otrzymała ich średnią wagę 248 g.

Wiadomo, że $P(|U| \geq 1{,}64) = 0{,}1$, $P(|U| \geq 1{,}28) = 0{,}2$ oraz $P(|t| \geq 1{,}34) = 0{,}2$ $P(|t| \geq 1{,}753) = 0{,}1$ dla rozkładu t-Studenta o 15 stopniach swobody.

9.62. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze.

a) Statystyka $u = -2$.

b) Statystyka $t = -2$.

c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.63. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1,28)\cup(1,28,+\infty)$;
b) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1,753)\cup(1,753,+\infty)$;
c) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1,64)\cup(1,64,+\infty)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.64. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze.

a) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze.
c) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.65. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze.

a) Statystyka $u=-2$.
b) Statystyka $t=-2$.
c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.66. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1,64)$.
b) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1,28)$.
c) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1,753)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.67. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze.
b) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
c) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

Pyt. 9.68-9.73.

Automat w fabryce czekolady wytwarza tabliczki czekolady o nominalnej wadze 250g. Kontrola techniczna pobrała w pewnym dniu próbę losową n = 16 tabliczek czekolady i otrzymała ich średnią wagę 251 g. Wiadomo, że rozkład wagi produkowanych tabliczek jest N(m,4).

Wiadomo, że $P(|U| \geq 1{,}64) = 0{,}1$, $P(|U| \geq 1{,}28) = 0{,}2$ oraz $P(|t| \geq 1{,}34) = 0{,}2$ $P(|t| \geq 1{,}753) = 0{,}1$ dla rozkładu t-Studenta o 15 stopniach swobody.

9.68. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.

a) Statystyka $u = 1$.
b) Statystyka $t = 1$.
c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.69. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty, -1{,}64) \cup (1{,}64, +\infty)$.
b) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty, -1{,}28) \cup (1{,}28, +\infty)$.
c) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty, -1{,}753) \cup (1{,}753, +\infty)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.70. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze. Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?

a) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.
b) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
c) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.71. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze.

a) Statystyka $t = 1$.
b) Statystyka $u = 1$.
c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.72. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(1{,}64, +\infty)$.
b) Obszar krytyczny ma postać $(1{,}28, +\infty)$.
c) Obszar krytyczny ma postać $(1{,}753, +\infty)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.73. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze.
c) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

Pyt. 9.74-9.79.

Automat w fabryce czekolady wytwarza tabliczki czekolady o nominalnej wadze 250 g. Wiadomo, że rozkład wagi produkowanych tabliczek to $N(m, \sigma)$. Kontrola techniczna pobrała w pewnym dniu próbę losową n = 16 tabliczek czekolady i otrzymała ich średnią wagę 248,5 g oraz odchylenie standardowe $\hat{s} = 4$.

Wiadomo, że $P(|U| \geq 1{,}64) = 0{,}1$, $P(|U| \geq 1{,}28) = 0{,}2$ oraz $P(|t| \geq 1{,}34) = 0{,}2$ $P(|t| \geq 1{,}753) = 0{,}1$ dla rozkładu t-Studenta o 15 stopniach swobody.

9.74. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.

a) Statystyka $u = -1{,}5$.
b) Statystyka $t = -1{,}5$.
c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.75. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty, -1{,}64) \cup (1{,}64, +\infty)$.
b) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty, -1{,}28) \cup (1{,}28, +\infty)$.
c) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty, -1{,}753) \cup (1{,}753, +\infty)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.76. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze. Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?

a) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze.
c) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.77. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze.

a) Statystyka $u = -1{,}5$.
b) Statystyka $t = -1{,}5$.

c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.78. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1{,}64)$.
b) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1{,}28)$.
c) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1{,}34)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.79. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze.

a) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zaniżonej wadze.
c) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

Pyt. 9.80-9.85.

Automat w fabryce czekolady wytwarza tabliczki czekolady o nominalnej wadze 250 g. Wiadomo, że rozkład wagi produkowanych tabliczek to $N(m,\sigma)$. Kontrola techniczna pobrała w pewnym dniu próbę losową n = 16 tabliczek czekolady i otrzymała ich średnią wagę 251,3 g oraz odchylenie standardowe $\hat{s} = 4$.

Wiadomo, że $P(|U| \geq 1{,}64) = 0{,}1$, $P(|U| \geq 1{,}28) = 0{,}2$ oraz $P(|t| \geq 1{,}34) = 0{,}2$ $P(|t| \geq 1{,}753) = 0{,}1$ dla rozkładu t-Studenta o 15 stopniach swobody.

9.80. Na poziomie istotności α = 0,1 weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.

a) Statystyka $u = 1{,}3$.
b) Statystyka $t = 1{,}3$.
c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.81. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1{,}64)\cup(1{,}64,+\infty)$.
b) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1{,}28)\cup(1{,}28,+\infty)$.
c) Obszar krytyczny ma postać $(-\infty,-1{,}753)\cup(1{,}753,+\infty)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.82. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze. Które z poniższych stwierdzeń jest fałszywe?

a) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej, niż powinien wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o innej niż powinien wadze.
c) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.83. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze.

a) Statystyka $u = 1{,}3$.
b) Statystyka $t = 1{,}3$.
c) Nie można zweryfikować hipotezy.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.84. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze.

a) Obszar krytyczny ma postać $(1{,}64, +\infty)$.
b) Obszar krytyczny ma postać $(1{,}73, +\infty)$.
c) Obszar krytyczny ma postać $(1{,}34, +\infty)$.
d) Żadna z odpowiedzi: a), b), c) nie jest prawdziwa.

9.85. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ weryfikujemy hipotezę, czy automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Możemy twierdzić, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,1.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że automat rozregulował się i produkuje tabliczki czekolady o zawyżonej wadze.
c) Automat produkuje tabliczki czekolady o nominalnej wadze.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.86. W szpitalu wylosowano niezależnie spośród pacjentów leczonych na pewną chorobę próbę 26 chorych. Otrzymano dla nich średnią ciśnienia tętniczego krwi wynoszącą 145 oraz odchylenie standardowe $\hat{s} = 45$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ należy zweryfikować hipotezę statystyczną, że pacjenci ci pochodzą z populacji o średnim ciśnieniu tętniczym krwi wynoszącym 120. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Możemy twierdzić, że pacjenci pochodzą z populacji o ciśnieniu tętniczym różnym od 120. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji jest równe 0,01.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że pacjenci pochodzą z populacji o ciśnieniu 120.
c) Przyjmujemy hipotezę, że pacjenci pochodzą z populacji o ciśnieniu tętniczym 120.
d) Nie można zweryfikować hipotezy.

9.87. W szpitalu wylosowano niezależnie spośród pacjentów leczonych na pewną chorobę próbę 260 chorych. Otrzymano dla nich średnią ciśnienia tętniczego krwi wynoszącą 135 oraz odchylenie standardowe $\hat{s} = 45$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ należy zweryfikować hipotezę statystyczną, że pacjenci ci pochodzą z populacji o średnim ciśnieniu tętniczym krwi wynoszącym 130. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Możemy twierdzić, że pacjenci pochodzą z populacji o ciśnieniu tętniczym większym od 130. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji jest równe 0,01.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że pacjenci pochodzą z populacji o ciśnieniu 130 na korzyść hipotezy alternatywnej, że pacjenci pochodzą z populacji o ciśnieniu tętniczym większym od 130.
c) Przyjmujemy hipotezę, że pacjenci pochodzą z populacji o ciśnieniu tętniczym 130.
d) Nie można zweryfikować hipotezy.

9.88. Rozkład tygodniowego czasu poświęconego na naukę poza uczelnią studentów I roku studiów dziennych UwB jest rozkładem normalnym N(m,5), a studentów II roku rozkładem normalnym N(m,6). Pobrano niezależnie 10-elementową próbę studentów I roku oraz 10-elementową próbę studentów II roku; średnie w tych próbach wynosiły odpowiednio: 20 godz. oraz 15 godz. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Na poziomie istotności 0,1 można przyjąć, że średni czas nauki poza uczelnią studentów I roku jest wyższy, niż na roku II.
b) Na poziomie istotności 0,1 można przyjąć, że średni czas nauki poza uczelnią studentów I roku jest taki sam, jak studentów II.
c) Na poziomie istotności 0,1 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że średnie czasy poświęcone na naukę poza uczelnią studentów I oraz II roku są takie same na korzyść hipotezy alternatywnej, że średni czas nauki poza uczelnią studentów I roku jest wyższy, niż studentów II roku .
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.89. Spośród uczniów pewnego liceum wylosowano 15 z klas pierwszych oraz 12 z klas drugich i otrzymano dla uczniów klas pierwszych średnią ocen uzyskanych w semestrze równą 3,8 oraz odchylenie standardowe 0,8, a dla klas drugich średnią ocen równą 3,9 i odchylenie standardowe 0,9. Zakładając, że średnie wyniki ocen mają rozkłady normalne, z nieznanymi, ale jednakowymi odchyleniami standardowymi, weryfikujemy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ hipotezę, że wartości przeciętne ocen uzyskiwanych przez uczniów klas pierwszych i drugich tej szkoły są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej, że wartość przeciętna ocen uzyskiwanych przez uczniów klas drugich jest większa. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Wartość przeciętna ocen uzyskiwanych przez uczniów klas drugich jest większa niż uczniów klas pierwszych. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,01.
b) Wartość przeciętna ocen uzyskiwanych przez uczniów klas drugich oraz pierwszych jest jednakowa.
c) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że wartość przeciętna ocen uzyskiwanych przez uczniów klas drugich oraz pierwszych jest jednakowa na korzyść hipotezy alternatywnej, że przeciętna ocen klas pierwszych jest wyższa niż klas drugich.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.90. W zbadanej losowo próbie 200 rodzin zamieszkałych w Krakowie średnie miesięczne wydatki na mieszkanie wynosiły 900 zł z odchyleniem standardowym równym 100 zł. W podobnej 150-elementowej próbie rodzin zamieszkałych w Warszawie średnie wydatki wynosiły 800 zł, a odchylenie standardowe – 80 zł. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Na poziomie istotności 0,05 możemy twierdzić, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są takie same jak w Warszawie.
b) Na poziomie istotności 0,05 możemy twierdzić, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są większe niż Warszawie.
c) Na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są takie same jak w Warszawie, na korzyść hipotezy alternatywnej, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są istotnie różne niż Warszawie.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.91. W zbadanej losowo próbie 10 rodzin zamieszkałych w Krakowie średnie miesięczne wydatki na mieszkanie wynosiły 900 zł z odchyleniem standardowym równym 100 zł. W podobnej 10-elementowej próbie rodzin zamieszkałych w Warszawie średnie wydatki wynosiły 800 zł, a odchylenie standardowe – 80 zł. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Na poziomie istotności 0,05 możemy twierdzić, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są takie same jak w Warszawie.
b) Na poziomie istotności 0,05 możemy twierdzić, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są większe niż Warszawie.
c) Na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są takie same jak w Warszawie, na korzyść hipotezy alternatywnej, że średnie wydatki na mieszkanie w Krakowie są istotnie różne niż Warszawie.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.92. Rozkład papierosów wypalanych dziennie przez studentów pewnej uczelni jest normalny. Losowa próba $n = 200$ studentów pewnej uczelni dała odchylenie standardowe $s = 7$ papierosów wypalanych dziennie przez studentów tej uczelni.

Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ należy zweryfikować hipotezę, że odchylenie standardowe liczby papierosów wypalanych dziennie przez studentów wynosi 5. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Możemy twierdzić, że odchylenie standardowe liczby papierosów wypalanych dziennie przez studentów wynosi 5. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,05.
b) Możemy twierdzić, że odchylenie standardowe liczby papierosów wypalanych dziennie przez studentów jest większe od 5. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,05.

c) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że liczba papierosów wypalanych dziennie przez studentów wynosi 5, na korzyść hipotezy alternatywnej, że liczba papierosów wypalanych dziennie przez studentów jest większa niż 5.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.93. Rozkład papierosów wypalanych dziennie przez studentów pewnej uczelni jest normalny. Losowa próba $n = 10$ studentów pewnej uczelni dała odchylenie standardowe $\hat{s} = 7$ papierosów wypalanych dziennie przez studentów tej uczelni.
Na poziomie istotności 0,05 należy zweryfikować hipotezę, że odchylenie standardowe liczby papierosów wypalanych dziennie przez studentów wynosi 5.

Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Możemy twierdzić, że odchylenie standardowe liczby papierosów wypalanych dziennie przez studentów wynosi 5. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,05.
b) Możemy twierdzić, że odchylenie standardowe liczby papierosów wypalanych dziennie przez studentów jest większe od 5. Prawdopodobieństwo podjęcia błędnej decyzji wynosi 0,05.
c) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że liczba papierosów wypalanych dziennie przez studentów wynosi 5, na korzyść hipotezy alternatywnej, że liczba papierosów wypalanych dziennie przez studentów jest większa niż 5.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.94. Sondaż opinii publicznej na temat frekwencji oczekiwanej na wyborach do samorządu wykazał, że w losowo wybranej grupie 2500 osób 1600 zamierza uczestniczyć w głosowaniu. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Na poziomie istotności 0,05 można przyjąć, że 60% ogółu osób zamierza wziąć udział w wyborach do samorządu.
b) Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że 60% ogółu osób zamierza wziąć udział w wyborach do samorządu na korzyść hipotezy alternatywnej, że więcej niż 60% osób zamierza wziąć udział w wyborach.
c) Na poziomie istotności 0,05 można przyjąć, że więcej niż 60% ogółu osób zamierza wziąć udział w wyborach do samorządu.
d) Żadne z powyższych stwierdzeń nie jest prawdziwe.

9.95. Wysunięto hipotezę, że studenci studiów stacjonarnych lepiej zdają egzaminy niż studenci studiów niestacjonarnych. W celu sprawdzenia tego poglądu wylosowano próbę złożoną z 200 studentów studiów stacjonarnych oraz próbę złożoną z 160 studentów niestacjonarnych. Kryterium oceny obu grup stanowi frakcja studentów, którzy zaliczyli sesję egzaminacyjną w pierwszym podejściu. Spośród studentów stacjonarnych sztuki tej dokonało 150 osób, zaś spośród niestacjonarnych tylko 80. Które ze stwierdzeń jest prawdziwe?

a) Na poziomie istotności 0,05 możemy twierdzić, że taki sam odsetek studentów stacjonarnych i niestacjonarnych zalicza sesję w pierwszym terminie.
b) Na poziomie istotności 0,05 możemy twierdzić, że odsetek studentów studiów stacjonarnych, którzy uporali się z sesją egzaminacyjną w pierwszym terminie jest wyższy, niż odsetek studentów niestacjonarnych.
c) Na poziomie istotności 0,05 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że odsetek studentów studiów stacjonarnych, którzy uporali się z sesją egzaminacyjną w pierwszym terminie jest wyższy, niż odsetek studentów niestacjonarnych.
d) Żadne z powyższych stwierzeń nie jest prawdziwe.

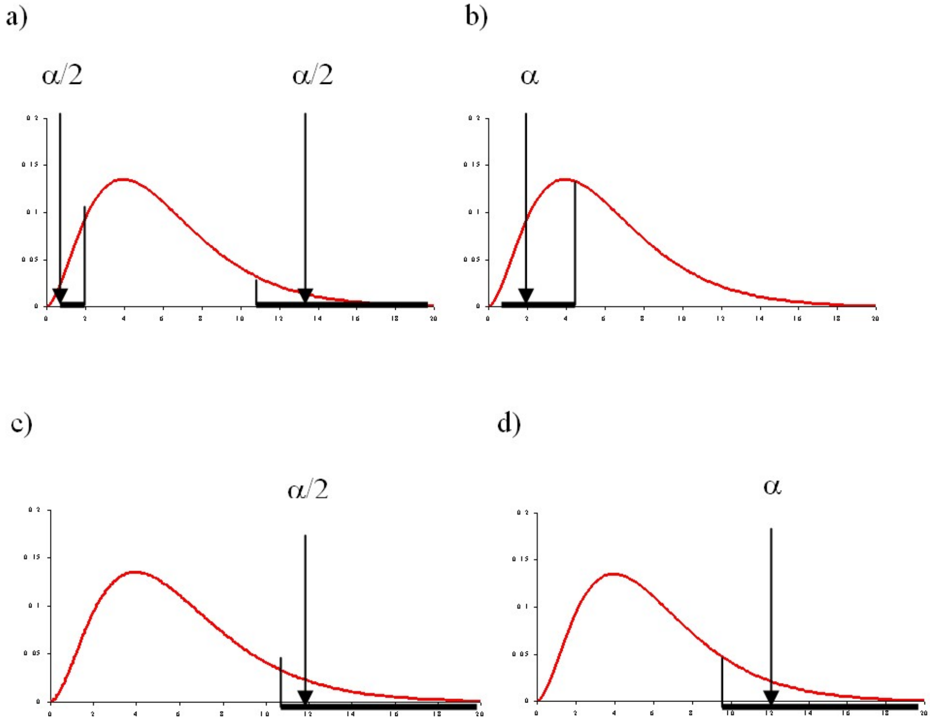
9.96. Moc testu oznacza prawdopodobieństwo:

a) przyjęcia hipotezy prawdziwej;
b) odrzucenia hipotezy prawdziwej;
c) odrzucenia hipotezy fałszywej;
d) przyjęcia hipotezy fałszywej.

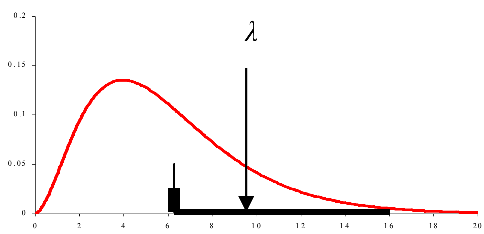
9.97. Istotność testu oznacza prawdopodobieństwo:

a) odrzucenia hipotezy prawdziwej;
b) odrzucenia hipotezy fałszywej;
c) przyjęcia hipotezy prawdziwej;
d) przyjęcia hipotezy fałszywej.

9.98. W teście zgodności χ^2 przy poziomie istotności α obszar krytyczny jest przedstawiony na rysunku:



9.99. W teście niezależności χ^2 otrzymano wartość testu pokazaną na rysunku wraz z prawdopodobieństwem λ. Wówczas odrzucając hipotezę o niezależności dwóch populacji ryzykujemy popełnienie błędu:



a) II rodzaju, którego prawdopodobieństwo jest równe λ;
b) II rodzaju, którego prawdopodobieństwo jest równe 2λ;
c) I rodzaju, którego prawdopodobieństwo jest równe 2λ;
d) I rodzaju, którego prawdopodobieństwo jest równe λ.

9.100. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Przy pomocy testu niezależności χ^2 można badać niezależność cech niemierzalnych.
b) Wskaźnik struktury z próby ma rozkład normalny.
c) Średnia arytmetyczna z próby z dowolnej populacji ma rozkład normalny.
d) Do porównania wskaźników struktury dwóch populacji stosuje się test o dokładnym rozkładzie normalnym.

9.101. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Istotność testu jest to prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy H_A pod warunkiem, że jest ona fałszywa.
b) Istotność testu jest to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy alternatywnej H_A pod warunkiem, że jest ona prawdziwa.
c) Moc testu jest to prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 pod warunkiem, że jest ona fałszywa.
d) Moc testu jest to prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy H_0 pod warunkiem, że jest ona prawdziwa.

9.102. Weryfikując hipotezę o równości wariancji populacji X oraz Y, otrzymano następujący wydruk z komputera:

Test F: z dwiema próbami dla wariancji		
	X	Y
Średnia	3,935185185	3,492592593
Wariancja	0,762114919	0,83949696
Obserwacje	108	135
df	107	134
F	0,907823322	
P(F ≤ f) jednostronny	0,30207719	

Wówczas przy przyjęciu poziomu istotności 0,05:

a) odrzucenie hipotezy, że $D^2X = D^2Y$ na rzecz $D^2X > D^2Y$ związane jest z prawdopodobieństwem błędu I-go rodzaju ≈ 0,30;
b) odrzucenie hipotezy, że $D^2X = D^2Y$ na rzecz $D^2X \neq D^2Y$ związane jest z prawdopodobieństwem błędu I-go rodzaju ≈ 0,30;
c) odrzucenie hipotezy, że $D^2X = D^2Y$ na rzecz $D^2X < D^2Y$ związane jest z prawdopodobieństwem błędu I-go rodzaju ≈ 0,30;
d) przyjęcie hipotezy, że $D^2X = D^2Y$ związane jest z prawdopodobieństwem błędu II-go rodzaju ≈ 0,1.

9.103. Badając za pomocą testu *t*, czy EX = EY otrzymano następujący wydruk z komputera:

	X	Y
Średnia	3,935185	3,492593
Różnica średnich wg hipotezy	0	
df	241	
t Stat	3,820708	
P(T ≤ t) dwustronny	0,000169	
Test t dwustronny	1,969856	

Wówczas:

a) przyjęcie hipotezy, że EX = EY związane jest z prawdopodobieństwem błędu II-go rodzaju ≈ 0,0004;
b) odrzucenie hipotezy, że EX = EY na rzecz EX ≠ EY związane jest z prawdopodobieństwem błędu I-go rodzaju ≈ 0,0004;
c) odrzucenie hipotezy, że EX = EY na rzecz EX < EY związane jest z prawdopodobieństwem błędu I-go rodzaju ≈ 0,0001;
d) odrzucenie hipotezy, że EX = EY na rzecz EX > EY związane jest z prawdopodobieństwem błędu I-go rodzaju ≈ 0,0001.

9.104. Otrzymano przedział ufności z parametrem ufności 0,99 dla parametru

θ: (–0,1; 2,5). Oznacza to, że:

a) z prawdopodobieństwem 0,99 $(-0{,}1 < \theta < 2{,}5)$;
b) odrzucając hipotezę $\theta = 0$ na rzecz hipotezy $\theta \neq 0$ ryzykujemy popełnienie błędu, którego prawdopodobieństwo jest ≥ 0,01;
c) odrzucając hipotezę $\theta = 0$ na rzecz hipotezy $\theta \neq 0$ ryzykujemy popełnienie błędu, którego prawdopodobieństwo jest ≤ 0,02;
d) (–0,1; 2,5) jest realizacją przedziału losowego, który z prawdopodobieństwem 0,99 zawiera w sobie θ.

9.105. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Z twierdzenia granicznego wynika, że średnia arytmetyczna z n-elementowej prostej próby losowej z dowolnej populacji mającej skończoną wartość oczekiwaną i wariancję, ma dla dużych n w przybliżeniu rozkład normalny.

b) Z twierdzenia granicznego wynika, że prawdopodobieństwo jest częstotliwością przy nieskończonym powtarzaniu w sposób niezależny doświadczenia.
c) Dla zmiennych X i Y zachodzi implikacja:
X i Y są niezależne $\Rightarrow D(X + Y) > D(X - Y)$.

d) Dla zmiennych *X* i *Y* zachodzi implikacja:
$D(X + Y) = D(X - Y) \Rightarrow$ X i Y są niezależne.

9.106. Proszę zaznaczyć zdanie prawdziwe.

a) Do zweryfikowania hipotezy dotyczącej wartości oczekiwanej populacji normalnej korzystamy z rozkładu normalnego, gdy nie znamy wariancji populacji i liczebność próby jest nieduża.
b) W celu zweryfikowania hipotezy dotyczącej wskaźnika struktury populacji przy dowolnej liczebności próby korzystamy z rozkładu normalnego.
c) W celu zweryfikowania hipotezy o równości wariancji dwóch populacji normalnych korzystamy z rozkładu χ^2.
d) Wartości krytyczne rozkładu normalnego możemy odczytać z tablic rozkładu t-Studenta przyjmując ∞ df.

9.107. Weryfikując hipotezę o równości wariancji populacji X oraz Y otrzymano następujący wydruk z komputera:

Test F: z dwiema próbami dla wariancji		
Próba z:	1. popul.	2. popul.
Średnia	3,8243243	3,0167702
Wariancja	0,8938575	0,7175295
Obserwacje	111	161
df	110	160
F	1,2457432	
P(Ff) ≤ jednostronny	0,1020035	

Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$:

a) przyjmujemy, że wariancje są różne;
b) nie możemy odrzucić, że wariancje są równe;
c) przyjmujemy, że wariancje są równe.
d) Każda z powyższych decyzji jest niepoprawna.

9.108. Weryfikujemy hipotezę o niezależności dwóch zmiennych przeciwko hipotezie, że te zmienne są zależne, przy pomocy testu niezależności χ^2. Wówczas obszar krytyczny (odrzucenia hipotezy głównej) jest:

a) dwustronny;
b) lewostronny;
c) prawostronny.
d) Zależy od konkretnego zadania.

PODSTAWOWE DEFINICJE, WŁASNOŚCI, WZORY

1. PODSTAWY RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1.1. ELEMENTY KOMBINATORYKI

Permutacją (przemianą) bez powtórzeń z n elementów nazywamy ciąg składający się z n różnych elementów, wybranych spośród n elementów.

Liczba wszystkich permutacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego jest równa:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Permutacją (przemianą) z powtórzeniami z n elementów nazywamy dowolny ciąg składający się z n elementów, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, ..., n_k$ razy.

Liczba n-elementowych permutacji o powtarzających się odpowiednio $n_1, n_2 ..., n_k$ razy elementach wyraża się wzorem:

$$P_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

Wariacją (rozmieszczeniem) bez powtórzeń z n elementów po k elementów ($k \le n$) nazywamy dowolny ciąg składający się z k różnych elementów, wybranych spośród n różnych elementów.

Liczba wszystkich wariacji bez powtórzeń z n elementów po k jest równa:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1).$$

Wariacją (rozmieszczeniem) z powtórzeniami z n elementów po k elementów nazywamy dowolny ciąg składający się z k elementów różnych lub nieróżniących się między sobą wybranych spośród n różnych elementów.

Liczba wszystkich wariacji z powtórzeniami z n elementów po k jest równa:

$$W_n^k = n^k.$$

Kombinacją bez powtórzeń z n elementów po k elementów nazywamy zbiór składający się z k różnych elementów, wybranych spośród n różnych elementów, przy czym obojętne jest, w jakim porządku elementy tego zbioru są rozmieszczone.

Liczba kombinacji bez powtórzeń z n różnych elementów po k jest równa:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Kombinacją z powtórzeniami z n elementów po k elementów nazywamy zbiór składający się z k różnych lub nie różniących się między sobą elementów, wybranych spośród n różnych elementów, przy czym obojętne jest, w jakim porządku elementy tego zbioru są rozmieszczone.

Liczba kombinacji z powtórzeniami z n elementów po k dana jest wzorem:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

1.2. KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Jeżeli przestrzeń $\mathbf{\Omega}$ składa się z n zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych, to **prawdopodobieństwo** zajścia zdarzenia A jest ilorazem liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A przez liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tzn.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\mathbf{\Omega})} =$$

$$= \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A}}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych przestrzeni } \mathbf{\Omega}}$$

1.3. AKSJOMATYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Niech $\mathbf{\Omega}$ oznacza przestrzeń zdarzeń elementarnych, a $\mathbf{Z}$ borelowskie ciało zdarzeń utworzone z podzbiorów tej przestrzeni. Jeżeli każdemu zdarzeniu $A \in \mathbf{Z}$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba P(A) taka, że:

1. $P(A) \geq 0$;

2. dla każdej pary wyłączających się zdarzeń A, $B \in \mathbf{Z}$ **(**tzn. zdarzeń $A, B \in \mathbf{Z}$ takich, że $A \cap B = \varnothing$) zachodzi $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

3. $P(\Omega) = 1$,

to mówimy, że na zdarzeniach w zbiorze $\mathbf{Z}$ określone jest **prawdopodobieństwo**, a liczbę P(A) nazywamy **prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia** A.

Trójkę (Ω, $\mathbf{Z}$, P) nazywamy **przestrzenią probabilistyczną.**

1.4. WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Niech Ω będzie danym zbiorem zdarzeń elementarnych, **Z** – zbiorem jego zdarzeń losowych i niech P będzie prawdopodobieństwem określonym na zdarzeniach A, B $\in$ **Z**.

1. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B (tzn. $A \subseteq B$), to $P(A) \leq P(B)$.
2. Jeżeli A = B, to P(A) = P(B).
3. Suma prawdopodobieństw zdarzeń przeciwnych równa się jedności: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.
4. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia niemożliwego równa się zeru, tzn. $P(\varnothing) = 0$.
5. Prawdopodobieństwo P(A) każdego zdarzenia A spełnia nierówność: $0 \leq P(A) \leq 1$.
6. Prawdopodobieństwo różnicy zdarzeń wynosi: $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.
7. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
8. Prawdopodobieństwo alternatywy dwóch zdarzeń (czyli prawdopodobieństwo zajścia co najmniej jednego z tych zdarzeń) jest równe sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo ich koniunkcji, czyli

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

1.5. DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA WARUNKOWEGO

Niech (Ω, **Z**, P) będzie przestrzenią probabilistyczną pewnego doświadczenia, B zaś dowolnym ustalonym zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie (P(B) > 0). **Prawdopodobieństwem warunkowym pod warunkiem** B **dowolnego zdarzenia** A $\in$ **Z** nazywamy liczbę określoną równością:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \; A, B \in \mathbf{Z}, \; P(B) > 0.$$

Wynika stąd wzór na **prawdopodobieństwo koniunkcji** (łącznego zajścia) **dwóch zdarzeń**:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A), \text{ gdy } P(A) > 0,$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B), \text{ gdy } P(B) > 0.$$

1.6. TWIERDZENIE O PRAWDOPODOBIEŃSTWIE CAŁKOWITYM

Jeżeli A jest dowolnym zdarzeniem, zaś zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ spełniają warunki:

1. wykluczają się parami, czyli $B_i \cap B_j = \varnothing$, gdy $i \neq j$;

2. ich alternatywa jest zdarzeniem pewnym, czyli $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$;

3. mają dodatnie prawdopodobieństwa, $P(B_i) > 0, \quad i = 1, 2, ..., n$,
prawdopodobieństwo zdarzenia A wyraża się równością:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + ... + P(B_n)P(A|B_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

zwaną wzorem na **prawdopodobieństwo całkowite (zupełne)**.

1.7. TWIERDZENIE BAYESA

Jeżeli A jest dowolnym zdarzeniem, zaś zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$ spełniają warunki 1, 2, 3 twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym, to prawdopodobieństwo warunkowe $P(B_k|A)$ zdarzeń B_k przy warunku A, wyrażają się równościami:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}, \ k = 1, 2, ..., n.$$

1.8. NIEZALEŻNOŚĆ DWÓCH ZDARZEŃ

Niech ($\mathbf{\Omega}$, **Z**, P) będzie przestrzenią probabilistyczną pewnego doświadczenia. Mówimy, że zdarzenia A, $B \in \mathbf{Z}$ są **niezależne**, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

1.9. NIEZALEŻNOŚĆ ZESPOŁOWA n ZDARZEŃ

Niech ($\mathbf{\Omega}$, **Z**, P) będzie przestrzenią probabilistyczną pewnego doświadczenia. Zdarzenia $A_1, A_2, A_3, ..., A_n \in \mathbf{Z}$ nazywamy **niezależnymi** (**wzajemnie niezależnymi** lub **niezależnymi zespołowo**) jeżeli dla każdej liczby naturalnej $m \leq n$ i dla każdego ciągu liczb naturalnych $i_1, i_2, ..., i_m$, takiego, że $i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n$, zachodzi równość:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}).$$

1.10. SCHEMAT BERNOULLIEGO

Jeżeli przeprowadzamy n niezależnych i identycznych doświadczeń (tzn. n niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia), w których są tylko dwa możliwe wyniki każdego z nich, to tego rodzaju ciąg powtórzeń tego samego doświadczenia nazywamy **schematem Bernoulliego,** natomiast poszczególne doświadczenia nazywamy **próbami Bernoulliego**. W schemacie Bernoulliego jedno ze zdarzeń elementarnych nazywamy **sukcesem**, a drugie **porażką** lub niepowodzeniem.

W schemacie n prób Bernoulliego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ otrzymania dokładnie k sukcesów wyraża się wzorem:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},$$

gdzie p to prawdopodobieństwo sukcesu, q – prawdopodobieństwo porażki i $p+q=1$.

Ustalony wskaźnik k_o, dla którego $P_n(k_o)$ jest nie mniejsze od pozostałych prawdopodobieństw nazywamy **najbardziej prawdopodobną liczbą udanych doświadczeń** albo **najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów** w serii n doświadczeń.

Najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego.

Jeżeli (n + 1)p nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego jest największa liczba całkowita k_o taka, że $k_o < (n + 1)p$

Jeżeli (n + 1)p jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobne są wartości (n + 1)p – 1 i (n + 1)p i ich prawdopodobieństwa są równe.

2. ZMIENNE LOSOWE JEDNOWYMIAROWE

2.1. POJĘCIE ZMIENNEJ LOSOWEJ

Niech ($\mathbf{\Omega}, \mathbf{Z}$, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. **Zmienną losową X** nazywamy dowolną funkcję **X** określoną na przestrzeni zdarzeń $\mathbf{\Omega}$ o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\Re$ oraz taką, że dla każdego $x \in \Re$ zbiór $A = \{ \omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) < x \}$ jest zdarzeniem, czyli należy do **Z**.

2.2. POJĘCIE DYSTRYBUANTY ZMIENNEJ LOSOWEJ

Dystrybuantą $F(x)$ **zmiennej losowej X** nazywamy funkcję $F: \Re \rightarrow <0,1>$ określoną wzorem: $F(x) = P(\mathbf{X} \le x)$.

Uwaga: Dystrybuantę można również definiować jako funkcję

$$F : \Re \rightarrow <0,1> \text{ określoną wzorem: } F(x) = P(\mathbf{X} < x).$$

Należy jednak pamiętać, że obie definicje są równoważne dla zmiennej losowej ciągłej, nie są natomiast równoważne dla zmiennej losowej skokowej.

2.3. WŁASNOŚCI DYSTRYBUANTY ZMIENNEJ LOSOWEJ

Dana jest zmienna losowa **X** o dystrybuancie $F(x)$ określonej wzorem $F(x) = P(\mathbf{X} \le x)$. Wtedy:

1. $0 \le F(x) \le 1$ dla każdego $x \in \Re$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
3. $F(x)$ jest funkcją niemalejącą (tzn. dla $x_1 < x_2$ zachodzi $F(x_1) \le F(x_2)$);
4. $F(x)$ jest funkcją co najmniej prawostronnie ciągłą tzn. $\lim\limits_{x \to x_o^+} F(x) = F(x_o)$ dla dowolnego $x_o \in \Re$;
5. $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$;
6. $P(X = x_o) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_o^-} F(x)$.

Twierdzenie 1. Jeżeli $G(x)$ jest dowolną funkcją o wartościach rzeczywistych mającą własności 1, 2, 3, 4, to funkcja $G(x)$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej **X**.

2.4. ZMIENNA LOSOWA TYPU SKOKOWEGO

Zmienną losową **X** nazywamy **typu skokowego (dyskretnego),** jeśli istnieje skończony (lub przeliczalny) zbiór jej wartości: $W_x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ($W_x = \{x_1, x_2, ...\}$) taki, że $P(\mathbf{X} = x_i) = p_i$ dla $x_i \in Wx$,

$$\sum_{i=1}^{n} p_n = 1 \quad \text{dla skończonego zbioru wartości,}$$

$$(\sum_{i=1}^{\infty} p_n = 1 \quad \text{dla przeliczalnego zbioru wartości).}$$

Funkcję p określoną na zbiorze W_x równością $p(x_i) = P(\mathbf{X} = x_i) = p_i$, dla $x_i \in W_x$ i spełniającą warunek $\sum_{x_i \in W_x} p_i = 1$ nazywamy **funkcją rozkładu prawdopodobieństwa** zmiennej losowej **X**.

2.5. DYSTRYBUANTA ZMIENNEJ LOSOWEJ TYPU SKOKOWEGO

Dla zmiennej losowej typu skokowego o skończonym zbiorze wartości (uporządkowanym według wzrastających wartości): $W_x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dystrybuanta określona wzorem $F(x) = P(\mathbf{X} \leq x)$ ma postać:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{dla} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{dla} \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{dla} \quad x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{dla} \quad x \geq x_n \end{cases}$$

2.5. WŁASNOŚCI DYSTRYBUANTY ZMIENNEJ LOSOWEJ TYPU SKOKOWEGO.

Dana jest zmienna losowa skokowa **X** o dystrybuancie F(x) określonej wzorem $F(x) = P(\mathbf{X} \leq x)$. Wtedy:

1. $P(\mathbf{X} = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$, gdzie x_i ,x_{i-1} to punkty skokowe zmiennej losowej X, gdzie $x_{i-1} < x_i$;
2. $P(a \leq \mathbf{X} \leq b) = F(b) - F(a) + P(\mathbf{X} = a)$;
3. $P(a < \mathbf{X} < b) = F(b) - F(a) - P(\mathbf{X} = b)$;
4. $P(a \leq \mathbf{X} < b) = F(b) - F(a) + P(\mathbf{X} = a) - P(\mathbf{X} = b)$;
5. $P(\mathbf{X} \geq a) = 1 - F(a) + P(\mathbf{X} = a)$;
6. $P(\mathbf{X} > a) = 1 - F(a)$;
7. $P(\mathbf{X} < a) = F(a) - P(\mathbf{X} = a)$.

2.6. ZMIENNA LOSOWA TYPU CIĄGŁEGO

Zmienna losowa X jest **typu ciągłego**, jeśli jej możliwe wartości tworzą przedział ze zbioru liczb rzeczywistych.

2.7. FUNKCJA GĘSTOŚCI ZMIENNEJ LOSOWEJ TYPU CIĄGŁEGO

Funkcją gęstości zmiennej losowej X typu ciągłego nazywamy funkcję f(x) określoną następująco $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x < \mathbf{X} \le x + \Delta x)}{\Delta x}$.

2.8. WŁASNOŚCI FUNKCJI GĘSTOŚCI

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej typu ciągłego f(x) ma własności:

1. $f(x) \ge 0$ dla dowolnego $x \in \Re$;

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = P(a < \mathbf{X} \le b)$ dla dowolnych $a < b$;

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(-\infty < \mathbf{X} \le +\infty) = 1$;

4. $P(\mathbf{X} = a) = 0$ dla dowolnego $a \in \Re$;

5. $P(\mathbf{X} < a) = P\ (\mathbf{X} \le a)\ = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$;

6. $P(\mathbf{X} > a) = P\,(\mathbf{X} \ge a)\ = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$.

2.9. POSTAĆ I WŁASNOŚCI DYSTRYBUANTY ZMIENNEJ LOSOWEJ TYPU CIĄGŁEGO

Dystrybuanta zmiennej losowej ciągłej ma postać:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{dla } x \in \Re, \quad \text{gdzie f(x) to funkcja gęstości.}$$

Dystrybuanta F(x) zmiennej losowej X typu ciągłego posiada następujące własności:

1. F(x) jest funkcją ciągłą;

2. $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x < \mathbf{X} < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$

2.10. PODSTAWOWE WZORY

Zmienna losowa jednowymiarowa:

- Zmienna skokowa: **Prawdopodobieństwo**: $\mathbf{P(X = x_i) = p_i > 0,}$

  $\sum\limits_{i \in N} p_i = 1 \quad i \in N;$

- Zmienna ciągła: **Funkcja gęstości: f(x) = F'(x),** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$ $\mathbf{f(x) \geq 0.}$

Dystrybuanta zmiennej losowej jednowymiarowej: $\mathbf{F(x) = P(X \leq x)}$

- Zmienna skokowa: **F(x)** = $\sum\limits_{-\infty < x_i \leq x} p_i;$

- Zmienna ciągła: **F(x)** = $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad$ dla $x \in R.$

Związek między dystrybuantą a prawdopodobieństwem:

$$\mathbf{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a);}$$

$$\mathbf{P(a < X \leq b)} = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

3. PARAMETRY JEDNOWYMIAROWEJ ZMIENNEJ LOSOWEJ

3.1. WARTOŚĆ OCZEKIWANA I JEJ WŁASNOŚCI

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy wyrażenie:

$$E(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_i x_i p_i & \text{dla zmiennej losowej skokowej;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{dla zmiennej losowej ciągłej.} \end{cases}$$

Własności wartości oczekiwanej:

1. $E(a) = a$, gdzie a to stała.
Zakładamy, że istnieje wartość oczekiwana zmiennej losowej **X** i **Y**, tzn. $E(\mathbf{X})$, $E(\mathbf{Y})$. Wtedy:
2. Istnieje $E(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$, oraz $E(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) + E(\mathbf{Y})$.
3. Jeżeli zmienne losowe **X**, **Y** są niezależne, to istnieje $E(\mathbf{XY})$, przy czym: $E(\mathbf{XY}) = E(\mathbf{X})E(\mathbf{Y})$.
4. $E[(a\mathbf{X})^k] = a^k E(\mathbf{X}^k)$ dla dowolnej stałej a to, gdzie k to liczba naturalna.
5. Istnieje $E(\mathbf{X} - \mathbf{Y})$ oraz $E(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = E(\mathbf{X}) - E(\mathbf{Y})$.
6. $E(a\mathbf{X} + b) = aE(\mathbf{X}) + b$ dla dowolnych stałych a, b.
7. **Nierówność Schwarza.** Jeżeli **X** i **Y** są dowolnymi zmiennymi losowymi o rozkładach, dla których istnieją momenty zwykłe pierwszego i drugiego rzędu, to $|E(\mathbf{XY})| \le \sqrt{E(\mathbf{X}^2)E(\mathbf{Y}^2)}$.
O zmiennej losowej $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - E(\mathbf{X})$ mówimy, że jest **scentralizowana.**

3.2. WARIANCJA I JEJ WŁASNOŚCI

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy wyrażenie:

$$\sigma^2 = D^2(\mathbf{X}) = E[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^2 =$$

$$= \begin{cases} \sum_i \left(x_i - E(\mathbf{X})\right)^2 p_i & \text{dla zmiennej losowej skokowej;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(\mathbf{X})\right)^2 f(x) dx & \text{dla zmiennej losowej ciągłej.} \end{cases}$$

Własności wariancji:

1. $D^2(a) = 0$, gdzie a to stała.
   Zakładamy, że istnieje wariancja zmiennej losowej **X** i **Y**, tzn. $D^2(\mathbf{X})$, $D^2(\mathbf{Y})$. Wtedy:
2. $D^2(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}^2) - [E(\mathbf{X})]^2$.
3. Dla każdego $c \neq E(\mathbf{X})$ zachodzi: $D^2(\mathbf{X}) < E((\mathbf{X}-c)^2)$.
4. Dla dowolnej stałej b zachodzi: $D^2(\mathbf{X} + b) = D^2(\mathbf{X})$.
5. Dla dowolnej stałej a zachodzi $D^2(a\mathbf{X}) = a^2D^2(\mathbf{X})$.
6. Jeżeli **X**, **Y** są niezależnymi zmiennymi losowymi, to

$$D^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) + D^2(\mathbf{Y}).$$

Pierwiastek z wariancji nazywamy **odchyleniem standardowym** i oznaczamy symbolem $\sigma = D(\mathbf{X})$.

Nierówności Czebyszewa: $P\{|\mathbf{X} - E(\mathbf{X})| \geq kD(\mathbf{X})\} \leq \frac{1}{k^2}$, $k = 1, 2, \ldots$

Standaryzacja zmiennej losowej. Jeżeli **X** jest zmienną losową o wartości przeciętnej $E(\mathbf{X})$ i odchyleniu standardowym $D(\mathbf{X})$, to zmienną losową $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{X} - E(\mathbf{X})}{D(\mathbf{X})}$ nazywamy **standaryzowaną.**

Wartość oczekiwana zmiennej losowej standaryzowanej jest równa jeden, a wariancja jest równa zero.

3.3. MOMENTY ZWYKŁE I CENTRALNE

Momentem zwykłym rzędu r (r = 1, 2, ...) zmiennej losowej **X** nazywamy wartość oczekiwaną r-tej potęgi zmiennej losowej tzn.

$$m_r = E(\mathbf{X}^r) =$$

$$= \begin{cases} \sum_i x_i^r p_i & \text{dla zmiennej losowej skokowej;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx & \text{dla zmiennej losowej ciągłej.} \end{cases}$$

Mamy $E(\mathbf{X}) = m_1$.

Momentem centralnym rzędu r (r = 1, 2, ...) zmiennej losowej **X** nazywamy wartość oczekiwaną funkcji $[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^r$ tej zmiennej losowej tzn.

$$\mu_r = E[\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^r =$$

$$= \begin{cases} \sum_i \left(x_i - E(\mathbf{X})\right)^r p_i & \text{dla zmiennej losowej skokowej;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(\mathbf{X})\right)^r f(x)dx & \text{dla zmiennej losowej ciągłej.} \end{cases}$$

Mamy $D^2(\mathbf{X}) = \mu_2$.

Pomiędzy momentami zwykłymi i centralnymi zachodzą pewne związki np:

$$\mu_1 = 0;\ \mu_2 = m_2 - m_1^2;\ \mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3;\ \mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4;$$

$$\text{i ogólnie } \mu_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} m_{k-j}(-m_1)^j \quad \text{dla} \quad k \in N.$$

3.4. DOMINANTA

Dominantą (modą) zmiennej losowej **X** nazywamy wartość zmiennej losowej, której odpowiada:

- największe prawdopodobieństwo, w przypadku zmiennej losowej skokowej;
- maksimum lokalne funkcji gęstości, w przypadku zmiennej losowej ciągłej.

3.5. KWANTYLE

Kwantylem rzędu p zmiennej losowej **X** nazywamy wartość K_p spełniającą nierówności:

$$P(\mathbf{X} \le K_p) \ge p, \quad P(\mathbf{X} \ge K_p) \ge 1 - p, \quad 0 < p < 1.$$

Para powyższych nierówności jest równoważna nierówności podwójnej:

$$p \le F(K_p) \le p + P(\mathbf{X} = K_p),$$

Kwantylem rzędu p (0 < p < 1) **zmiennej losowej typu ciągłego** o dystrybuancie F(x) i gęstości f(x) nazywamy każdą liczbę K_p, spełniającą którykolwiek z następujących równoważnych warunków (1) – (3):

$$(1)\ F(K_p) = p\ (2)\ P(\mathbf{X} \le K_p) = p$$

$$(3)\ \int_{-\infty}^{K_p} f(x)dx = p\,.$$

Kwantylem rzędu p (0 < p < 1) **zmiennej losowej typu skokowego** o dystrybuancie F(x) określonej wzorem F(x) = P(X ≤ x) nazywamy każdą liczbę K_p, spełniającą którykolwiek z następujących równoważnych warunków (1) – (2):

$$(1)\ \lim_{x \to K_p^-} F(x) \le p \le F(K_p); \quad (2)\ P(\mathbf{X} < K_p) \le p \le P(\mathbf{X} \le K_p).$$

Wśród kwantyli najważniejsze znaczenie ma kwantyl rzędu 0,5, który nazywamy medianą.

Medianą (**wartością środkową**) **zmiennej losowej X** nazywamy wartość Me spełniającą nierówności: $P(\mathbf{X} \le \mathrm{Me}) \ge 0{,}5$ i $P(\mathbf{X} \ge \mathrm{Me}) \ge 0{,}5$.

Medianą zmiennej losowej typu ciągłego o dystrybuancie F(x) i gęstości f(x) nazywamy każdą liczbę Me, spełniającą którykolwiek z następujących równoważnych warunków (1) – (3):

$$(1)\ F(\mathrm{Me}) = 0{,}5; \qquad (2)\ P(X \le \mathrm{Me}) = 0{,}5; \qquad (3)\ \int_{-\infty}^{\mathrm{Me}} f(x)dx = 0{,}5.$$

Medianą zmiennej losowej typu skokowego o dystrybuancie F(x) określonej wzorem F(x) = P(X ≤ x) nazywamy każdą liczbę Me, spełniającą którykolwiek z następujących równoważnych warunków (1) – (2):

$$(1)\ \lim_{x \to \mathrm{Me}^-} F(x) \le 0{,}5 \le F(\mathrm{Me}); \quad (2)\ P(\mathbf{X} < \mathrm{Me}) \le 0{,}5 \le P(\mathbf{X} \le \mathrm{Me}).$$

Obok mediany dość duże znaczenie mają również: Q_1 kwantyl rzędu 0,25 (**kwartyl pierwszy**) oraz Q_3 kwantyl rzędu 0,75 (**kwartyl trzeci**).

3.6. WSPÓŁCZYNNIKI ZMIENNOŚCI, SKOŚNOŚCI, SPŁASZCZENIA

Współczynnikiem asymetrii zmiennej losowej **X** nazywamy wyrażenie: $\gamma = \frac{\mu_3}{D^3(\mathbf{X})} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, gdzie $D(\mathbf{X}) = \sigma$ jest odchyleniem standardowym.

Wskaźnikiem (**współczynnikiem**) **zmienności** zmiennej losowej **X** nazywamy wyrażenie określone wzorem: $\nu = \frac{D(\mathbf{X})}{E(\mathbf{X})}$, gdzie $E(\mathbf{X}) \ne 0$.

Wskaźnikiem skupienia (**współczynnikiem spłaszczenia** lub **kurtozą**) nazywamy wyrażenie: $K = \frac{\mu_4}{D^4(\mathbf{X})} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$, gdzie $D(\mathbf{X}) = \sigma > 0$ jest odchyleniem standardowym.

Ekscesem nazywamy wyrażenie postaci: $k = K - 3$.

Eksces rozkładu normalnego jest równy zero, wobec czego eksces jest wskaźnikiem umożliwiającym porównanie skupienia badanego rozkładu z rozkładem normalnym.

Eksces dodatni wskazuje na to, że wykres rozkładu jest wyższy i bardziej wysmukły niż wykres krzywej rozkładu normalnego.

Eksces ujemny oznacza, że wykres rozkładu jest niższy i bardziej spłaszczony niż wykres krzywej rozkładu normalnego.

3.7. PODSTAWOWE WZORY

Wartość oczekiwana:

- Zmienna skokowa: **EX** = $\sum_{x_i \in W} x_i p_i$, **W** zbiór punktów skokowych;
- Zmienna ciągła: **EX** = $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.

Wariancja: $\mathbf{D^2X = E(X - EX)^2}$

- Zmienna skokowa: $\mathbf{D^2X}$ = $\sum_{x_i \in W} (x_i - EX)^2 p_i$;
- Zmienna ciągła: $\mathbf{D^2X}$ = $\int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$.

Moment zwykły rzędu r: $\mathbf{m_r = E(X^r)}$

- Zmienna skokowa: $\mathbf{m_r}$ = $\sum_{x_i \in W} x_i^r p_i$;
- Zmienna ciągła: $\mathbf{m_r}$ = $\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$.

Moment centralny rzędu r: $\boldsymbol{\mu_r = E(X - EX)^r}$

- Zmienna skokowa: $\mu_r = \sum_{x_i \in W} (x_i - EX)^r p_i;$
- Zmienna ciągła: $\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^r f(x)dx.$

4. DWUWYMIAROWA ZMIENNA LOSOWA

4.1. POJĘCIE DWUWYMIAROWEJ ZMIENNEJ LOSOWEJ

Uporządkowaną parę (**X**,**Y**) nazywamy **zmienną losową dwuwymiarową,** jeśli każda ze zmiennych **X** i **Y** jest zmienną losową.

4.2. POJĘCIE DYSTYBUANTY DWUWYMIAROWEJ ZMIENNEJ LOSOWEJ

Funkcję F(x,y) zmiennych rzeczywistych x, y określoną na całej płaszczyźnie OXY jako prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa $\mathbf{X} \leq x$ oraz $\mathbf{Y} \leq y$ nazywamy **dystrybuantą** zmiennej losowej dwuwymiarowej (**X**,**Y**) tzn. $F(x, y) = P(\mathbf{X} \leq x, \mathbf{Y} \leq y)$ dla $(x, y) \in \Re^2$.

Uwaga: Dystrybuantę dwuwymiarowj zmiennej losowej (X,Y) można również zdefiniować następująco $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$ dla $(x, y) \in \Re^2$. Należy jednak pamiętać, że w przypadku dwuwymiarowej zmiennej losowej typu skokowego obie definicje nie są równoważne.

4.3. WŁASNOŚCI DYSTYBUANTY DWUWYMIAROWEJ ZMIENNEJ LOSOWEJ

Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (**X**,**Y**) postaci $F(x, y) = P(\mathbf{X} \leq x, \mathbf{Y} \leq y)$ posiada następujące własności:

1. $\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$ dla dowolnego $x \in \Re$ oraz $\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$ dla dowolnego $y \in \Re$;
2. $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1;$

3. Dla dowolnych punktów: (x_1,y_1), (x_2,y_2) takich że, $x_1 \le x_2$, $y_1 \le y_2$ zachodzi nierówność:

$$P(x_1 < \mathbf{X} \le x_2, y_1 < \mathbf{Y} \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \ge 0.$$

4. Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą i co najmniej prawostronnie ciągłą względem każdego z argumentów.

Twierdzenie: Jeżeli $G(x, y)$ jest dowolną funkcją o wartościach rzeczywistych mającą własności **1, 2, 3, 4**, to funkcja $G(x, y)$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej dwuwymiarowej $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

4.4. DWUWYMIAROWA ZMIENNA LOSOWA TYPU SKOKOWEGO

Dwuwymiarową zmienną losową $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ nazywamy **typu skokowego**, jeśli przyjmuje ona skończoną lub co najwyżej przeliczalną liczbę wartości (x_i, y_j) $(i, j = 1, 2, 3...)$ odpowiednio z prawdopodobieństwami:

$$p_{ij} = P(\mathbf{X} = x_i, \mathbf{Y} = y_j) \text{ zachodzi przy tym warunek: } \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Funkcję, która wartościom (x_i, y_j) przyporządkowuje odpowiednie prawdopodobieństwa p_{ij} dla $i, j = 1, 2, ...,$ gdzie $p_{ij} = P(\mathbf{X} = x_i, \mathbf{Y} = y_j)$ takie, że $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$ nazywamy **funkcją prawdopodobieństwa** dwuwymiarowej zmiennej losowej $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ typu skokowego. Wygodnie jest przedstawiać tę funkcję w tabeli:

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	...	y_r	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1r}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2r}	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	...	p_{kr}	$p_{k\bullet}$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	...	$p_{\bullet r}$	1

Dystrybuanta $F(x, y) = P(\mathbf{X} \le x, \mathbf{Y} \le y)$ dwuwymiarowej zmiennej losowej ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$) typu skokowego jest funkcją określoną wzorem: $F: \Re^2 \to \langle 0,1 \rangle$

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}.$$

4.4. ROZKŁADY BRZEGOWE ZMIENNYCH LOSOWYCH TYPU SKOKOWEGO

Funkcja $P(\mathbf{X} = x_i) = p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\mathbf{X}$, nazywany **rozkładem brzegowym zmiennej losowej X** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$).

Funkcja $P(\mathbf{Y} = y_j) = p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$ wyznacza rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\mathbf{Y}$, nazywany **rozkładem brzegowym zmiennej losowej Y** w rozkładzie dwuwymiarowej zmiennej losowej ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$).

Oznaczmy dystrybuanty rozkładów brzegowych zmiennych losowych $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ odpowiednio przez $F_1(x)$, $F_2(y)$. Jeśli ($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$) jest dwuwymiarową zmienną losową skokową, to:

$$F_1(x) = \sum_{x_i \le x} p_{i\bullet} \text{ dla } x \in \Re; \quad F_2(y) = \sum_{y_j \le y} p_{\bullet j} \text{ dla } y \in \Re.$$

4.5. ROZKŁADY WARUNKOWE ZMIENNYCH LOSOWYCH TYPU SKOKOWEGO

Prawdopodobieństwa:

$$P\left(\mathbf{X} = x_i \middle| \mathbf{Y} = y_j\right) = \frac{P(\mathbf{X} = x_i, \mathbf{Y} = y_j)}{P(\mathbf{Y} = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

dla dowolnego $i \in N$ takiego, że $p_{\bullet j} > 0$ są wartościami funkcji **prawdopodobieństwa warunkowego rozkładu zmiennej losowej X** pod warunkiem, że $\mathbf{Y} = y_j$ ($j \in N$).

Prawdopodobieństwa:

$$P\left(\mathbf{Y}=y_j \middle| \mathbf{X}=x_i\right)=\frac{P(\mathbf{X}=x_i,\mathbf{Y}=y_j)}{P(\mathbf{X}=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

dla dowolnego $j\in N$ takiego, że $p_{i\bullet}>0$ są wartościami funkcji **prawdopodobieństwa warunkowego rozkładu zmiennej losowej Y** pod warunkiem, że $\mathbf{X} = x_i$ $(i\in N)$.

Dystrybuanty rozkładów warunkowych oznaczamy odpowiednio przez $F(x|y_j)$, $F(y|x_i)$ i można je wyznaczyć ze wzorów:

$$F\left(x|y_j\right)=P\left(\mathbf{X}\le x \middle| \mathbf{Y}=y_j\right)=\sum_{x_i\le x}\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}};$$

$$F\left(y|x_i\right)=P\left(\mathbf{Y}\le y \middle| \mathbf{X}=x_i\right)=\sum_{y_j\le y}\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$$

4.6. NIEZALEŻNOŚĆ ZMIENNYCH LOSOWYCH

Zmienne losowe **X**, **Y** typu skokowego są **niezależne według prawdopodobieństwa** jeśli dla każdej pary wartości (x_i, y_j) spełniony jest warunek:

$$P(\mathbf{X} = x_i,\mathbf{Y} = y_j) = P(\mathbf{X} = x_i)P(\mathbf{Y} = y_j).$$

Zmienne losowe **X**, **Y** typu skokowego są **niezależne według prawdopodobieństwa** wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

1. $P(\mathbf{X}=x_i|\mathbf{Y}=y_j)=P(\mathbf{X}=x_i)$ oraz $P(\mathbf{Y}=y_j|\mathbf{X}=x_i)=P(\mathbf{Y}=y_j)$

dla dowolnych i,j takich, że $p_{\bullet j}>0$, $p_{i\bullet}>0$ tzn. gdy rozkłady warunkowe zmiennych losowych **X**, **Y** są równe odpowiednim rozkładom brzegowym.

2. $F(x, y) = F_1(x)F(_2(y)$

tzn. dystrybuanta łącznego rozkładu zmiennych losowych (**X**, **Y**) jest równa iloczynowi odpowiednich dystrybuant ich rozkładów brzegowych.

4.7. PARAMETRY ZMIENNEJ LOSOWEJ DWUWYMIAROWEJ

Momentem zwykłym rzędu r + s dwuwymiarowej zmiennej losowej nazywamy wyrażenie postaci:

$$m_{rs} = E(\mathbf{X}^r\mathbf{Y}^s) \text{ dla } r, s \in N_o.$$

Dla zmiennej losowej skokowej zachodzi:

$$m_{rs} = \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s p_{ij} \text{ dla } r, s \in N_o$$

Mamy $m_{10} = E(\mathbf{X})$, $m_{01} = E(\mathbf{Y})$, $m_{20} = E(\mathbf{X}^2)$, $m_{02} = E(\mathbf{Y}^2)$, $m_{11} = E(\mathbf{XY})$

Momentem centralnym rzędu r + s dwuwymiarowej zmiennej losowej nazywamy wyrażenie postaci:

$$\mu_{rs} = E(\mathbf{X} - E\mathbf{X})^r(\mathbf{Y} - E\mathbf{Y})^s \text{ dla } r, s \in N_o.$$

Dla zmiennej losowej skokowej zachodzi:

$$\mu_{rs} = \sum_i \sum_j (x_i - E\mathbf{X})^r (y_j - E\mathbf{Y})^s p_{ij}$$

Mamy $\mu_{10} = \mu_{01} = 0$, $\mu_{20} = E(\mathbf{X} - m_{10})^2 = D^2(\mathbf{X})$, $\mu_{02} = E(\mathbf{Y} - m_{01})^2 = D^2(\mathbf{Y})$.

Wartością oczekiwaną rozkładu brzegowego zmiennej X typu skokowego nazywamy wyrażenie postaci:

$$E(\mathbf{X}) = \sum_i x_i p_{i\bullet}.$$

Wartością oczekiwaną rozkładu brzegowego zmiennej Y typu skokowego nazywamy wyrażenie postaci:

$$E(\mathbf{Y}) = \sum_j y_j p_{\bullet j}.$$

Warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej X|Y = y_j nazywamy wyrażenie postaci:

$$E(\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = y_j) = \sum_i x_i \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

Warunkową wartość oczekiwaną zmiennej losowej $\mathbf{Y}|\mathbf{X} = \mathbf{x_i}$ nazywamy wyrażenie postaci:

$$E(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X} = x_i) = \sum_j y_j \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$$

Wariancją rozkładu brzegowego zmiennej X typu skokowego nazywamy wyrażenie postaci:

$$D^2(\mathbf{X}) = \sum_i (x_i - E(\mathbf{X}))^2 p_{i\bullet}.$$

Wariancją rozkładu brzegowego zmiennej Y typu skokowego nazywamy wyrażenie postaci

$$D^2(\mathbf{Y}) = \sum_j (y_j - E(\mathbf{Y}))^2 p_{\bullet j}.$$

Warunkową wariancją zmiennej losowej $\mathbf{X}|\mathbf{Y} = \mathbf{y_j}$ nazywamy wyrażenie postaci:

$$D^2(\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = y_j) = \sum_i (x_i - E(\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = y_j))^2 \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}.$$

Warunkową wariancją zmiennej losowej $\mathbf{Y}|\mathbf{X} = \mathbf{x_i}$ nazywamy wyrażenie postaci:

$$D^2(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X} = x_i) = \sum_j (y_j - E(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X} = x_i))^2 \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$$

Kowariancją nazywamy wyrażenie postaci:

$$\mathrm{cov}(\mathbf{X}, Y) = E[(\mathbf{X} - E\mathbf{X})(\mathbf{Y} - E\mathbf{Y})].$$

O zmiennych losowych **X**, **Y** dla których cov(**X**,**Y**) = 0 mówimy, że są **nieskorelowane**, w przeciwnym przypadku nazywamy je **skorelowanymi**.

Własności:

1. Dla kowariancji zmiennych **X**, **Y** zachodzi równość:
   $\mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mu_{11} = m_{11} - m_{10}m_{01} = E(\mathbf{XY}) - E\mathbf{X} \cdot E\mathbf{Y}$.
2. Jeżeli zmienne losowe **X** i **Y** są niezależne, to:
   cov(**X**,**Y**) = 0.
3. Jeśli **X**,**Y** są zmiennymi losowymi o wariancjach $D^2(\mathbf{X})$, $D^2(\mathbf{Y})$, to:
   $D^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) + D^2(\mathbf{Y}) + 2\mathrm{cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.
4. Jeżeli zmienne **X** i **Y** są nieskorelowane, to:
   $D^2(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = D^2(\mathbf{X}) + D^2(\mathbf{Y})$.
5. Dla kowariancji zmiennych **X**, **Y** zachodzi nierówność:

$-D(\mathbf{X})D(\mathbf{Y}) \le \operatorname{cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \le D(\mathbf{X})D(\mathbf{Y})$.

Współczynnikiem korelacji zmiennych losowych **X** i **Y** nazywamy:

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}{\sqrt{D^2(\mathbf{X})\cdot D^2(\mathbf{Y})}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}}.$$

Własności współczynnika korelacji:

1. $\rho \in \langle -1,1\rangle$.

2. Gdy $\rho = 0$, to zmienne **X**, **Y** są nieskorelowane.

3. Jeżeli zmienne **X** i **Y** są niezależne, to $\rho = 0$. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

4. Gdy $\rho \neq 0$, to mówimy, że zmienne losowe **X**, **Y** są skorelowane. Im wartość ρ jest bliższa 1 lub –1, tym skorelowanie (a zatem i zależność) między zmiennymi jest silniejsza. Im wartość ρ jest bliższa zera tym zależność jest słabsza.

5. Jeżeli $\rho < 0$, to zależność między zmiennymi losowymi jest ujemna, tzn. wzrostowi wartości jednej zmiennej odpowiada przeciętny spadek wartości drugiej zmiennej. Jeżeli $\rho > 0$, to zmienne losowe **X** i **Y** są powiązane zależnością dodatnią, tzn. wzrostowi wartości jednej zmiennej odpowiada przeciętny wzrost wartości drugiej zmiennej.

6. Współczynnik korelacji $(\rho)^2 = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(\mathbf{Y} = a\mathbf{X} + b) = 1$ dla pewnych $a, b \in R$, tzn. zmienne losowe **X**, **Y** są związane zależnością liniową z prawdopodobieństwem równym jedności. Przy czym $\rho = 1$ jeżeli $a > 0$ oraz $\rho = -1$ gdy $a < 0$.

4.8. PODSTAWOWE WZORY

- **Funkcja prawdopodobieństwa:** $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ **dla** $i, j \in N$,

  $p_{ij} \ge 0,\ \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

- **Dystrybuanta:** $F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$

- **Rozkłady brzegowe:**

  Rozkład brzegowy zmiennej losowej **X**:

  $P(X = x_i) = p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$ **dla** $i \in N$

Rozkład brzegowy zmiennej losowej **Y**:

$\mathbf{P(Y = y_j)} = p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$ **dla j** $\in N$

- **Dystrybuanty rozkładów brzegowych:**

Dystrybuanta rozkładu brzegowego zmiennej losowej **X**:

$$\mathbf{F_1(x)} = \sum_{x_i \le x} p_{i\bullet} \text{ dla } \mathbf{x} \in R.$$

Dystrybuanta rozkładu brzegowego zmiennej losowej **Y**:

$$\mathbf{F_2(y)} = \sum_{y_j \le y} p_{\bullet j} \text{ dla } \mathbf{y} \in R.$$

- **Rozkłady warunkowe:**

Rozkład warunkowy zmiennej losowej **X** pod warunkiem, że $\mathbf{Y = y_j}$:

$$P\left(X = x_i \middle| Y = y_j\right) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \text{ gdzie } \mathbf{P(Y = y_j) > 0, j} \in N.$$

Rozkład brzegowy zmiennej losowej **Y** pod warunkiem, że $\mathbf{X = x_i}$:

$$P\left(Y = y_j \middle| X = x_i\right) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \text{ gdzie } \mathbf{P(X = x_i) > 0, i} \in N.$$

- **Dystrybuanty rozkładów warunkowych:**

$$F\left(x \middle| y_j\right) = P\left(X \le x \middle| Y = y_j\right) = \sum_{x_i \le x} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \; F\left(y \middle| x_i\right) = P\left(Y \le y \middle| X = x_i\right) = \sum_{y_j \le y} \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$$

- **Warunkowa wartość oczekiwana:**

$$E(X \mid Y = y_j) = \sum_i x_i \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \; E(Y \mid X = x_i) = \sum_j y_j \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}.$$

- **Moment zwykły rzędu r + s:** $\mathbf{m_{rs} = E(X^r Y^s)}$ **dla r, s** $\in N_o$

$\mathbf{m_{10} = E(X), m_{01} = E(Y), m_{20} = E(X^2), m_{02} = E(Y^2), m_{11} = E(XY)}$

Zmienna skokowa: $\mathbf{m_{rs}} = \sum_i \sum_j x_i^r y_j^s p_{ij}$ **dla r, s** $\in N_o$.

- **Moment centralny rzędu r + s:** $\mu_{rs} = E(X - EX)^r (Y - EY)^s$ **dla r, s** $\in N_o$,

$$\mu_{10} = \mu_{01} = 0,\ \mu_{20} = E(X - m_{10})^2 = D^2(X),$$
$$\mu_{02} = E(Y - m_{01})^2 = D^2(Y).$$

Zmienna skokowa: $\mu_{rs} = \sum_i \sum_j (x_i - EX)^r (y_j - EY)^s p_{ij}$.

- **Kowariancja: cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)],**
  cov(X,Y) = $\mu_{11} = m_{11} - m_{10} m_{01} = E(XY) - EX \cdot EY$

- **Współczynnik korelacji:**

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D^2 X D^2 Y}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}}$$

5. WYBRANE ROZKŁADY ZMIENNEJ LOSOWEJ

5.1. ROZKŁADY SKOKOWE

5.1.1. Skokowy (dyskretny) rozkład równomierny:

$\mathbf{x_i}$	x_1	x_2	. . .	x_n
$\mathbf{p_i}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	. . .	$\frac{1}{n}$

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $D^2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(\mathbf{X}))^2$

5.1.2. Rozkład jednopunktowy:

x_i	a
p_i	1

Dystrybuanta: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < a \\ 1 & \text{dla} \quad x \geq a \end{cases}.$

Parametry rozkładu: $E(X) = a$, $D^2(X) = 0$.

5.1.3. Rozkład zerojedynkowy z parametrem p, $0 < p < 1$, gdzie $p + q = 1$.

x_i	0	1
p_i	q	p

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{X}) = p$, $D^2(\mathbf{X}) = pq$, $\mu_3 = pq(1-2p)$.

5.1.4. Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) z parametrami (n, p), $n \in N$, gdzie $q = 1 - p$.

$$P(k; n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \; k = 0, 1, 2, ...n.$$

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{X}) = np$, $D^2(\mathbf{X}) = npq$, $\mu_3 = np(1-2p)$.

Jeżeli $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ..., $\mathbf{X}_k$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie dwumianowym z parametrami (n_i, p) $(i = 1, 2, ..., k)$ każda, to zmienna losowa $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_k$ ma też rozkład dwumianowy z parametrami $(n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \; p)$.

5.1.5. Rozkład Poissona z parametrem λ, $\lambda > 0$.

Funkcja prawdopodobieństwa: $p_k = P(k; \lambda) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k \in N \cup \{0\}$.

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{X}) = \lambda$, $D^2(\mathbf{X}) = \lambda$, $\mu_3 = \lambda$.

Dla dużych n mamy następujące przybliżenie Poissona rozkładu dwumianowego:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \ \lambda = np, \ k \in N \cup \{0\}.$$

Przybliżenie to jest do celów praktycznych wystarczająco dokładne gdy: $n \geq 50$, $p \leq 0{,}1$, $np \leq 10$.

Jeżeli $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ..., $\mathbf{X}_k$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona odpowiednio ze średnimi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, to zmienna losowa $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + ... + \mathbf{X}_k$ ma też rozkład Poissona ze średnią $E(\mathbf{X}) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$.

5.2. ROZKŁADY CIĄGŁE

5.2.1. Rozkład równomierny (jednostajny, prostokątny):

Funkcja gęstości: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla pozostalych } x \end{cases}$

Dystrybuanta: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dla} \quad a \leq x < b \\ 1 & \text{dla} \quad x \geq b \end{cases}$

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{X}) = Me = \dfrac{a+b}{2}$, $D^2(\mathbf{X}) = \dfrac{1}{12}(b-a)^2$,

$\mu_{2r} = \dfrac{(b-a)^{2r}}{(2r+1) \cdot 2^{2r}}$ dla dowolnego $r \in N$, $\mu_{2r+1} = 0$ dla dowolnego $r \in N$, brak mody.

5.2.2. Rozkład wykładniczy o parametrze λ:

Funkcja gęstości: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostalych } x \end{cases}$.

Dystrybuanta: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostalych } x \end{cases}$.

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{X}) = \lambda$, $D^2(\mathbf{X}) = \lambda^2$, Me = $\lambda \ln 2$, Do = 0.

5.2.3. Rozkład normalny (de Moivre'a-Gaussa) o parametrach m, σ, przy czym $m \in \Re$, $\sigma \in \Re^+$:

Funkcja gęstości: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ dla $x \in \Re$.

Rozkład normalny o parametrach m, σ oznaczamy symbolem $N(m, \sigma)$.

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{X})$ = Me = Do = m, $D^2(\mathbf{X}) = \sigma^2$, $\mu_{2r+1} = 0$ dla dowolnego $r \in N$, współczynnik skupienia K = 3, eksces (współczynnik spłaszczenia) $\gamma_2 = K - 3 = 0$.

Jeżeli zmienna losowa **X** ma rozkład $N(m, \sigma)$, to standaryzowana zmienna losowa $\mathbf{U} = \dfrac{\mathbf{X} - m}{\sigma}$ ma rozkład N(0,1) zwany standaryzowanym rozkładem normalnym.

Funkcja gęstości rozkładu N(0,1): $\varphi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$ dla $u \in \Re$.

Dystrybuanta rozkładu N(0,1): $\Phi(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$.

Z symetrii wykresu funkcji gęstości $\varphi(u)$ względem osi OY wynika następująca zależność: $\Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$.

Jeżeli $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, ..., $\mathbf{X}_k$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o rozkładzie normalnym $N(m_i, \sigma_i)$ (i = 1, 2, ..., k), to dla dowolnych stałych c_i (i = 1, 2, ..., k), zmienna losowa $c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_k\mathbf{X}_k$ ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$, gdzie $m = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i m_i$, $\sigma^2 = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i^2 \sigma_i^2$.

5.2.4. Rozkład chi-kwadrat. Niech $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_k$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym N(0,1) każda.

Rozkład zmiennej losowej będącej sumą ich kwadratów $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{U}_i^2$ nazywamy **rozkładem** χ^2 **o** k **stopniach swobody.**

Parametr k rozkładu χ^2, zwany liczbą stopni swobody, oznacza liczbę niezależnych składników $\mathbf{U}_i^2$, które sumujemy.

Parametry rozkładu: $E(\chi^2) = k$, $D^2(\chi^2) = 2k$.

Rozkład χ^2 jest asymetryczny (dodatnia asymetria malejąca wraz ze wzrostem liczby stopni swobody k).

Rozkład χ^2 przy liczbie stopni swobody $k \to +\infty$ jest zbieżny do rozkładu normalnego, tzn. $\frac{\chi^2 - k}{\sqrt{2k}} \to N(0,1)$, gdy $k \to +\infty$.

W praktyce korzysta się dla dużych k z szybszej zbieżności rozkładu zmiennej $\sqrt{2\chi^2}$ do rozkładu normalnego $N(\sqrt{2k-1}, 1)$, czyli

$\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2k-1} \to N(0,1)$, gdy $k \to +\infty$.

5.2.5. Rozkład t-Studenta. Niech **U** będzie zmienną losową o rozkładzie normalnym N(0,1), **V** zmienną losową o rozkładzie χ^2 o k stopniach swobody, przy czym zmienne losowe **U**, **V** są niezależne. Rozkład zmiennej losowej postaci $\frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\frac{\mathbf{V}}{k}}}$ nazywamy **rozkładem t-Studenta o k stopniach swobody**.

Parametry rozkładu: E(t) = 0 dla k > 1, $D^2(t) = \frac{k}{k-2}$ dla k > 2, $\gamma_1 = 0$, rozkład jednomodalny Mo = 0.

- Rozkład t-Studenta jest symetryczny względem osi OY, wykres rozkładu t-Studenta jest bardzo zbliżony do rozkładu normalnego (wykres jest nieco bardziej spłaszczony).
- Rozkład t-Studenta o k stopniach swobody jest przy liczbie stopni swobody $k \to +\infty$ zbieżny do rozkładu N(0,1).

5.2.6. Rozkład F-Snedecora. Niech **U**, **V** będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach χ^2 odpowiednio z k_1 oraz k_2 stopniami swobody. Rozkład zmiennej losowej $\dfrac{\mathbf{U}/k_1}{\mathbf{V}/k_2} = \dfrac{\mathbf{U}}{\mathbf{V}} \cdot \dfrac{k_2}{k_1}$ nazywamy **rozkładem F-Snedecora z k_1, k_2 stopniami swobody.**

Parametry rozkładu: $E(\mathbf{F}) = \dfrac{k_2}{k_2 - 2}$ dla $k_2 > 2$ (dla dużych $k^2 \to +\infty$ $E(\mathbf{F}) \to 1$), $D^2(F) = \dfrac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 4)(k_2 - 2)^2}$ dla $k_2 > 4$.

6. TWIERDZENIA GRANICZNE. ZBIEŻNOŚĆ STOCHASTYCZNA. NIERÓWNOŚCI CZEBYSZEWA

Twierdzenie graniczne Poissona. Jeżeli $\{\mathbf{X}_n\}$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie Bernoulliego:

$$P(\mathbf{X}_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ 0 < p < 1, k = 0, 1, 2, ..., n,$$

to przy zachowaniu warunku $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0}} np = \lambda > 0$ spełniona jest równość graniczna

$$\lim_{n \to +\infty} P(\mathbf{X}_n = k) = P(\mathbf{X} = k),$$

gdzie $P(\mathbf{X} = k)$ jest funkcją prawdopodobieństwa zmiennej losowej o rozkładzie Poissona z parametrem λ.

Lokalne twierdzenie graniczne de Moivre'a-Laplace'a. Niech $\{\mathbf{X}_n\}$ będzie ciągiem wystandaryzowanych zmiennych losowych $\mathbf{X}_n$ o rozkładzie dwumianowym (Bernoulliego) z parametrami n i $0 < p < 1$. Jeżeli $\{\mathbf{Y}_n\}$ jest ciągiem wystandaryzowanych zmiennych losowych $\{\mathbf{X}_n\}$ (tzn. $\mathbf{Y}_n = \dfrac{\mathbf{X}_n - np}{\sqrt{npq}}$ dla dowolnego n), to:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{npq}\, P(\mathbf{Y}_n = y_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}y^2)},$$

gdzie $y_n = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ jest wartością, jaką przyjmuje zmienna losowa $\mathbf{Y}_n$, gdy zmienna losowa $\mathbf{X}_n$ przyjmuje wartość k taką, że gdy $n \to +\infty$, to również $k \to +\infty$ w taki sposób, że $(n - k) \to +\infty$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}.$$

Integralne twierdzenie graniczne Moivre'a-Laplace'a. Niech $\{\mathbf{X}_n\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym z parametrami n i $0 < p < 1$ oraz niech $\{\mathbf{U}_n\}$ będzie ciągiem wystandaryzowanych zmiennych losowych X_n:

$$\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{X}_n - np}{\sqrt{npq}}.$$

Wtedy dla ciągu dystrybuant $\{F_n(u)\}$ zmiennych losowych $\mathbf{U}_n$ zachodzi:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(u)$$

dla każdej wartości u ($\Phi(u)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego).

Wniosek. Niech $\{\mathbf{X}_n\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o rozkładzie dwumianowym z parametrami n i $0 < p < 1$.

Rozpatrujemy zmienne losowe $\mathbf{Y}_n$ postaci sumy zmiennych losowych $\mathbf{X}_i$:

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i.$$

Niech $\{\mathbf{U}_n\}$ będzie ciągiem wystandaryzowanych zmiennych losowych $\mathbf{Y}_n$:

$$\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{Y}_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}.$$

Wówczas dla ciągu dystrybuant $\{F_n(u)\}$ zmiennych losowych $\mathbf{U}_n$ zachodzi:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(u)$$

dla każdej wartości u ($\Phi(u)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego).

Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Levy'ego. Niech $\{\mathbf{X}_i\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych:

1. niezależnych;
2. o tym samym rozkładzie;
3. o skończonej wartości przeciętnej $E(\mathbf{X}_i) = E(\mathbf{X})$;
4. o skończonej i większej od zera wariancji $0 < D^2(\mathbf{X}_i) = D^2(\mathbf{X}) < \infty$.

Rozpatrujemy zmienne losowe $\mathbf{Y}_n$ postaci sumy zmiennych losowych $\mathbf{X}_i$:

$$\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i .$$

Jeżeli $\{\mathbf{U}_n\}$ jest ciągiem wystandaryzowanych zmiennych losowych $\mathbf{Y}_n$, tzn.:

$$\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{Y}_n - E(\mathbf{Y}_n)}{D(\mathbf{Y}_n)},$$

to ciąg dystrybuant $\{F_n(u)\}$ zmiennych losowych $\mathbf{U}_n$ spełnia:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

dla każdej wartości u, tzn. ciąg zmiennych losowych $\{\mathbf{U}_n\}$ jest zbieżny do rozkładu normalnego N(0,1).

Wniosek. Niech $\{\mathbf{X}_i\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych:

1. niezależnych;
2. o tym samym rozkładzie;
3. o skończonej wartości przeciętnej $E(\mathbf{X}_i) = E(\mathbf{X})$;
4. o skończonej i większej od zera wariancji $0 < D^2(\mathbf{X}_i) = D^2(\mathbf{X}) < \infty$.

Rozpatrujemy zmienne losowe $\mathbf{V}_n$ w postaci średniej arytmetycznej zmiennych losowych X_i:

$$\mathbf{V}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i}{n}.$$

Jeżeli $\{\mathbf{U}_n\}$ jest ciągiem wystandaryzowanych zmiennych losowych $\mathbf{V}_n$, tzn.

$$\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{V}_n - E(\mathbf{V}_n)}{D(\mathbf{V}_n)},$$

to ciąg dystrybuant $\{F_n(u)\}$ zmiennych losowych $\mathbf{U}_n$ spełnia:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

dla każdej wartości u, tzn. ciąg zmiennych losowych $\{\mathbf{U}_n)$ jest zbieżny do rozkładu normalnego N(0,1).

Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $\{\mathbf{X}_n\}$ **jest stochastycznie zbieżny do zmiennej losowej X**, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ jest spełniona zależność:

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}| < \varepsilon) = 1. \qquad (*)$$

Równość (*) oznacza, że prawdopodobieństwo zdarzenia $|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}| < \varepsilon$ wzrasta do jedności, gdy $n \to \infty$.

Jeśli przyjmiemy, że $\mathbf{X}$ = c = const, to będziemy mówili o **stochastycznej zbieżności ciągu zmiennych losowych** $\{\mathbf{X}_n\}$ **do stałej** c, czyli:

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\mathbf{X}_n - c| < \varepsilon) = 1.$$

Nierówności Czebyszewa.

Twierdzenie 1. Dla każdej zmiennej losowej **X** o nieujemnych wartościach i skończonej wartości oczekiwanej E(**X**) mamy:

$$P(\mathbf{X} \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\mathbf{X})}{\varepsilon} \text{ dla dowolnego } \varepsilon > 0.$$

Twierdzenie 2. Dla każdej zmiennej losowej **X** o skończonej wartości oczekiwanej kwadratu zmiennej losowej $E(\mathbf{X}^2)$ mamy:

$$P(|\mathbf{X}| \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\mathbf{X}^2)}{\varepsilon^2} \text{ dla dowolnego } \varepsilon > 0.$$

Twierdzenie 3. Dla każdej zmiennej losowej **X** o skończonej wartości oczekiwanej E(**X**) i wariancji $D^2(\mathbf{X})$ mamy:

$$P(|\mathbf{X} - E(\mathbf{X})| \geq \varepsilon) \leq \frac{D^2(\mathbf{X})}{\varepsilon^2} \text{ dla dowolnego } \varepsilon > 0.$$

Twierdzenie 4. Dla każdej zmiennej losowej **X** o skończonej wartości oczekiwanej E(**X**) i wariancji D^2(X) mamy:

$$P(|\mathbf{X} - E(\mathbf{X})| \geq \varepsilon D(\mathbf{X})) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ dla dowolnego } \varepsilon > 0.$$

7. ROZKŁADY STATYSTYK Z PRÓBY

Statystyką (z próby*)* nazywamy zmienna losową $\mathbf{Z}_n$ będącą funkcją zmiennych $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ stanowiących próbę losową.

7.1. ROZKŁAD ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ Z PRÓBY

Średnią arytmetyczną z próby n-elementowej jest statystyka postaci:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ.

Średnia arytmetyczna z n-elementowej próby $\overline{X}_n$ ma rozkład

normalny $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, czyli statystyka

$$U = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

ma standardowy rozkład normalny $N(0,1)$.

2. Populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ.

Statystyka $t_{n-1} = \frac{\overline{X}_n - m}{s}\sqrt{n-1} = \frac{\overline{X}_n - m}{\hat{s}}\sqrt{n}$ ma rozkład t-Studenta z n-1 stopniami swobody.

Rozkład t-Studenta z n-1 stopniami swobody ma graniczny standardowy rozkład normalny $N(0,1)$.

W praktyce przyjmujemy n > 30, czyli $U = \frac{\overline{X}_n - m}{s}\sqrt{n-1} = \frac{\overline{X}_n - m}{\hat{s}}\sqrt{n}$.

3. Populacja ma dowolny rozkład z parametrami (m, σ) ze znanym odchyleniem standardowym σ.

Średnia arytmetyczna z n-elementowej próby $\overline{X}_n$ ma przy $n \to \infty$ graniczny rozkład normalny $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, czyli statystyka

$$U = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

ma standardowy rozkład normalny $N(0,1)$.

7.2. ROZKŁAD RÓŻNICY ŚREDNICH ARYTMETYCZNYCH Z PRÓB DLA DWÓCH POPULACJI NORMALNYCH

1. Populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$ oraz $N(m_2, \sigma_2)$ ze znanymi odchyleniami standardowymi σ_1, σ_2.

Niech dane będą dwie populacje normalne $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$, z których pobiera się próby liczące odpowiednio n_1 i n_2 elementów. Wówczas statystyka $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, czyli różnica średnich arytmetycznych z obu prób ma rozkład normalny $N\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$, czyli statystyka $U = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ ma standardowy rozkład normalny $N(0,1)$.

2. Populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$ oraz $N(m_2, \sigma_2)$ z nieznanymi, ale jednakowymi odchyleniami standardowymi $\sigma_1 = \sigma_2$.

Niech dane będą dwie populacje normalne $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$ o identycznych odchyleniach standardowych ($\sigma_1 = \sigma_2$), z których pobiera się niezależnie próby liczące odpowiednio n_1 i n_2 elementów. Dla tych prób wyznaczamy odpowiednio średnie $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ oraz wariancje s_1^2 i s_2^2. Wówczas statystyka postaci:

$$t_{n_1+n_2-2} = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - \left(m_1 - m_2\right)}{\sqrt{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}\left(n_1 + n_2 - 2\right)}$$

ma rozkład t-Studenta z $n_1 + n_2 - 2$ stopniami swobody.

7.3. ROZKŁAD WARIANCJI Z PRÓBY DLA POPULACJI NORMALNEJ

Wariancją z próby n-elementowej jest statystyką postaci:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_i})^2 \text{ lub } \hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_i})^2 .$$

1. Populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ **o nieznanym parametrze m, a próba jest mała (n** ≤ 30**)**.

Statystyka postaci: $\chi_{n-1}^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}$ ma rozkład χ^2 (chi-kwadrat) z n-1 stopniami swobody.

2. Populacja ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$ **o nieznanym parametrze m, próba jest duża (n** > 30**)**.

Statystyka $U = \sqrt{2\chi_{n-1}^2} - \sqrt{2(n-1)-1}$ ma graniczny standardowy rozkład normalny $N(0,1)$.

7.4. ROZKŁAD ILORAZU WARIANCJI Z PRÓB DLA DWÓCH POPULACJI NORMALNYCH

Populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$ **oraz** $N(m_2, \sigma_2)$ **z dowolnymi średnimi i wariancjami** σ_1^2, σ_2^2**.**

Niech dane będą dwie populacje normalne $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$, z których pobiera się próby liczące odpowiednio n_1 i n_2 elementów. Wówczas statystyka

$$\frac{\dfrac{n_1 S_1^2}{(n_1 - 1)\sigma_1^2}}{\dfrac{n_2 S_2^2}{(n_2 - 1)\sigma_2^2}} = \frac{\dfrac{\hat{S}_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{\hat{S}_2^2}{\sigma_2^2}}$$

ma rozkład F-Snedeecora o $n_1 - 1$ oraz $n_2 - 1$ stopniach swobody.

7.5. ROZKŁAD WSKAŹNIKA STRUKTURY Z PRÓBY

Populacja generalna ma rozkład zero-jedynkowy z parametrem p.

Wskaźnikiem struktury z próby n-elementowej jest statystyka postaci $\hat{p} = \frac{X}{n}$.

Statystyka $\hat{p} = \frac{m}{n}$ jest wskaźnikiem struktury z próby n-elementowej.

Jeśli $n \to \infty$ (w praktyce $n > 100$), to statystyka $\hat{p} = \frac{m}{n}$ ma graniczny rozkład normalny $N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, czyli statystyka

$$U = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

ma graniczny standardowy rozkład normalny $N(0,1)$.

7.6. ROZKŁAD RÓŻNICY DWÓCH WSKAŹNIKÓW STRUKTURY Z PRÓBY

Badane są dwie populacje generalne o rozkładzie zero-jedynkowym: z parametrem p_1 **oraz z parametrem** p_2.

Statystyka $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}$ jest różnicą wskaźników struktury z prób n_1-elementowej z pierwszej populacji i n_2-elementowej z drugiej populacji. Statystyka $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ ma przy $n_1 \to \infty$ i $n_2 \to \infty$ (w praktyce $n_1 > 100$ i $n_2 > 100$), graniczny rozkład normalny $N\left(p_1 - p_2, \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right)$, czyli statystyka

$$U = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

ma graniczny standardowy rozkład normalny $N(0,1)$.

8. ESTYMACJA PUNKTOWA I PRZEDZIAŁOWA

Estymacja parametryczna to szacowanie wartości parametrów rozkładu populacji generalnej:

- **estymacja punktowa** (za ocenę wartości parametru populacji przyjmuje się jedną konkretną wartość otrzymaną na podstawie wyników próby);
- **estymacja przedziałowa** (wyznacza się odpowiednio pewien liczbowy przedział dotyczący szacowanego parametru populacji).

8.1. ESTYMACJA PUNKTOWA

Estymatorem parametru θ rozkładu populacji X nazywamy statystykę T_n z próby n-elementowej, czyli zmienną losową, która służy do oszacowania wartości tego parametru.

Oceną parametru θ nazywamy konkretną wartość liczbową jaką przyjmuje estymator T_n dla realizacji próby.

Własności estymatora:

- Estymator T_n parametru θ nazywamy **nieobciążonym,** jeżeli $ET_n = \theta$.
- **Obciążenie estymatora** $b_n = ET_n - \theta$ określa przeciętną rozbieżność ocen względem wartości parametru.
- Estymator T_n parametru θ nazywamy **asymptotycznie nieobciążonym**, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} ET_n = \theta$.
- Z pośród nieobciążonych estymatorów $T_n^1, T_n^2, ..., T_n^k$ parametru θ ten jest **najefektywniejszy,** którego wariancja jest najmniejsza.
- Estymator Tn parametru θ **jest zgodny,** jeżeli dla dowolnie małego $\varepsilon > 0$ zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

Własności estymatora:

1. Jeśli estymator jest zgodny, to jest co najmniej asymptotycznie nieobciążony.
2. Jeśli estymator jest nieobciążony lub asymptotycznie nieobciążony i jego wariancja maleje do zera, wraz ze wzrostem liczebności próby, to jest on estymatorem zgodnym.

Przykłady:

- $\overline{X}_n$ jest nieobciążonym estymatorem EX: $E(\overline{X}_n) = EX$;
- S_n^2 jest obciążonym, ale asymptotycznie nieobciążonym estymatorem D^2X: $E(S_n^2) = \frac{n-1}{n} D^2X$;
- $\hat{S}_n^2$ jest nieobciążonym estymatorem D^2X: $E\left(\hat{S}_n^2\right) = D^2X$.

8.2. ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA

Pojęcie przedziału ufności. Niech cecha X ma rozkład z nieznanym parametrem θ. Załóżmy, że na podstawie losowej próby $(X_1, X_2, ..., X_n)$ pochodzącej z tej populacji wyznaczamy funkcje $\underline{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ oraz $\overline{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ takie, że dla każdego $(x_1, x_2, ..., x_n)$ mamy $\underline{\theta} < \overline{\theta}$ i dla z góry przyjętego prawdopodobieństwa $\mathbf{1-\alpha}$ zachodzi:

$$P(\underline{\theta}(X_1, X_2, ...X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, ...X_n)) = \mathbf{1-\alpha}.$$

Losowy przedział $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ nazywamy **przedziałem ufności** parametru θ, a ustalone z góry prawdopodobieństwo $\mathbf{1-\alpha}$ **współczynnikiem ufności** lub **poziomem ufności.** Przy wielokrotnym pobieraniu prób n-elementowych i wyznaczaniu na ich podstawie wartości funkcji $\underline{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$, oraz $\overline{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ średnio w $\mathbf{(1-\alpha)\cdot 100\%}$ przypadków otrzymamy przedziały pokrywające nieznaną wartość θ. Natomiast średnio w $\mathbf{\alpha \cdot 100\%}$ przypadkach otrzymamy przedziały, które nie pokrywają wartości θ.

1. Przedział ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ ze znanym odchyleniem standardowym σ:

$$P\left(\overline{X}_n - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$

2. Przedział ufności dla wartości średniej m w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ z nieznanym odchyleniem standardowym σ:

$$P\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = 1-\alpha$$

lub

$$P\left(\overline{X}_n - t_{\alpha,n-1}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + t_{\alpha,n-1}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha,$$

gdzie $P(|t| \geq t_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

3. Przedział ufności dla wartości średniej m w populacji o nieznanym rozkładzie (duża próba):

$$P\left(\overline{X}_n - u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \overline{X}_n + u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha, \text{ można przyjąć } \sigma = s),$$

gdzie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$.

4. Przedział ufności dla wariancji σ^2 w populacji o rozkładzie normalnym $N(m,\sigma)$:

$$P\left(\frac{n s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{n s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$$

lub

$$P\left(\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha,$$

gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz $P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

5. Przedział ufności dla odchylenia standardowego σ w populacji o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$:

$$P\left(\sqrt{\frac{n s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} < \sigma < \sqrt{\frac{n s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}\right) = 1-\alpha$$

lub

$$P\left(\sqrt{\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}}\right) = 1-\alpha,$$

gdzie $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ oraz $P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}) = 1-\frac{\alpha}{2}$.

6. Przedział ufności dla odchylenia standardowego σ w populacji o nieznanym rozkładzie (duża próba):

$$P\left(\frac{s}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{s}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right) = 1-\alpha,$$

$$\text{gdzie } P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$$

7. Przedział ufności dla parametru p (prawdopodobieństwa sukcesu) w rozkładzie zero-jedynkowym

$$P\left(\hat{p} - u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + u_\alpha\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 1-\alpha,$$

$$\text{gdzie } P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$$

Tabela 1. Przedziały ufności dla parametrów populacji

<table>
<tr><th>MODEL</th><th>PRZEDZIAŁ UFNOŚCI
ze współczynnikiem $1-\alpha$</th><th>TABLICE</th></tr>
<tr><td colspan="3">Realizacja przedziału ufności dla wartości średniej m</td></tr>
<tr><td>Cecha X ma w populacji generalnej rozkład N(m,σ),σ jest znane.</td><td rowspan="2">$(\bar{x}-u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$</td><td rowspan="2">$P(|U| \geq u_\alpha)=\alpha$</td></tr>
<tr><td>Cecha X ma w populacji generalnej dowolny rozkład, σ jest znane, n > 120.</td></tr>
<tr><td>Cecha X ma w populacji generalnej rozkład N(m,σ),σ jest nieznane, n > 30.</td><td rowspan="2">$(\bar{x}-u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}})$</td><td rowspan="2">$P(|U| \geq u_\alpha)=\alpha$</td></tr>
<tr><td>Cecha X ma w populacji generalnej dowolny rozkład, σ jest nieznane, n > 120.</td></tr>
<tr><td>Cecha X ma w populacji generalnej rozkład N(m,σ), σ jest nieznane, $n \leq 30$</td><td>$(\bar{x}-t_{\alpha;n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}},\ \bar{x}+t_{\alpha;n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}})$ lub
$(\bar{x}-t_{\alpha;n-1} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\alpha;n-1} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}})$</td><td>$P(|t| \geq t_{\alpha;n-1})=\alpha$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Realizacja przedział ufności dla wariancji σ^2 (odchylenia standardowego σ)</td></tr>
<tr><td>Cecha X ma w populacji generalnej rozkład normalny N(m,σ), m, σ jest nieznane, $n \leq 30$.</td><td>Realizacja przedziału ufności dla wariancji σ^2:
$(\frac{ns^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}},\ \frac{ns^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}})$ lub
$(\frac{(n-1)(\hat{s})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1}},\ \frac{(n-1)(\hat{s})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1}})$</td><td>$P(\chi^2 \geq \chi^2_{\frac{\alpha}{2};n-1})=\frac{\alpha}{2}$
$P(\chi^2 \geq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2};n-1})=1-\frac{\alpha}{2}$</td></tr>
<tr><td>Cecha X ma w populacji generalnej rozkład normalny N(m, σ), n > 30.</td><td>Realizacja przedziału ufności dla odchylenia standardowego σ:
$\left(\frac{s}{1+\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}},\frac{s}{1-\frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right)$</td><td>$P(|U| \geq u_\alpha)=\alpha$</td></tr>
</table>

Realizacja przedziału ufności dla wskaźnika struktury p		
Populacja generalna ma rozkład zero-jedynkowy z parametrem p (wskaźnik struktury), $n \geq 100$.	$\left(\frac{m}{n} - u_\alpha \sqrt{\frac{\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}{n}},\ \frac{m}{n} + u_\alpha \sqrt{\frac{\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}{n}}\right)$	$P(\lvert U \rvert \geq u_\alpha) = \alpha$

gdzie: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\quad s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, $\quad \hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$,

n – liczebność próby, m – liczba elementów wyróżnionych w próbie.

8.3. MINIMALNA LICZEBNOŚĆ PRÓBY

Przedział ufności parametru θ populacji generalnej budujemy w oparciu o rozkład estymatorów, przy założeniu posiadanych wyników próby o ustalonej z góry liczebności n. Otrzymany przedział liczbowy ma pewna długość 2d i może się okazać, że połowa długości przedziału ufności d, która jest miarą maksymalnego szacunku parametru θ, jest tak duża, że dyskredytuje dokonany szacunek tego parametru. Chcąc zapewnić sobie z góry dobra dokładność szacunku możemy to uczynić dobierają dostatecznie duża próbę. Wzory na minimalną liczebność próby otrzymujemy przekształcają odpowiednie wzory na przedział ufności. Warto zauważyć, że nie zawsze da się otrzymać ze wzorów na przedziały ufności wzory na liczebność próby.

d – połowa długości przedziału ufności (maksymalny błąd szacunku parametru);

$1-\alpha$ – poziom ufności;

Minimalna liczebność próby jest najmniejszą liczbą naturalną, spełniającą nierówność (*)

Wyznaczanie minimalnej liczebności próby potrzebnej do oszacowania przedziału ufności dla:

1. Wartości średniej m:

a) Populacja generalna ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$, σ jest znane

$$n \geq \frac{u_\alpha^2 \sigma^2}{d^2} \quad (*)$$

gdzie u_α jest to wartość zmiennej losowej rozkładu N(0,1) taka, że $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$ (lub równoważnie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$).

b) Populacja generalna ma rozkład normalny $N(m,\sigma)$, σ jest nieznane

Metoda Steina:
I Etap: losujemy mała (pilotażową) próbę wstępną n_o elementową i wyznaczamy dla niej $(\hat{s})^2$
II Etap: Korzystamy ze wzoru

$$n \geq \frac{t_{\alpha,n_0-1}^2 (\hat{s})^2}{d^2} \quad (*)$$

gdzie $t_{\alpha;n_0-1}$ – wartość zmiennej losowej rozkładu t- Studenta o n – 1 stopniach swobody taka, że $P(-t_{\alpha;n_0-1} < t < t_{\alpha;n_0-1}) = 1-\alpha$ (lub równoważnie $P(|t| \geq t_{\alpha;n_0-1}) = \alpha$).

Jeśli minimalna liczebność próby spełnia nierówność $n \leq n_0$, to liczebność próby wstępnej jest wystarczająca.
Jeśli $n > n_0$, to należy dolosować do właściwej próby jeszcze $n - n_0$ elementów.

2. Wskaźnika struktury p:

Populacja generalna ma rozkład dwupunktowy z parametrem p.

a) znamy spodziewany rząd wielkości szacowanej frakcji p (przeprowadzono np. próbę wstępną)

$$n \geq \frac{u_\alpha^2 pq}{d^2} \quad (*)$$

gdzie u_α jest to wartość zmiennej losowej rozkładu N(0,1) taka, że $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$ (lub równoważnie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$).

p – spodziewany rząd wielkości szacowanego wskaźnika struktury, q = 1– p.

b) nie znamy rzędu wielkości szacowanego wskaźnika struktury p, to przyjmujemy za iloczyn pq jego największą wartość 0,25 i stosujemy wzór

$$n \geq \frac{u_\alpha^2}{4d^2}, \ (*)$$

gdzie u_α jest to wartość zmiennej losowej rozkładu N(0,1) taka, że $P(-u_\alpha < U < u_\alpha) = 1-\alpha$ (lub równoważnie $P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$).

9. WERYFIKACJA HIPOTEZ

Hipoteza statystyczna – każde przypuszczenie, co do rozkładu populacji generalnej, jego postaci funkcyjnej (hipotezy nieparametryczne) lub wartości parametrów (hipotezy parametryczne). Prawdziwość tego przypuszczenia jest oceniana na podstawie wyników próby losowej.

Test statystyczny – reguła postępowania, która każdej możliwej próbie przyporządkowuje decyzję przyjęcia lub odrzucenia hipotezy. Oznacza to, że test statystyczny jest regułą rozstrzygającą, jakie wyniki próby pozwalają uznać sprawdzaną hipotezę za prawdziwą, a jakie za fałszywą.

Hipoteza / **Decyzja**	**Prawdziwa**	**Fałszywa**
Przyjąć	**Decyzja prawidłowa**	Błąd II rodzaju
Odrzucić	Błąd I rodzaju	**Decyzja prawidłowa**

α – prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju (poziom istotności)
β – prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju

Istotność testu = prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju = = prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy prawdziwej

Moc testu = 1 – prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju =
= 1 – prawdopodobieństwo przyjęcia hipotezy fałszywej =
= prawdopodobieństwo podjęcia prawidłowej decyzji

Przy weryfikacji hipotez statystycznych najkorzystniejszą sytuacją jest, aby α (prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju) i β (prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju) były jak najmniejsze. Niestety wartości α i β są wzajemnie powiązane. Testy statystyczne, które przy ustalonym α minimalizują β noszą nazwę **testów najmocniejszych**.

Innym rodzajem testów są **testy istotności.** W tym przypadku rozważamy jedynie decyzje o odrzuceniu lub braku podstaw do odrzucenia hipotezy. Zatem rozważamy jedynie możliwość popełnienia błędu I rodzaju. Taki sposób postępowania sprawia, że nie ma problemu z popełnieniem błędu II rodzaju.

Parametryczne testy istotności

I sposób weryfikacji

1. Formułujemy hipotezę zerową H_0 dotyczącą parametru θ populacji X, która podlega weryfikacji (w postaci równości):

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

2. Formułujemy hipotezę alternatywną H_A, będącą zaprzeczeniem hipotezy zerowej. Hipotezę (alternatywną) przyjmiemy, gdy odrzucimy H_0, np.:

a) $H_A : \theta \neq \theta_0$ test dwustronny;

b) $H_A : \theta > \theta_0$ test prawostronny;

c) $H_A : \theta < \theta_0$ test lewostronny.

3. Weryfikacja odbywa się za pomocą statystyki $Z_n(\theta)$ z n-elementowej próby losowej o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa, przy założeniu prawdziwość H_0. Możemy wyznaczyć na podstawie konkretnej próby realizację tej statystyki (wartość liczbową testu) ($z_{obl.}$).

4. Z rozkładu statystyki i na podstawi hipotezy alternatywnej konstruujemy obszar krytyczny OK: $P(Z_n \in OK \mid H_0) = \alpha$,

gdzie α to z góry ustalone małe prawdopodobieństwo nazywane poziomem istotności.

Znamy rozkład prawdopodobieństwa testu $Z_n(\theta_0)$ przy H_0

a) $H_A: \theta \neq \theta_0$ test dwustronny;

Obszar krytyczny OK wyznaczony na podstawie relacji:

$$P(Z_n(\theta_0) \in (-\infty, z_1) \cup (z_2, +\infty)) = \alpha,$$

ma postać:

$$OK = (-\infty, z_1) \cup (z_2, +\infty).$$

b) $H_A: \theta > \theta_0$ test prawostronny;

Obszar krytyczny OK wyznaczony na podstawie relacji:

$$P(Z_n(\theta_0) \in (z_3, +\infty)) = \alpha$$

która ma postać:

$$OK = (z_3, +\infty);$$

c) $H_A: \theta < \theta_0$ test lewostronny;

Obszar krytyczny OK wyznaczony na podstawie relacji:

$$P(Z_n(\theta_0) \in (-\infty, z_4)) = \alpha,$$

która ma postać:

$$OK = (-\infty, z_4).$$

Wartości z_1, z_2, z_3, z_4 nazywamy wartościami krytycznymi, które zależą od przyjętego poziomu istotności α. Do ich wyznaczenia potrzebujemy odpowiednich tablic statystycznych.

5. Jeśli wartość statystyki (wartość liczbowa testu) należy do OK, to na poziomie istotności α odrzucamy H_0 i przyjmujemy H_A.

Jeśli wartość statystyki (wartość liczbowa testu) nie należy do OK mówimy, że nie mamy wystarczających podstaw, aby odrzucić H_0.

II sposób weryfikacji

Trzy pierwsze kroki są identyczne jak w poprzednim sposobie. Otrzymaliśmy zatem realizację $z_{obl.}$ statystyki $Z_n(\theta_0)$.

Wyznaczamy prawdopodobieństwo: $P(Z_n(\theta_0) > |z_{obl.}|) = P$

Obliczenie P jest możliwe praktycznie tylko za pomocą komputera.

Przy teście jednostronnym na poziomie istotności α:

Jeśli $P < \alpha$, to odrzucamy H_0. Jeśli $P > \alpha$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Przy teście obustronnym na poziomie istotności α:

Jeśli $2P < \alpha$, to odrzucamy H_0.

Jeśli $2P > \alpha$, to nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

P (lub 2P) może być interpretowane jako najniższy poziom istotności, przy którym może być jeszcze odrzucona hipoteza zerowa. Z tego względu wielkość tą nazywamy krytycznym poziomem istotności.

Uwaga: W przypadku testów nieparametrycznych postępowanie jest analogiczne, z tym, że poziomem istotności testu jest P.

Do nieparametrycznych testów istotności zaliczamy np:

- **testy losowości** weryfikujące hipotezę, że próba ma charakter losowy;
- **testy niezależności** sprawdzające hipotezę o niezależności dwóch zmiennych losowych;
- **testy zgodności** służące do weryfikacji hipotez o postaci funkcyjnej rozkładu populacji generalnej lub o tym, że dystrybuanty dwóch (lub więcej zmiennych losowych) są identyczne.

Tabela 2. Test istotności dla wartości średniej

<table>
<tr><th>HIPOTEZA</th><th>STATYSTYKA</th><th>TABLICE STATYSTYCZNE</th><th>OBSZAR KRYTYCZNY</th></tr>
<tr><td colspan="4">1. Populacja generalna ma rozkład normalny N(m, σ), σ jest znane.</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m \neq m_0$</td><td rowspan="3">$u = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$</td><td rowspan="3">$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$</td><td>OK = $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}\ m = m_0$
$H_A{:}m < m_0$</td><td>OK = $(-\infty, -u_{2\alpha})$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m > m_0$</td><td>OK = $(u_{2\alpha}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Populacja generalna ma dowolny rozkład, σ jest znane, n > 120</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m \neq m_0$</td><td rowspan="3">$u = \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$</td><td rowspan="3">$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$</td><td>OK = $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}\ m = m_0$
$H_A{:}m < m_0$</td><td>OK = $(-\infty, -u_{2\alpha})$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m > m_0$</td><td>OK = $(u_{2\alpha}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Populacja generalna ma rozkład normalny N(m, σ), σ jest nieznane, n > 30</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m \neq m_0$</td><td rowspan="3">$u = \frac{\bar{x} - m_0}{s}\sqrt{n}$</td><td rowspan="3">$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$</td><td>OK = $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}\ m = m_0$
$H_A{:}m < m_0$</td><td>OK = $(-\infty, -u_{2\alpha})$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m > m_0$</td><td>OK = $(u_{2\alpha}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Populacja generalna ma dowolny rozkład, σ jest nieznane, n > 120</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m \neq m_0$</td><td rowspan="3">$u = \frac{\bar{x} - m_0}{s}\sqrt{n}$</td><td rowspan="3">$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha$</td><td>OK = $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}\ m = m_0$
$H_A{:}m < m_0$</td><td>OK = $(-\infty, -u_{2\alpha})$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m > m_0$</td><td>OK = $(u_{2\alpha}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">5. Populacja generalna ma rozkład normalny N(m, σ), σ jest nieznane, n ≤ 30</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m \neq m_0$</td><td rowspan="3">$t = \frac{\bar{x} - m_0}{s}\sqrt{n-1}$
lub $t = \frac{\bar{x} - m_0}{\hat{s}}\sqrt{n}$</td><td rowspan="3">$P(|t| \geq t_{\alpha,n-1}) = \alpha$</td><td>OK = $(-\infty, -t_{\alpha,n-1}) \cup (t_{\alpha,n-1}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}\ m = m_0$
$H_A{:}m < m_0$</td><td>OK = $(-\infty, -t_{2\alpha,n-1})$</td></tr>
<tr><td>$H_o{:}m = m_0$
$H_A{:}m > m_0$</td><td>OK = $(t_{2\alpha,n-1}, +\infty)$</td></tr>
</table>

Tabela 3. Test istotności dla dwóch średnich

<table>
<tr><th>HIPOTEZA</th><th>STATYSTYKA</th><th>TABLICE STATYSTYCZNE</th><th>OBSZAR KRYTYCZNY</th></tr>
<tr><td colspan="4">1. Obie porównywalne populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 znane</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 \neq m_2$</td><td rowspan="3">$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$</td><td rowspan="3">$P(\lvert U \rvert \geq u_\alpha) = \alpha$</td><td>$OK = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 < m_2$</td><td>$OK = (-\infty, -u_{2\alpha})$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 > m_2$</td><td>$OK = (u_{2\alpha}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">2. Obie porównywalne populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 nieznane, próby duże $n_1 + n_2 - 2 > 30$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 \neq m_2$</td><td rowspan="3">$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$</td><td rowspan="3">$P(\lvert U \rvert \geq u_\alpha) = \alpha$</td><td>$OK = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 < m_2$</td><td>$OK = (-\infty, -u_{2\alpha})$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 > m_2$</td><td>$OK = (u_{2\alpha}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">3. Obie porównywalne populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, σ_1, σ_2 nieznane, próby duże $n_1 + n_2 - 2 > 30$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 \neq m_2$</td><td rowspan="3">$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$</td><td rowspan="3">$P(\lvert U \rvert \geq u_\alpha) = \alpha$</td><td>$OK = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 < m_2$</td><td>$OK = (-\infty, -u_{2\alpha})$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 > m_2$</td><td>$OK = (u_{2\alpha}, +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">4. Obie porównywalne populacje mają rozkłady normalne $N(m_1, \sigma_1)$, $N(m_2, \sigma_2)$, $\sigma_1 = \sigma_2$ ale nieznane, $n_1 + n_2 - 2 \leq 30$</td></tr>
<tr><td>$H_o: m_1 = m_2$
$H_A: m_1 \neq m_2$</td><td>$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(n_1 + n_2 - 2)}}}$</td><td>$P(\lvert t \rvert \geq t_{\alpha, n_1+n_2-2}) = \alpha$</td><td>$OK = (-\infty, -t_{\alpha, n_1+n_2-2}) \cup (t_{\alpha, n_1+n_2-2}, +\infty)$</td></tr>
</table>

$H_o: m_1 = m_2$ $H_A: m_1 < m_2$			$OK = (-\infty, -t_{2\alpha,n_1+n_2-2})$
$H_o: m_1 = m_2$ $H_A: m_1 > m_2$			$OK = (t_{2\alpha,n_1+n_2-2}, +\infty)$

Tabela 4. Test istotności dla wariancji

HIPOTEZA	STATYSTYKA	TABLICE STATYSTYCZNE	OBSZAR KRYTYCZNY
1. Populacja generalna ma rozkład normalny N(m, σ), σ jest nieznane, n $\leq$ 30			
$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_A: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$ $\chi^2 = \frac{(n-1)(\hat{s})^2}{\sigma_0^2}$	$P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}) = \alpha$	$OK = (0, \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}) \cup (\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}, +\infty)$
$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_A: \sigma^2 < \sigma_0^2$			$OK = (0, \chi^2_{1-\alpha,n-1})$
$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_A: \sigma^2 > \sigma_0^2$			$OK = (\chi^2_{\alpha,n-1}, +\infty)$
2. Populacja generalna ma rozkład normalny N(m, σ), σ jest nieznane, n > 30			
$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_A: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$u = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-3}$, gdzie $\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$	$P(\lvert U \rvert \geq u_\alpha) = \alpha$	$OK = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$
$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_A: \sigma^2 < \sigma_0^2$			$OK = (-\infty, -u_{2\alpha})$
$H_o: \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_A: \sigma^2 > \sigma_0^2$			$OK = (u_{2\alpha}, +\infty)$

Tabela 5. Test istotności dla dwóch wariancji

HIPOTEZA	STATYSTYKA	TABLICE STATYSTYCZNE	OBSZAR KRYTYCZNY
Dwie populacje o rozkładach normalnych N(m₁, σ₁), N(m₂, σ₂), m₁, σ₁, m₂, σ₂ nieznane			
$H_o: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_A: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \frac{(\hat{s}_1)^2}{(\hat{s}_2)^2}$	$P(F \geq F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}) = \alpha$	$OK = (F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}, +\infty)$
Uwaga! Przyjmujemy taką numerację obu populacji, aby $(\hat{s}_1)^2 \geq (\hat{s}_2)^2$			

Tabela 6. Test istotności dla wskaźnika struktury

HIPOTEZA	STATYSTYKA	TABLICE STATYSTYCZNE	OBSZAR KRYTYCZNY
Populacja generalna ma rozkład zerojedynkowy z parametrem p (wskaźnik struktury), $n \geq 100$			
$H_o: p = p_0$ $H_A: p \neq p_0$	$u = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$P(\lvert U \rvert \geq u_\alpha) = \alpha$	$OK = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$
$H_o: p = p_0$ $H_A: p < p_0$			$OK = (-\infty, -u_{2\alpha})$
$H_o: p = p_0$ $H_A: p > p_0$			$OK = (u_{2\alpha}, +\infty)$

Tabela 7. Test istotności dla dwóch wskaźników struktury

HIPOTEZA	STATYSTYKA	TABLICE STATYSTYCZNE	OBSZAR KRYTYCZNY
Dwie populacje generalne o rozkładach zerojedynkowych z parametrami p_1, p_2 (wskaźniki struktury), duże próby $n_1, n_2 \geq 100$			
$H_o: p_1 = p_2$ $H_A: p_1 \neq p_2$	$u = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}}$	$P(\lvert U \rvert \geq u_\alpha) = \alpha$	$OK = (-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, +\infty)$
$H_o: p_1 = p_2$ $H_A: p_1 < p_2$			$OK = (-\infty, -u_{2\alpha})$
$H_o: p_1 = p_2$ $H_A: p_1 > p_2$			$OK = (u_{2\alpha}, +\infty)$
gdzie: $\hat{p} = \dfrac{m}{n}$, $\bar{p} = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$, $n = \dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$, $\hat{p}_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$.			

Tabela 8. Test zgodności chi-kwadrat

HIPOTEZA	STATYSTYKA	TABLICE STATYSTYCZNE	OBSZAR KRYTYCZNY
$H_o: F(x) = F_0(x)$ $H_A: F(x) \neq F_0(x)$	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	$P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;r-k-1}) = \alpha$	$OK = (\chi^2_{\alpha,r-k-1}, +\infty)$
F(x) – dystrybuanta rozkładu, **n** – liczebność próby, $\mathbf{n_i}$ – liczebność i-tej klasy, $\mathbf{p_i}$ – prawdopodobieństwo tego, że zmienna badana zmienna losowa przyjmie wartość z i-tej klasy, **r** – liczba klas wartości zmiennej, **k** – liczba parametrów rozkładu, które zostały oszacowane na podstawie rozkładu empirycznego, metodą największej wiarygodności.			

Tabela 9. Test niezależności chi-kwadrat

HIPOTEZA	STATYSTYKA	TABLICE STATYSTYCZNE	OBSZAR KRYTYCZNY
H_o: $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ dla wszystkich par wskaźników i, j, gdzie: i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., k H_A: $p_{ij} \neq p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ dla niektórych par wskaźników i, j, gdzie i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., k	$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}}$	$P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;(r-1)(k-1)}) = \alpha$	OK = $(\chi^2_{\alpha,(r-1)(k-1)}, +\infty)$
p_{ij} – prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z populacji generalnej element będzie należał do i-tej klasy cechy X oraz j-tej klasy cechy Y, $p_{.j}$ – prawdopodobieństwo brzegowe ze względu na cechę Y, pi. – prawdopodobieństwo brzegowe ze względu na cechę X, n – liczebność próby (próba duża). $\hat{n}_{ij} = np_{ij}$ gdzie i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., k			

Literatura

1. Aczel A. D., *Statystyka w zarządzaniu*, PWN, Warszawa 2000.
2. Jóźwiak J., Podgórski J., *Statystyka od podstaw*, PWE, Warszawa 2006.
3. Kassyk-Rokicka H. (red.), *Statystyka. Zbiór zadań*, PWE, Warszawa 1994.
4. Kończak G, Trzpiot G., *Statystyka opisowa i matematyczna z arkuszem kalkulacyjnym EXCEL* Akademia Ekonomiczna im. Karola Adamieckiego w Katowicach, 2008.
5. Kukuła K., *Elementy statystyki w zadaniach*, WN PWN, Warszawa 2007.
6. Krysicki W., Bartos J., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, cz. 1, PWN, Warszawa 2007.
7. Krysicki W., Bartos J., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, cz. 2, PWN, Warszawa 2006.
8. Luszniewicz A., *Statystyka nie jest trudna. Metody wnioskowania statystycznego*, PWE, Warszawa 1994.
9. Ostasiewicz S., Rusnak Z., Siedlecka U., *Statystyka. Elementy teorii i zadania*, Wyd. AE, Wrocław 1995.
10. Pułaska-Turyna B., *Statystyka dla ekonomistów*, Warszawa, Centrum Doradztwa i Informacji DIFIN, 2008.
11. Roszkowska E., *Elementy rachunku prawdopodobieństwa dla ekonomistów*, Wyd. UwB, Białystok 2003.
12. Sobczyk M., *Statystyka,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
13. Sobczyk M., *Statystyka. Podstawy teoretyczne. Przykłady – zadania*, Wyd. UMCS, Lublin 2000.
14. Zając K., *Zarys metod statystycznych*, PWE, Warszawa 1982.

Odpowiedzi na pytania

Rozdział 1

1.1.a, 1.2.b, 1.3.a, 1.4.b, 1.5.c, 1.6.d, 1.7.a, 1.8.a, 1.9.b, 1.10.c, 1.11.d, 1.12.a, 1.13.b, 1.14.a, 1.15.c, 1.16.d, 1.17.a, 1.18.c, 1.19.c, 1.20.c, 1.21.b, 1.22.b, 1.23.c, 1.24.c, 1.25.a, 1.26.a, 1.27.a, 1.28.d, 1.29.b, 1.30.a, 1.31.b, 1.32.a, 1.33.a, 1.34.a, 1.35.a, 1.36.a, 1.37.a, 1.38.b, 1.39.a, 1.40.c, 1.41.b, 1.42.a, 1.43.d, 1.44.a, 1.45.c, 1.46.c, 1.47.d, 1.48.c, 1.49.c, 1.50.b, 1.51.b, 1.52.b, 1.53.a, 1.54.c, 1.55.c, 1.56.b, 1.57.a, 1.58.d, 1.59.a, 1.60.d, 1.61.c, 1.62.a, 1.63.c, 1.64.b, 1.65.c, 1.66.b, 1.67.b, 1.68.c, 1.69.d.

Rozdział 2

2.1.a, 2.2.d, 2.3.d, 2.4.d, 2.5.d, 2.6.a, 2.7.d, 2.8.d, 2.9.b, 2.10.d, 2.11.b, 2.12.d, 2.13.d, 2.14.c, 2.15.a, 2.16.c, 2.17.a, 2.18.b, 2.19.a, 2.20.d, 2.21.b, 2.22.a, 2.23.c, 2.24.b, 2.25.a, 2.26.b, 2.27.d, 2.28.b, 2.29.a, 2.30.a, 2.31.a, 2.32.b, 2.33.c, 2.34.b, 2.35.b, 2.36.a, 2.37.b, 2.38.b, 2.39.b, 2.40.b, 2.41.c, 2.42.a, 2.43.b, 2.44.b, 2.45.b, 2.46.a.

Rozdział 3

3.1.d, 3.2.b, 3.3.b, 3.4.a, 3.5.a, 3.6.a, 3.7.c, 3.8.d, 3.9.c, 3.10.a, 3.11.b, 3.12.c, 3.13.d, 3.14.b, 3.15.b, 3.16.a, 3.17.d, 3.18.c, 3.19.b, 3.20.b, 3.21.b, 3.22.b, 3.23.c, 3.24.b, 3.25.d, 3.26.a, 3.27.b, 3.28.b, 3.29.c, 3.30.c, 3.31.c, 3.32.a, 3.33.b, 3.34.a, 3.35.b, 3.36.b, 3.37.a, 3.38.b, 3.39a, 3.40.c, 3.41.a, 3.42.b, 3.43.c, 3.44.c, 3.45.b, 3.46.b, 3.47.a, 3.48.c, 3.49.a, 3.50.c, 3.51.c, 3.52.b, 3.53.b, 3.54.c.

Rozdział 4

4.1.d, 4.2.a, 4.3.a, 4.4.b, 4.5.c, 4.6.d, 4.7.d, 4.8.a, 4.9.b, 4.10.a, 4.11.c, 4.12.b, 4.13.d, 4.14.d, 4.15.a, 4.16.d, 4.17.a, 4.18.b, 4.19.b, 4.20.c, 4.21.d,
4.22.c, 4.23.a, 4.24.c, 4.25.b, 4.26.c, 4.27.b, 4.28.b, 4.29.c, 4.30.c, 4.31.a, 4.32.a, 4.33.b, 4.34.b, 4.35.c, 4.36.a, 4.37.c, 4.38.c, 4.39.b, 4.40.a, 4.41.b, 4.42.b, 4.43.a, 4.44.a, 4.45.c, 4.46.b, 4.47.a, 4.48.d, 4.49.b, 4.50.c, 4.51.d, 4.52.c, 4.53.a, 4.54.c, 4.55.d, 4.56.a, 4.57.c, 4.58.a, 4.59.c, 4.60.b, 4.61.c.

Rozdział 5

5.1.b, 5.2.c, 5.3.b, 5.4.b, 5.5.a, 5.6.b, 5.7.c, 5.8.a, 5.9.b, 5.10.c, 5.11.a, 5.12.d, 5.13.a, 5.14.a, 5.15.a, 5.16.b, 5.17.c, 5.18.d, 5.19.a, 5.20.b, 5.21.a, 5.22.b, 5.23.b, 5.24.b, 5.25.a, 5.26.a, 5.27.b, 5.28.d, 5.29.b, 5.30.d, 5.31.c, 5.32.b, 5.33.c, 5.34.b, 5.35.b, 5.36.b, 5.37.c, 5.38.b, 5.39.c, 5.4 0.a, 5.41.a, 5.42.b, 5.43.c, 5.44.d, 5.45.b, 5.46.c, 5.47.c, 5.48.a, 5.49.b, 5.50.a,5.51 a, 5.52. b, 5,53. c, 5.54. d.

Rozdział 6

6.1.a, 6.2.c, 6.3.c, 6.4.b, 6.5.a, 6.6.a, 6.7. a, 6.8.c, 6.9.b, 6.10.c, 6.11.a, 6.12.b.

Rozdział 7

7.1.a, 7.2.c, 7.3.c, 7.4.b, 7.5.a, 7.6.a, 7.7.a, 7.8.b, 7.9.a, 7.10.c, 7.11.a, 7.12.b, 7.13.a, 7.14.a, 7.15.a, 7.16.a, 7.17.b, 7.18.b, 7.19.a, 7.20.b, 7.21.a, 7.22.c, 7.23.c, 7.24.c, 7.25.b, 7.26.c, 7.27.c, 7.28.b, 7.29.c, 7.30.c, 7.31.b, 7.32.b, 7.33.c, 7.34.b, 7.35.a, 7.36.d, 7.37.b, 7.38.d.

Rozdział 8

8.1.b, 8.2.b, 8.3.a, 8.4.d, 8.5.b, 8.6.d, 8.7.c, 8.8.a, 8.9.b, 8.10.a, 8.11.c, 8.12.c, 8.13.b, 8.14.a, 8.15.c, 8.16.c, 8.17.b, 8.18.a, 8.19.c, 8.20.a, 8.21. b, 8.22.a, 8.23.b, 8.24.c, 8.25.a, 8.26.a, 8.27.a, 8.28.b, 8.29.c, 8.30.b, 8.31.c, 8.32.b, 8.33.b, 8.34.a, 8.35.b, 8.36.b, 8.37.a, 8.38.c, 8.39.a, 8.40.a, 8.41.c, 8.42.b, 8.43.a, 8.44.c, 8.45.a, 8.46.b, 8.47.a, 8.48.a, 8.49.b, 8.50.a, 8.51.a, 8.52.b.

Rozdział 9

9.1.a, 9.2.d, 9.3.d, 9.4.a, 9.5.b, 9.6.a, 9.7.b, 9.8.b, 9.9.d, 9.10.d, 9.11.d, 9.12.a, 9.13.b, 9.14.a, 9.15.b, 9.16.d, 9.17.d, 9.18.a, 9.19.a, 9.20.d, 9.21.d, 9.22.c, 9.23.c, 9.24.c, 9.25.a, 9.26.b, 9.27.b, 9.28.c, 9.29.a, 9.30.a, 9.31.b, 9.32.c, 9.33.b, 9.34.a, 9.35.a, 9.36.a, 9.37.a, 9.38.b, 9.39.b, 9.40.c, 9.41.a, 9.42.a, 9.43.a, 9.44.c, 9.45.c, 9.46.b, 9.47.a, 9.48.a, 9.49.a, 9.50.c, 9.51.a, 9.52.a, 9.53.b, 9.54.b, 9.55.a, 9.56.a, 9.57.b, 9.58.b, 9.59.c, 9.60.a, 9.61.a, 9.62.a, 9.63.c, 9.64.a, 9.65.a, 9.66.b, 9.67.b, 9.68.a, 9.69.a, 9.70.a, 9.71.b, 9.72.b, 9.73.b, 9.74.b, 9.75.c, 9.76.b, 9.77.b, 9.78.c, 9.79.a, 9.80.b, 9.81.c, 9.82.b, 9.83.b, 9.84.c, 9.85.b, 9.86.d, 9.87.b, 9.88.a, 9.89.c, 9.90.b, 9.91.d, 9.92.b, 9.93.b, 9.94.c, 9.95.b, 9.96.d, 9.97.a, 9.98.d, 9.99.d, 9.100.a, 9.101.c, 9.102.c, 9.103.d, 9.104.d, 9.105.a, 9.106.d, 9.107.b, 9.108.c.

TABLICE STATYSTYCZNE

SPIS TABLIC:

Tablica 1. *Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego* $\Phi(\mathrm{u}) = \mathrm{P}(\mathrm{U} \le \mathrm{u})$ dla $\mathrm{u} \ge 0$.
Dla $\mathrm{u} < 0$ *wartości dystrybuanty* $\Phi(\mathrm{u})$ *obliczamy korzystając ze wzoru* $\Phi(\mathrm{u}) = 1 - \Phi(-\mathrm{u})$.

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	u
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511967	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	**0,0**
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	**0,1**
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	**0,2**
0,3	0,617911	0,621719	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	**0,3**
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	**0,4**
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705402	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	**0,5**
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	**0,6**
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	**0,7**
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802338	0,805106	0,807850	0,810570	0,813267	**0,8**
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	**0,9**
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	**1,0**
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,878999	0,881000	0,882977	**1,1**
1,2	0,884930	0,886860	0,888767	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	**1,2**
1,3	0,903199	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914656	0,916207	0,917736	**1,3**
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	**1,4**
1,5	0,933193	0,934478	0,935744	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	**1,5**
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	**1,6**
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959071	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	**1,7**
1,8	0,964070	0,964852	0,965621	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	**1,8**
1,9	0,971284	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	**1,9**
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	**2,0**
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	**2,1**
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	**2,2**
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	**2,3**
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	**2,4**
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	**2,5**
2,6	0,995339	0,995473	0,995603	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	**2,6**
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	**2,7**
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	**2,8**
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	**2,9**
3,0	0,998650	0,998694	0,998736	0,998777	0,998817	0,998856	0,998893	0,998930	0,998965	0,998999	**3,0**
3,1	0,999032	0,999064	0,999096	0,999126	0,999155	0,999184	0,999211	0,999238	0,999264	0,999289	**3,1**
3,2	0,999313	0,999336	0,999359	0,999381	0,999402	0,999423	0,999443	0,999462	0,999481	0,999499	**3,2**
3,3	0,999517	0,999533	0,999550	0,999566	0,999581	0,999596	0,999610	0,999624	0,999638	0,999650	**3,3**
3,4	0,999663	0,999675	0,999687	0,999698	0,999709	0,999720	0,999730	0,999740	0,999749	0,999758	**3,4**
3,5	0,999767	0,999776	0,999784	0,999792	0,999800	0,999807	0,999815	0,999821	0,999828	0,999835	**3,5**
3,6	0,999841	0,999847	0,999853	0,999858	0,999864	0,999869	0,999874	0,999879	0,999883	0,999888	**3,6**
3,7	0,999892	0,999896	0,999900	0,999904	0,999908	0,999912	0,999915	0,999918	0,999922	0,999925	**3,7**
3,8	0,999928	0,999930	0,999933	0,999936	0,999938	0,999941	0,999943	0,999946	0,999948	0,999950	**3,8**
3,9	0,999952	0,999954	0,999956	0,999958	0,999959	0,999961	0,999963	0,999964	0,999966	0,999967	**3,9**
4,0	0,999968	0,999970	0,999971	0,999972	0,999973	0,999974	0,999975	0,999976	0,999977	0,999978	**4,0**

Tablica 2. *Rozkład normalny* $P(|U| \geq u_{\alpha}) = \alpha$

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	α
0,0	∞	2,575835	2,326342	2,170091	2,053748	1,959964	1,880790	1,811914	1,750686	1,695398	**0,0**
0,1	1,644853	1,598191	1,554772	1,514104	1,475792	1,439530	1,405074	1,372205	1,340754	1,310580	**0,1**
0,2	1,281551	1,253566	1,226529	1,200360	1,174988	1,150349	1,126391	1,103062	1,080321	1,058122	**0,2**
0,3	1,036433	1,015221	0,994457	0,974114	0,954165	0,934590	0,915365	0,896473	0,877897	0,859618	**0,3**
0,4	0,841621	0,823893	0,806422	0,789191	0,772193	0,755415	0,738846	0,722479	0,706302	0,690309	**0,4**
0,5	0,674490	0,658838	0,643345	0,628006	0,612813	0,597761	0,582841	0,568052	0,553384	0,538836	**0,5**
0,6	0,524401	0,510074	0,495850	0,481728	0,467699	0,453763	0,439913	0,426148	0,412463	0,398855	**0,6**
0,7	0,385321	0,371856	0,358459	0,345126	0,331854	0,318639	0,305481	0,292375	0,279319	0,266311	**0,7**
0,8	0,253347	0,240426	0,227545	0,214702	0,201894	0,189118	0,176374	0,163659	0,150969	0,138305	**0,8**
0,9	0,125661	0,113039	0,100433	0,087845	0,075270	0,062706	0,050154	0,037608	0,025069	0,012533	**0,9**

Tablica 3. *Rozkład t-Studenta* $P(|t| \geq t_{\alpha,s}) = \alpha$

s \ α	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001	α / s
1	0,079	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	25,452	31,821	63,656	127,321	636,578	**1**
2	0,071	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	31,600	**2**
3	0,068	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	12,924	**3**
4	0,067	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,598	8,610	**4**
5	0,066	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	6,869	**5**
6	0,065	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	5,959	**6**
7	0,065	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	5,408	**7**
8	0,065	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	5,041	**8**
9	0,064	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,685	2,821	3,250	3,690	4,781	**9**
10	0,064	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	4,587	**10**
11	0,064	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,593	2,718	3,106	3,497	4,437	**11**
12	0,064	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,560	2,681	3,055	3,428	4,318	**12**
13	0,064	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,533	2,650	3,012	3,372	4,221	**13**
14	0,064	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,510	2,624	2,977	3,326	4,140	**14**
15	0,064	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,490	2,602	2,947	3,286	4,073	**15**
16	0,064	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,473	2,583	2,921	3,252	4,015	**16**
17	0,064	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,458	2,567	2,898	3,222	3,965	**17**
18	0,064	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,197	3,922	**18**
19	0,064	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,433	2,539	2,861	3,174	3,883	**19**
20	0,063	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,850	**20**
21	0,063	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,414	2,518	2,831	3,135	3,819	**21**
22	0,063	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,792	**22**
23	0,063	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,398	2,500	2,807	3,104	3,768	**23**
24	0,063	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,091	3,745	**24**
25	0,063	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,385	2,485	2,787	3,078	3,725	**25**
26	0,063	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,707	**26**
27	0,063	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,373	2,473	2,771	3,057	3,689	**27**
28	0,063	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,368	2,467	2,763	3,047	3,674	**28**
29	0,063	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,364	2,462	2,756	3,038	3,660	**29**
30	0,063	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,360	2,457	2,750	3,030	3,646	**30**
40	0,063	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,329	2,423	2,704	2,971	3,551	**40**
60	0,063	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,299	2,390	2,660	2,915	3,460	**60**
120	0,063	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,270	2,358	2,617	2,860	3,373	**120**
∞	0,063	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,290	∞

Tablica 4. *Rozkład chi-kwadrat* $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha,s}) = \alpha$

s \ α	0,99	0,98	0,95	0,9	0,8	0,7	0,5	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001	α / s
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827	**1**
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815	**2**
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266	**3**
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,466	**4**
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515	**5**
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457	**6**
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,321	**7**
8	1,647	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,124	**8**
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877	**9**
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588	**10**
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264	**11**
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909	**12**
13	4,107	4,765	5,892	7,041	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,471	27,688	34,527	**13**
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,124	**14**
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,698	**15**
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252	**16**
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,791	**17**
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312	**18**
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,819	**19**
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,314	**20**
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,796	**21**
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268	**22**
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728	**23**
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179	**24**
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,619	**25**
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,051	**26**
27	12,878	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,475	**27**
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,892	**28**
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,301	**29**
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,702	**30**

Tablica 5. *Rozkład F-Snedecora* $P(F \geq F_{0,01;s_1;s_2}) = 0,01, \quad \alpha = 0,01$

$s_2 \backslash s_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
1	4052,18	4999,34	5403,53	5624,26	5763,96	5858,95	5928,33	5980,95	6022,40	6055,93	6106,68	6143,00	6170,01	6191,43	6208,66
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,42	99,43	99,44	99,44	99,45
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05	26,92	26,83	26,75	26,69
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37	14,25	14,15	14,08	14,02
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89	9,77	9,68	9,61	9,55
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72	7,60	7,52	7,45	7,40
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47	6,36	6,28	6,21	6,16
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67	5,56	5,48	5,41	5,36
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11	5,01	4,92	4,86	4,81
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71	4,60	4,52	4,46	4,41
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40	4,29	4,21	4,15	4,10
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16	4,05	3,97	3,91	3,86
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96	3,86	3,78	3,72	3,66
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80	3,70	3,62	3,56	3,51
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67	3,56	3,49	3,42	3,37
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55	3,45	3,37	3,31	3,26
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46	3,35	3,27	3,21	3,16
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37	3,27	3,19	3,13	3,08
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30	3,19	3,12	3,05	3,00
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23	3,13	3,05	2,99	2,94
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17	3,07	2,99	2,93	2,88
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12	3,02	2,94	2,88	2,83
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07	2,97	2,89	2,83	2,78
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03	2,93	2,85	2,79	2,74
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99	2,89	2,81	2,75	2,70
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96	2,86	2,78	2,72	2,66
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93	2,82	2,75	2,68	2,63
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90	2,79	2,72	2,65	2,60
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87	2,77	2,69	2,63	2,57
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84	2,74	2,66	2,60	2,55
31	7,53	5,36	4,48	3,99	3,67	3,45	3,28	3,15	3,04	2,96	2,82	2,72	2,64	2,58	2,52
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,80	2,70	2,62	2,55	2,50
33	7,47	5,31	4,44	3,95	3,63	3,41	3,24	3,11	3,00	2,91	2,78	2,68	2,60	2,53	2,48
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,76	2,66	2,58	2,51	2,46
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,74	2,64	2,56	2,50	2,44
36	7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,72	2,62	2,54	2,48	2,43
37	7,37	5,23	4,36	3,87	3,56	3,33	3,17	3,04	2,93	2,84	2,71	2,61	2,53	2,46	2,41
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,69	2,59	2,51	2,45	2,40
39	7,33	5,19	4,33	3,84	3,53	3,30	3,14	3,01	2,90	2,81	2,68	2,58	2,50	2,43	2,38
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66	2,56	2,48	2,42	2,37
42	7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97	2,86	2,78	2,64	2,54	2,46	2,40	2,34
44	7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95	2,84	2,75	2,62	2,52	2,44	2,37	2,32
46	7,22	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,06	2,93	2,82	2,73	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,56	2,46	2,38	2,32	2,27
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50	2,39	2,31	2,25	2,20
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,42	2,31	2,23	2,17	2,12
10	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,37	2,27	2,19	2,12	2,07
12	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,66	2,55	2,47	2,33	2,23	2,15	2,08	2,03
15	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44	2,31	2,20	2,12	2,06	2,00
20	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,27	2,17	2,09	2,03	1,97
30	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,24	2,14	2,06	1,99	1,94
50	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,22	2,12	2,04	1,97	1,92
10	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,20	2,10	2,02	1,95	1,90
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18	2,08	2,00	1,93	1,88

Tablica 5. *c.d.*

s_2 \ s_1	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
1	6223,10	6234,27	6244,52	6252,90	6260,35	6275,25	6286,43	6295,74	6302,26	6312,97	6326,47	6333,92	6349,76	6359,54	6365,59
2	99,46	99,46	99,46	99,46	99,47	99,47	99,48	99,48	99,48	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50	99,50
3	26,64	26,60	26,56	26,53	26,50	26,45	26,41	26,38	26,35	26,32	26,27	26,24	26,18	26,15	26,13
4	13,97	13,93	13,89	13,86	13,84	13,79	13,75	13,71	13,69	13,65	13,61	13,58	13,52	13,49	13,46
5	9,51	9,47	9,43	9,40	9,38	9,33	9,29	9,26	9,24	9,20	9,16	9,13	9,08	9,04	9,02
6	7,35	7,31	7,28	7,25	7,23	7,18	7,14	7,11	7,09	7,06	7,01	6,99	6,93	6,90	6,88
7	6,11	6,07	6,04	6,02	5,99	5,94	5,91	5,88	5,86	5,82	5,78	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,32	5,28	5,25	5,22	5,20	5,15	5,12	5,09	5,07	5,03	4,99	4,96	4,91	4,88	4,86
9	4,77	4,73	4,70	4,67	4,65	4,60	4,57	4,54	4,52	4,48	4,44	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,36	4,33	4,30	4,27	4,25	4,20	4,17	4,14	4,12	4,08	4,04	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,06	4,02	3,99	3,96	3,94	3,89	3,86	3,83	3,81	3,78	3,73	3,71	3,66	3,62	3,60
12	3,82	3,78	3,75	3,72	3,70	3,65	3,62	3,59	3,57	3,54	3,49	3,47	3,41	3,38	3,36
13	3,62	3,59	3,56	3,53	3,51	3,46	3,43	3,40	3,38	3,34	3,30	3,27	3,22	3,19	3,17
14	3,46	3,43	3,40	3,37	3,35	3,30	3,27	3,24	3,22	3,18	3,14	3,11	3,06	3,03	3,00
15	3,33	3,29	3,26	3,24	3,21	3,17	3,13	3,10	3,08	3,05	3,00	2,98	2,92	2,89	2,87
16	3,22	3,18	3,15	3,12	3,10	3,05	3,02	2,99	2,97	2,93	2,89	2,86	2,81	2,78	2,75
17	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,96	2,92	2,89	2,87	2,83	2,79	2,76	2,71	2,68	2,65
18	3,03	3,00	2,97	2,94	2,92	2,87	2,84	2,81	2,78	2,75	2,70	2,68	2,62	2,59	2,57
19	2,96	2,92	2,89	2,87	2,84	2,80	2,76	2,73	2,71	2,67	2,63	2,60	2,55	2,51	2,49
20	2,90	2,86	2,83	2,80	2,78	2,73	2,69	2,67	2,64	2,61	2,56	2,54	2,48	2,44	2,42
21	2,84	2,80	2,77	2,74	2,72	2,67	2,64	2,61	2,58	2,55	2,50	2,48	2,42	2,38	2,36
22	2,78	2,75	2,72	2,69	2,67	2,62	2,58	2,55	2,53	2,50	2,45	2,42	2,36	2,33	2,31
23	2,74	2,70	2,67	2,64	2,62	2,57	2,54	2,51	2,48	2,45	2,40	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,70	2,66	2,63	2,60	2,58	2,53	2,49	2,46	2,44	2,40	2,36	2,33	2,27	2,24	2,21
25	2,66	2,62	2,59	2,56	2,54	2,49	2,45	2,42	2,40	2,36	2,32	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,62	2,58	2,55	2,53	2,50	2,45	2,42	2,39	2,36	2,33	2,28	2,25	2,19	2,16	2,13
27	2,59	2,55	2,52	2,49	2,47	2,42	2,38	2,35	2,33	2,29	2,25	2,22	2,16	2,12	2,10
28	2,56	2,52	2,49	2,46	2,44	2,39	2,35	2,32	2,30	2,26	2,22	2,19	2,13	2,09	2,06
29	2,53	2,49	2,46	2,44	2,41	2,36	2,33	2,30	2,27	2,23	2,19	2,16	2,10	2,06	2,03
30	2,51	2,47	2,44	2,41	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,16	2,13	2,07	2,03	2,01
31	2,48	2,45	2,41	2,39	2,36	2,31	2,27	2,24	2,22	2,18	2,14	2,11	2,04	2,01	1,98
32	2,46	2,42	2,39	2,36	2,34	2,29	2,25	2,22	2,20	2,16	2,11	2,08	2,02	1,98	1,96
33	2,44	2,40	2,37	2,34	2,32	2,27	2,23	2,20	2,18	2,14	2,09	2,06	2,00	1,96	1,93
34	2,42	2,38	2,35	2,32	2,30	2,25	2,21	2,18	2,16	2,12	2,07	2,04	1,98	1,94	1,91
35	2,40	2,36	2,33	2,30	2,28	2,23	2,19	2,16	2,14	2,10	2,05	2,02	1,96	1,92	1,89
36	2,38	2,35	2,32	2,29	2,26	2,21	2,18	2,14	2,12	2,08	2,03	2,00	1,94	1,90	1,87
37	2,37	2,33	2,30	2,27	2,25	2,20	2,16	2,13	2,10	2,06	2,02	1,98	1,92	1,88	1,85
38	2,35	2,32	2,28	2,26	2,23	2,18	2,14	2,11	2,09	2,05	2,00	1,97	1,90	1,86	1,84
39	2,34	2,30	2,27	2,24	2,22	2,17	2,13	2,10	2,07	2,03	1,98	1,95	1,89	1,85	1,82
40	2,33	2,29	2,26	2,23	2,20	2,15	2,11	2,08	2,06	2,02	1,97	1,94	1,87	1,83	1,80
42	2,30	2,26	2,23	2,20	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,91	1,85	1,80	1,78
44	2,28	2,24	2,21	2,18	2,15	2,10	2,07	2,03	2,01	1,97	1,92	1,89	1,82	1,78	1,75
46	2,26	2,22	2,19	2,16	2,13	2,08	2,04	2,01	1,99	1,95	1,90	1,86	1,80	1,76	1,73
50	2,22	2,18	2,15	2,12	2,10	2,05	2,01	1,97	1,95	1,91	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68
60	2,15	2,12	2,08	2,05	2,03	1,98	1,94	1,90	1,88	1,84	1,78	1,75	1,68	1,63	1,60
80	2,07	2,03	2,00	1,97	1,94	1,89	1,85	1,82	1,79	1,75	1,69	1,65	1,58	1,53	1,49
10	2,02	1,98	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,76	1,74	1,69	1,63	1,60	1,52	1,47	1,43
12	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,80	1,76	1,72	1,69	1,65	1,59	1,55	1,47	1,41	1,37
15	1,96	1,92	1,88	1,85	1,83	1,77	1,73	1,69	1,66	1,62	1,56	1,52	1,43	1,38	1,33
20	1,93	1,89	1,85	1,82	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,58	1,52	1,48	1,39	1,33	1,28
30	1,89	1,85	1,82	1,79	1,76	1,70	1,66	1,62	1,59	1,55	1,48	1,44	1,35	1,28	1,22
50	1,87	1,83	1,79	1,76	1,74	1,68	1,63	1,60	1,57	1,52	1,45	1,41	1,31	1,23	1,16
10	1,85	1,81	1,77	1,74	1,72	1,66	1,61	1,58	1,54	1,50	1,43	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	1,83	1,79	1,76	1,72	1,70	1,64	1,59	1,55	1,52	1,47	1,40	1,36	1,25	1,15	1,01

Tablica 6. *Rozkład F-Snedecora* $P(F \geq F_{0,05;s_1;s_2}) = 0,05, \quad \alpha = 0,05$

s_2 \ s_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,90	245,36	246,47	247,32	248,02
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,42	19,43	19,44	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,71	8,69	8,67	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,87	5,84	5,82	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,64	4,60	4,58	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,96	3,92	3,90	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,53	3,49	3,47	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,24	3,20	3,17	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,03	2,99	2,96	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,86	2,83	2,80	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,74	2,70	2,67	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,64	2,60	2,57	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,55	2,51	2,48	2,46
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,48	2,44	2,41	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,42	2,38	2,35	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,37	2,33	2,30	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,33	2,29	2,26	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,29	2,25	2,22	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,26	2,21	2,18	2,16
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,22	2,18	2,15	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,20	2,16	2,12	2,10
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,17	2,13	2,10	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,13	2,09	2,05	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,09	2,05	2,02	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,97
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,06	2,02	1,99	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,04	1,99	1,96	1,93
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,08	2,03	1,98	1,95	1,92
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,07	2,01	1,97	1,94	1,91
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,06	2,00	1,96	1,93	1,90
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,04	1,99	1,94	1,91	1,88
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,03	1,98	1,93	1,90	1,87
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,02	1,96	1,92	1,88	1,85
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,01	1,95	1,91	1,88	1,85
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,95	1,90	1,87	1,84
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	1,99	1,94	1,89	1,86	1,83
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	1,98	1,92	1,88	1,84	1,81
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	1,97	1,91	1,87	1,83	1,80
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,89	1,85	1,81	1,78
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,86	1,82	1,78	1,75
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88	1,82	1,77	1,73	1,70
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,79	1,75	1,71	1,68
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,83	1,77	1,73	1,69	1,66
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,82	1,76	1,71	1,67	1,64
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,80	1,74	1,69	1,66	1,62
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,78	1,72	1,68	1,64	1,61
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,77	1,71	1,66	1,62	1,59
100	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,76	1,70	1,65	1,61	1,58
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,69	1,64	1,60	1,57

Tablica 6. *c.d.*

s_2 \ s_1	22	24	26	28	30	35	40	45	50	60	80	100	200	500	∞
1	248,58	249,05	249,45	249,80	250,10	250,69	251,14	251,49	251,77	252,20	252,72	253,04	253,68	254,06	254,31
2	19,45	19,45	19,46	19,46	19,46	19,47	19,47	19,47	19,48	19,48	19,48	19,49	19,49	19,49	19,50
3	8,65	8,64	8,63	8,62	8,62	8,60	8,59	8,59	8,58	8,57	8,56	8,55	8,54	8,53	8,53
4	5,79	5,77	5,76	5,75	5,75	5,73	5,72	5,71	5,70	5,69	5,67	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,54	4,53	4,52	4,50	4,50	4,48	4,46	4,45	4,44	4,43	4,41	4,41	4,39	4,37	4,37
6	3,86	3,84	3,83	3,82	3,81	3,79	3,77	3,76	3,75	3,74	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,43	3,41	3,40	3,39	3,38	3,36	3,34	3,33	3,32	3,30	3,29	3,27	3,25	3,24	3,23
8	3,13	3,12	3,10	3,09	3,08	3,06	3,04	3,03	3,02	3,01	2,99	2,97	2,95	2,94	2,93
9	2,92	2,90	2,89	2,87	2,86	2,84	2,83	2,81	2,80	2,79	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,75	2,74	2,72	2,71	2,70	2,68	2,66	2,65	2,64	2,62	2,60	2,59	2,56	2,55	2,54
11	2,63	2,61	2,59	2,58	2,57	2,55	2,53	2,52	2,51	2,49	2,47	2,46	2,43	2,42	2,40
12	2,52	2,51	2,49	2,48	2,47	2,44	2,43	2,41	2,40	2,38	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30
13	2,44	2,42	2,41	2,39	2,38	2,36	2,34	2,33	2,31	2,30	2,27	2,26	2,23	2,22	2,21
14	2,37	2,35	2,33	2,32	2,31	2,28	2,27	2,25	2,24	2,22	2,20	2,19	2,16	2,14	2,13
15	2,31	2,29	2,27	2,26	2,25	2,22	2,20	2,19	2,18	2,16	2,14	2,12	2,10	2,08	2,07
16	2,25	2,24	2,22	2,21	2,19	2,17	2,15	2,14	2,12	2,11	2,08	2,07	2,04	2,02	2,01
17	2,21	2,19	2,17	2,16	2,15	2,12	2,10	2,09	2,08	2,06	2,03	2,02	1,99	1,97	1,96
18	2,17	2,15	2,13	2,12	2,11	2,08	2,06	2,05	2,04	2,02	1,99	1,98	1,95	1,93	1,92
19	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07	2,05	2,03	2,01	2,00	1,98	1,96	1,94	1,91	1,89	1,88
20	2,10	2,08	2,07	2,05	2,04	2,01	1,99	1,98	1,97	1,95	1,92	1,91	1,88	1,86	1,84
21	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	1,98	1,96	1,95	1,94	1,92	1,89	1,88	1,84	1,83	1,81
22	2,05	2,03	2,01	2,00	1,98	1,96	1,94	1,92	1,91	1,89	1,86	1,85	1,82	1,80	1,78
23	2,02	2,01	1,99	1,97	1,96	1,93	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
24	2,00	1,98	1,97	1,95	1,94	1,91	1,89	1,88	1,86	1,84	1,82	1,80	1,77	1,75	1,73
25	1,98	1,96	1,95	1,93	1,92	1,89	1,87	1,86	1,84	1,82	1,80	1,78	1,75	1,73	1,71
26	1,97	1,95	1,93	1,91	1,90	1,87	1,85	1,84	1,82	1,80	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69
27	1,95	1,93	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84	1,82	1,81	1,79	1,76	1,74	1,71	1,69	1,67
28	1,93	1,91	1,90	1,88	1,87	1,84	1,82	1,80	1,79	1,77	1,74	1,73	1,69	1,67	1,65
29	1,92	1,90	1,88	1,87	1,85	1,83	1,81	1,79	1,77	1,75	1,73	1,71	1,67	1,65	1,64
30	1,91	1,89	1,87	1,85	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76	1,74	1,71	1,70	1,66	1,64	1,62
31	1,90	1,88	1,86	1,84	1,83	1,80	1,78	1,76	1,75	1,73	1,70	1,68	1,65	1,62	1,61
32	1,88	1,86	1,85	1,83	1,82	1,79	1,77	1,75	1,74	1,71	1,69	1,67	1,63	1,61	1,59
33	1,87	1,85	1,83	1,82	1,81	1,78	1,76	1,74	1,72	1,70	1,67	1,66	1,62	1,60	1,58
34	1,86	1,84	1,82	1,81	1,80	1,77	1,75	1,73	1,71	1,69	1,66	1,65	1,61	1,59	1,57
35	1,85	1,83	1,82	1,80	1,79	1,76	1,74	1,72	1,70	1,68	1,65	1,63	1,60	1,57	1,56
36	1,85	1,82	1,81	1,79	1,78	1,75	1,73	1,71	1,69	1,67	1,64	1,62	1,59	1,56	1,55
37	1,84	1,82	1,80	1,78	1,77	1,74	1,72	1,70	1,68	1,66	1,63	1,62	1,58	1,55	1,54
38	1,83	1,81	1,79	1,77	1,76	1,73	1,71	1,69	1,68	1,65	1,62	1,61	1,57	1,54	1,53
39	1,82	1,80	1,78	1,77	1,75	1,72	1,70	1,68	1,67	1,65	1,62	1,60	1,56	1,53	1,52
40	1,81	1,79	1,77	1,76	1,74	1,72	1,69	1,67	1,66	1,64	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
42	1,80	1,78	1,76	1,75	1,73	1,70	1,68	1,66	1,65	1,62	1,59	1,57	1,53	1,51	1,49
44	1,79	1,77	1,75	1,73	1,72	1,69	1,67	1,65	1,63	1,61	1,58	1,56	1,52	1,49	1,48
46	1,78	1,76	1,74	1,72	1,71	1,68	1,65	1,64	1,62	1,60	1,57	1,55	1,51	1,48	1,46
50	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,66	1,63	1,61	1,60	1,58	1,54	1,52	1,48	1,46	1,44
60	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,62	1,59	1,57	1,56	1,53	1,50	1,48	1,44	1,41	1,39
80	1,68	1,65	1,63	1,62	1,60	1,57	1,54	1,52	1,51	1,48	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32
100	1,65	1,63	1,61	1,59	1,57	1,54	1,52	1,49	1,48	1,45	1,41	1,39	1,34	1,31	1,28
125	1,63	1,60	1,58	1,57	1,55	1,52	1,49	1,47	1,45	1,42	1,39	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,61	1,59	1,57	1,55	1,54	1,50	1,48	1,45	1,44	1,41	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22
200	1,60	1,57	1,55	1,53	1,52	1,48	1,46	1,43	1,41	1,39	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
300	1,58	1,55	1,53	1,51	1,50	1,46	1,43	1,41	1,39	1,36	1,32	1,30	1,23	1,19	1,15
500	1,56	1,54	1,52	1,50	1,48	1,45	1,42	1,40	1,38	1,35	1,30	1,28	1,21	1,16	1,11
100	1,55	1,53	1,51	1,49	1,47	1,43	1,41	1,38	1,36	1,33	1,29	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,54	1,52	1,50	1,48	1,46	1,42	1,39	1,37	1,35	1,32	1,27	1,24	1,17	1,11	1,01