UNIWERSYTET w BIAŁYMSTOKU

Instytut Matematyki

Ryszard R. Andruszkiewicz

WYKŁADY Z ALGEBRY LINIOWEJ

I

Białystok 2005

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

ISBN 83-7431-057-X

Korekta
Magdalena Sobolewska

Redakcja techniczna i skład komputerowy
Ryszard R. Andruszkiewicz

Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku
15-097 Białystok, ul. M. Skłodowskiej-Curie 14,
tel. (085) 745 70 59

Druk i oprawa:
Mazowieckie Zakłady Graficzne s.c.
tel. (086) 275 41 31

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

WYKŁADY Z ALGEBRY LINIOWEJ

I

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Spis treści

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Wstęp

Niniejsza książka jest podręcznikiem do przedmiotu **Algebra liniowa I** wykładanego w Instytucie Matematyki Uniwersytetu w Białymstoku w oparciu o następujący program:

> Aksjomaty ciała. Pojęcie ciała liczbowego. Konstrukcja ciała liczb zespolonych, ciało liczb zespolonych. Geometryczna interpretacja liczb zespolonych, trygonometryczna postać liczb zespolonych, twierdzenie de Moivre'a, pierwiastkowanie liczb zespolonych. Pojęcie układu równań liniowych, układ równań jednorodnych, rozwiązanie układu, metoda Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych. Wyznacznik i jego własności, twierdzenie Laplace'a. Twierdzenie Cramera. Rząd macierzy i operacje na macierzach nie zmieniające rzędu. Twierdzenie Kroneckera-Capelli'ego. Mnożenie macierzy. Twierdzenie Cauchy'ego i jego zastosowania. Pojęcie przestrzeni liniowej. Podprzestrzenie przestrzeni liniowej. Kombinacja liniowa wektorów. Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej, współrzędne. Lemat Steinitza. Wymiar przestrzeni i podprzestrzeni. Suma i przecięcie podprzestrzeni, ich wymiary. Przestrzeń ilorazowa i jej wymiar. Przekształcenia liniowe przestrzeni liniowych. Jądro i obraz przekształcenia liniowego. Monomorfizm, endomorfizm, epimorfizm, izomorfizm. Zasadnicze twierdzenie o izomorfizmach przestrzeni liniowych.

Wieloletnie doświadczenia autora związane z wykładaniem algebry liniowej pokazały, że przedmiot ten sprawia spore trudności studentom. Okazało się, że powyższy program nie jest łatwo zrealizować

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

w trakcie piętnastu wykładów w sposób przystępny dla słuchaczy bez dysponowania dobrymi materiałami dydaktycznymi. Okazało się też, że odsyłanie studentów do literatury nie jest (z wielu powodów) skutecznym rozwiązaniem problemu. Właśnie dlatego powstał ten skrypt. W oparciu o materiał tu umieszczony można sprawnie prowadzić wykłady ubogacając je dodatkowymi przykładami, uwagami dydaktycznymi, informacjami historycznymi, ciekawostkami, zadaniami, problemami, itp.

W podręczniku liczbami naturalnymi będziemy nazywali dodatnie liczby całkowite, zaś sam zbiór wszystkich liczb naturalnych będziemy oznaczali przez $\mathbb{N}$. Zatem $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Ponadto $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Koniec dowodu oznaczamy symbolem $\Box$.

Autor dziękuje mgr Magdalenie Sobolewskiej za pomoc w składzie komputerowym tego podręcznika.

Autor

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 1

Pojęcie ciała

1.1 Działanie w zbiorze

Definicja 1.1. *Działaniem* w niepustym zbiorze A nazywamy każde odwzorowanie zbioru $A \times A$ w zbiór A. Jeżeli $\circ$ jest działaniem w zbiorze A i $a, b \in A$, to $\circ((a, b))$ oznaczamy przez $a \circ b$ i nazywamy *wynikiem działania* $\circ$ na parze (a, b).

Działania będziemy oznaczali symbolami: $\circ$, $\cdot$, $+$, $\oplus$, itd.

Przykład 1.1. Niech $m > 1$ będzie liczbą naturalną oraz niech $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m - 1\}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_m$ określamy *dodawanie modulo* m oznaczane przez $\oplus_m$ i *mnożenie modulo* m oznaczane przez $\odot_m$ w ten sposób, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_m$:

$$a \oplus_m b = \text{reszta z dzielenia } a + b \text{ przez } m, \tag{1.1}$$

$$a \odot_m b = \text{reszta z dzielenia } a \cdot b \text{ przez } m. \tag{1.2}$$

Np. $2 \odot_4 2 = 0$, $2 \oplus_5 4 = 1$, itd. □

1.2 Określenie ciała; przykłady ciał

Niech K będzie zbiorem posiadającym co najmniej dwa elementy. Niech $+$ i $\cdot$ będą działaniami w zbiorze K zwanymi odpowiednio *dodawaniem*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

i *mnożeniem* oraz niech będą wyróżnione w zbiorze K dwa elementy nazywane *zerem* i *jedynką* i oznaczane symbolami 0 i 1 odpowiednio. Powiemy, że K z tymi działaniami i wyróżnionymi elementami 0, 1 jest *ciałem*, jeżeli spełnione są następujące warunki (aksjomaty ciała):

A1. $\forall_{a,b\in K}\ \ a+b=b+a.$
A2. $\forall_{a,b,c\in K}\ \ (a+b)+c=a+(b+c)\ .$
A3. $\forall_{a\in K}\ \ a+0=a.$
A4. $\forall_{a\in K}\exists_{x\in K}\ \ a+x=0.$
A5. $\forall_{a,b\in K}\ \ a\cdot b=b\cdot a.$
A6. $\forall_{a,b,c\in K}\ \ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$
A7. $\forall_{a\in K}\ \ a\cdot 1=a.$
A8. $\forall_{a,b,c\in K}\ \ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$
A9. $\forall_{a\in K\setminus\{0\}}\exists_{y\in K}\ \ a\cdot y=1.$

Podstawowym przykładem ciała jest *ciało liczb wymiernych* (ze zwykłym dodawaniem i mnożeniem liczb). Oznaczamy je przez $\mathbb{Q}$.

Zbiór liczb rzeczywistych ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia tworzy ciało. Oznaczamy je przez $\mathbb{R}$ i nazywamy *ciałem liczb rzeczywistych.*

Definicja 1.2. Każdy podzbiór K ciała $\mathbb{R}$ zawierający liczby 0, 1, który jest ciałem ze względu na zwykłe dodawanie i zwykłe mnożenie liczb rzeczywistych (obcięte do K) nazywamy *ciałem liczbowym.*

Stwierdzenie 1.1. *Podzbiór $K\subseteq\mathbb{R}$ jest ciałem liczbowym wtedy i tylko wtedy, gdy $0,1\in K$ oraz dla dowolnych $a,b\in K$: $a-b\in K$ i dla dowolnych $a\in K$, $b\in K\setminus\{0\}$: $\frac{a}{b}\in K$.*

Dowód $\Rightarrow$. Z założenia $0,1\in K$. Weźmy dowolne $b\in K$. Wtedy istnieje $x\in K$ takie, że $b+x=0$, skąd $-b\in K$ dla każdego $b\in K$. Niech $a,b\in K$. Wtedy $-b\in K$, więc $a-b=a+(-b)\in K$. Weźmy dowolne $b\in K\setminus\{0\}$. Wtedy istnieje $y\in K$ takie, że $b\cdot y=1$, skąd $\frac{1}{b}\in K$ dla każdego $b\in K\setminus\{0\}$. Zatem dla dowolnych $a\in K$, $b\in K\setminus\{0\}$ mamy, że $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}\in K$, bo $a,\frac{1}{b}\in K$.

$\Leftarrow$. Z założenia mamy, że $0,1\in K$. Weźmy dowolne $a,b\in K$. Wtedy $-b=0-b\in K$, więc aksjomat **A4** jest spełniony w K oraz $a+b=a-(-b)\in K$, czyli dodawanie jest wykonalne w K. Ponieważ

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

aksjomaty **A1-A3** są spełnione w $\mathbb{R}$, więc tym bardziej są one spełnione w K. Niech $b \in K \setminus \{0\}$. Wtedy $\frac{1}{b} \in K$, bo $1 \in K$. Wynika stąd, że aksjomat **A9** jest spełniony w K. Weźmy dowolne $a \in K$, $b \in K \setminus \{0\}$. Wtedy $a \cdot b = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{b}} \in K$, gdyż $\frac{1}{b} \in K$. Ponadto dla $a \in K$ jest $a \cdot 0 = 0 \in K$, więc mnożenie jest wykonalne w K. Stąd aksjomaty **A5-A8** też są spełnione w K i ostatecznie K jest ciałem. $\square$

Przykład 1.2. Niech $d > 1$ będzie liczbą naturalną, która nie jest podzielna przez kwadrat liczby pierwszej (np. 2,3,5,6,7,10, itd.). Wówczas zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ jest ciałem liczbowym, bo $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{d}$, $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{d}$ oraz dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$:

$$(x_1 + y_1\sqrt{d}) - (x_2 + y_2\sqrt{d}) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}),$$

bo $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in \mathbb{Q}$. Zauważmy też, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$:

$$x + y\sqrt{d} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0. \tag{1.3}$$

Rzeczywiście, jeśli $x + y\sqrt{d} = 0$, to dla $y \neq 0$, $\sqrt{d} = -\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, więc istnieją względnie pierwsze liczby naturalne a, b takie, że $\sqrt{d} = \frac{a}{b}$, skąd $b^2d = a^2$. Ale $d > 1$, więc $a > 1$ i istnieje liczba pierwsza p taka, że $p|a$. Zatem $p^2|b^2d$ oraz p nie dzieli b, gdyż liczby a i b są względnie pierwsze, czyli stąd $p^2|d$ i mamy sprzeczność z określeniem liczby d. Zatem $y = 0$ i w konsekwencji $x = 0$. Jeśli zaś $x = y = 0$, to oczywiście $x + y\sqrt{d} = 0$.

Niech teraz $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ będą takie, że $x_2 + y_2\sqrt{d} \neq 0$. Wtedy z (1.3) mamy, że $x_2 - y_2\sqrt{d} \neq 0$, więc $\frac{x_1+y_1\sqrt{d}}{x_2+y_2\sqrt{d}} \frac{(x_1+y_1\sqrt{d})(x_2-y_2\sqrt{d})}{(x_2+y_2\sqrt{d})(x_2-y_2\sqrt{d})} = \frac{(x_1x_2-y_1y_2d)+(y_1x_2-x_1y_2)\sqrt{d}}{x_2^2-dy_2^2} = \frac{x_1x_2-y_1y_2d}{x_2^2-dy_2^2} + \frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2-dy_2^2}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zatem na mocy stwierdzenia 1.1, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ jest ciałem liczbowym. $\square$

Przykład 1.3. Zbiór $\{x + y\sqrt[3]{2} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ nie jest ciałem liczbowym, gdyż można pokazać, że $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ nie należy do tego zbioru. $\square$

Przykład 1.4. Niech p będzie dowolną liczbą pierwszą. Wówczas zbiór $\mathbb{Z}_p$ z działaniami $\oplus_p$ i $\odot_p$ określonymi w przykładzie 1.1 i z wyróżnionymi elementami 0, 1 tworzy ciało, które ma dokładnie p-elementów. W dowodzie tego faktu wykorzystuje się tzw. *twierdzenie*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

o dzieleniu z resztą, z którego wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej a istnieje dokładnie jedna para (q, r) liczb całkowitych taka, że $a = q \cdot p + r$ i $r \in \mathbb{Z}_p$. Weźmy dowolne $a, b \in \mathbb{Z}_p$. Z przemienności dodawania i z przemienności mnożenia liczb całkowitych od razu wynika, że $a \oplus_p b = b \oplus_p a$ i $a \odot_p b = b \odot_p a$. Ponadto

$$a \oplus_p 0 = [\text{reszta z dzielenia } a + 0 = a \text{ przez } p] = a,$$

$$a \odot_p 1 = [\text{reszta z dzielenia } a \cdot 1 = a \text{ przez } p] = a.$$

Jeżeli $a \neq 0$, to $a > 0$, więc $p - a \in \mathbb{Z}_p$ oraz

$$a \oplus_p (p - a) = [\text{ reszta z dzielenia } a + (p - a) = p \text{ przez } p] = 0$$

i $0 \oplus_p 0 = 0$, więc aksjomat **A4** jest spełniony. Weźmy dowolne $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$. Wtedy istnieje $q_1 \in \mathbb{Z}$ takie, że $a + b = q_1 p + a \oplus_p b$. Ponadto istnieje $q_2 \in \mathbb{Z}$ takie, że $(a \oplus_p b) + c = q_2 p + [(a \oplus_p b) \oplus_p c]$, więc $a + b + c = (q_1 + q_2)p + [(a \oplus_p b) \oplus_p c]$, czyli

$$(a \oplus_p b) \oplus_p c = \text{ reszta z dzielenia } a + b + c \text{ przez } p.$$

Podobnie pokazujemy, że $a \oplus_p (b \oplus_p c) =$ reszta z dzielenia $a + b + c$ przez p, więc $(a \oplus_p b) \oplus_p c = a \oplus_p (b \oplus_p c)$. Zupełnie analogicznie dowodzimy, że $(a \odot_p b) \odot_p c = a \odot_p (b \odot_p c)$ oraz $a \odot_p (b \oplus_p c) = a \odot_p b \oplus_p a \odot_p c$. Weźmy teraz dowolne $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$. Zauważmy, że elementy $a \odot_p 0, a \odot_p 1, \ldots, a \odot_p (p-1)$ są parami różne, gdyż inaczej istnieją liczby całkowite $x, y \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}$ takie, że $x > y$ oraz $a \odot_p x = a \odot_p y$, skąd $p | ax - ay$, czyli $p | a(x - y)$. Ale p nie dzieli a, więc $p | x - y$. Lecz $x - y$ jest liczbą naturalną mniejszą od p, więc mamy sprzeczność. Stąd wynika, że $\{a \odot_p 0, a \odot_p 1, \ldots, a \odot_p (-1)\} = \{0, 1, \ldots, p - 1\}$, więc dla pewnego $t \in \mathbb{Z}_p$ jest $a \odot_p t = 1$. Zatem aksjomat **A9** też jest spełniony i ostatecznie $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem. $\square$

Przykład 1.5. Nie istnieje ciało, które ma 6 elementów, ale istnieją ciała 4-ro i 8-mio elementowe. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

1.3 Własności działań w ciele

Niech $(K, +, \cdot, 0, 1)$ będzie dowolnym ciałem. Wówczas zachodzą następujące własności:

Własność 1.1. Prawa skracania równości:
(a) jeśli $a + c = b + c$, to $a = b$,
(b) jeśli $a \cdot c = b \cdot c$ i $c \neq 0$, to $a = b$.

Dowód. (a). Z **A4** istnieje $t \in K$ takie, że $c + t = 0$, więc $(a + b) + t = (b + c) + t$, skąd z **A2**: $a + (c + t) = b + (c + t)$, czyli $a + 0 = b + 0$ i z **A3**: $a = b$.
(b). Z **A9** istnieje $y \in K$ takie, że $c \cdot y = 1$, więc $(a \cdot c) \cdot y = (b \cdot c) \cdot y$, skąd z **A6**, $a \cdot (c \cdot y) = b \cdot (c \cdot y)$, czyli $a \cdot 1 = b \cdot 1$, a więc z **A7**, $a = b$. □

Własność 1.2. Element x z **A4** jest wyznaczony jednoznacznie przez element a.

Dowód. Niech $y \in K$ będzie takie, że $a + y = 0$. Wtedy $a + y = a + x$, skąd z **A1** i własności 1.1(a) mamy, że $y = x$. □

Uwaga 1.1. Ten jedyny element x z **A4** nazywamy *elementem przeciwnym* do a i oznaczamy przez $(-a)$. Ponieważ z **A1**: $(-a) + a = 0$, więc a jest elementem przeciwnym do $(-a)$ i mamy wzór:

$$-(-a) = a.$$

Własność 1.3. $a \cdot 0 = 0$.

Dowód. Z **A3**: $0 = 0 + 0$, więc $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, na mocy **A8**. Stąd z **A3** i **A1**: $0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ i z własności 1.1(a), $a \cdot 0 = 0$. □

Własność 1.4. $0 \neq 1$.

Dowód. Ponieważ zbiór K ma co najmniej dwa elementy, więc istnieje $a \in K$ takie, że $a \neq 0$ i wtedy z **A7**: $a = a \cdot 1$ oraz z własności 1.3: $a \cdot 0 = 0 \neq a$, więc $0 \neq 1$. □

Własność 1.5. Element y z **A9** jest wyznaczony jednoznacznie przez element a.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Dowód. Niech $z \in K$ będzie taki, że $a \cdot$
A5, $z \cdot a =$

Uwaga 1.2. Ten jedyny element y z **A9** nazywamy *elementem odwrotnym* do elementu $a \neq 0$ i
a
a^{-}
wbrew własności 1.4. Zatem a^{-}
elementem odwrotnym do elementu a^{-}
wzór:

$$(a$$

Własność 1.6. $(-a)$
Dowód. Na mocy **A8** i własności 1.3 mamy, że a
$a \cdot$
$a \cdot$
$-(b \cdot$
$\square$

Odejmowanie w ciele K określamy następująco:

$$a - b \stackrel{def}{=} a \quad (\quad) \tag{1.4}$$

Własność 1.7. a
Dowód. Z (1.4), **A8** i z własności 1.6 mamy, że a
a

Dzielenie przez niezerowe elementy b w

$$\frac{a}{b} \stackrel{def}{=} a \cdot b^{-1}. \tag{1.5}$$

Własność 1.8. Jeżeli $a \neq 0$ i $b \neq$
Dowód. Weźmy dowolne a,
mocy **A5** i własności 1.3, $a \cdot$
1.1(b) i mamy sprzeczność. Zatem $a \cdot$

Uwaga 1.3. Niech a,
$a \cdot$
wzór:

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$$\frac{1}{a\cdot b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}.$$

W ciele K możemy określić iloczyn elementu $a \in K$ przez dowolną liczbę całkowitą n w następujący sposób:

$$n \cdot a \stackrel{def}{=} \begin{cases} \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} & \text{, gdy } n \text{ jest liczbą naturalną} \\ 0 & \text{, gdy } n = 0 \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \ldots + (-a)}_{|n|} & \text{, gdy } n < 0 \end{cases} . \tag{1.6}$$

Można wykazać (jest to żmudne), że dla dowolnych liczb całkowitych m, n i dla dowolnych $a, b \in K$ zachodzą własności:

Własność 1.9. $na + ma = (n + m)a$ oraz $na - ma = (n - m)a$.

Własność 1.10. $n(ma) = (nm)a$.

Własność 1.11. $(na) \cdot (mb) = (nm)(a \cdot b)$.

Własność 1.12. $na + nb = n(a + b)$.

W ciele K możemy też określić całkowitą nieujemną potęgę dowolnego elementu $a \in K$ przyjmując, że

$$a^0 = 1 \tag{1.7}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} \text{ dla naturalnych } n. \tag{1.8}$$

Przez prostą indukcję można wykazać, że wówczas dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_0$ oraz dla dowolnych $a, b \in K$ zachodzą wzory:

Własność 1.13. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

Własność 1.14. $(a^n)^m = a^{nm}$.

Własność 1.15. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Własność 1.16. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Dla niezerowych elementów a ciała K możemy rozszerzyć definicję (1.7)-(1

$$a^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}. \tag{1.9}$$

Można wykazać, że wówczas własności 1.13-1.15 są prawdziwe dla dowolnych liczb całkowitych m, n i dla dowolnych a, b

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 2

Ciało liczb zespolonych I

2.1 Konstrukcja ciała liczb zespolonych

W zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wprowadzamy działania $+$ i $\cdot$ przy pomocy wzorów:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \tag{2.1}$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1), \tag{2.2}$$

dla dowolnych $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.1. *Struktura algebraiczna* $(\mathbb{C}, +, \cdot, (0,0), (1,0))$ *tworzy ciało.*

Dowód. Sprawdzamy kolejno prawdziwość wszystkich aksjomatów ciała. Niech $a, b, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

A1. Na mocy wzoru (2.1) i przemienności dodawania liczb rzeczywistych
$(a_2, b_2)+(a_1, b_1) = (a_2+a_1, b_2+b_1) = (a_1+a_2, b_1+b_2) = (a_1, b_1)+(a_2, b_2)$.

A2. Na mocy wzoru (2.1) i łączności dodawania liczb rzeczywistych
$[(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) =$
$([a_1 + a_2] + a_3, [b_1 + b_2] + b_3) = (a_1 + [a_2 + a_3], b_1 + [b_2 + b_3]) = (a_1, b_1) +$
$(a_2 + a_3, b_2 + b_3) = (a_1, b_1) + [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)]$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

A3. Na mocy wzoru (2.1) i tego, że 0 jest elementem neutralnym dodawania liczb rzeczywistych $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$.

A4. Na mocy wzoru (2.1) $(a, b)+(-a, -b) = (a+(-a), b+(-b)) = (0, 0)$.

A5. Na mocy wzoru (2.2) i przemienności mnożenia liczb rzeczywistych $(a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1) = (a_2 \cdot a_1 - b_2 \cdot b_1, a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$.

A6. Na mocy wzoru (2.2), łączności i przemienności mnożenia liczb rzeczywistych, a także rozdzielności mnożenia liczb rzeczywistych względem dodawania (odejmowania) liczb rzeczywistych $[(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \cdot (a_3, b_3) = ([a_1a_2 - b_1b_2] \cdot a_3 - [a_1b_2 + a_2b_1] \cdot b_3, [a_1a_2 - b_1b_2] \cdot b_3 + a_3 \cdot [a_1b_2 + a_2b_1]) = (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_3a_1b_2 + a_3a_2b_1)$ oraz $(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + a_3b_2) = (a_1 \cdot [a_2a_3 - b_2b_3] - b_1 \cdot [a_2b_3 + a_3b_2], a_1 \cdot [a_2b_3 + a_3b_2] + [a_2a_3 - b_2b_3] \cdot b_1) = (a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1a_3b_2, a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - b_2b_3b_1)$. Zatem $(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)] = [(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)] \cdot (a_3, b_3)$.

A7. Na mocy wzoru (2.2) i różnych praw działań na liczbach rzeczywistych (jakich?) $(a_1, b_1) \cdot (a, 0) = (a_1 \cdot a - b_1 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + a \cdot b_1) = (a \cdot a_1, a \cdot b_1)$, więc w szczególności dla $a = 1$: $(a_1, b_1) \cdot (1, 0) = (a_1, b_1)$, gdyż 1 jest elementem neutralnym mnożenia liczb rzeczywistych.

A8. Na mocy wzorów (2.1) i (2.2) oraz różnych praw działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych (jakich?) $(a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = (a_1 \cdot [a_2 + a_3] - b_1 \cdot [b_2 + b_3], a_1 \cdot [b_2 + b_3] + [a_2 + a_3] \cdot b_1) = (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + a_3b_1) = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3)$.

A9. Niech $(a, b) \neq (0, 0)$. Wtedy $a \neq 0$ lub $b \neq 0$, skąd $a^2 + b^2 > 0$. Zatem liczby $\frac{a}{a^2+b^2}$ i $\frac{-b}{a^2+b^2}$ są dobrze określone oraz ze wzoru (2.2) $(a, b) \cdot (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} - b \cdot \frac{(-b)}{a^2+b^2}, a\frac{(-b)}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2} \cdot b) = (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, 0) = (1, 0)$. □

Otrzymane w ten sposób ciało oznaczamy przez $\mathbb{C}$ i nazywamy **ciałem liczb zespolonych**. Elementy ciała $\mathbb{C}$ nazywamy **liczbami**

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

zespolonymi i oznaczamy literami: z, w, z_1, z_2 itd. Geometrycznie liczby zespolone można więc traktować jako punkty na płaszczyźnie. Ze wzoru (2.1) wynika, że liczby zespolone dodajemy analogicznie jak wektory na płaszczyźnie zaczepione w początku układu współrzędnych. Z tego powodu liczbę zespoloną (a, b) możemy utożsamić z wektorem o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (a, b). Interpretacja geometryczna mnożenia liczb zespolonych jest bardziej złożona (podamy ją później).

Z określeń (2.1) i (2.2) i z dowodu twierdzenia 2.1 wynika od razu, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b

$$\begin{gathered}(a,0)=(b,0)\Leftrightarrow a=b,\\ (a,0)+(b,0)=(a+b,0),\\ (a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b,0),\\ -(a,0)=(-a,0),\\ (a,0)^{-1}=(\tfrac{1}{a},0)\text{ dla } a\neq 0.\end{gathered}$$

Z tego powodu dla liczb rzeczywistych a można dokonać utożsamienia:

$$(a,0)\equiv a. \tag{2.3}$$

Przy takim utożsamieniu $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.

Liczbę zespoloną

$$i=(0,1) \tag{2.4}$$

nazywamy *jednostką urojoną*. Zachodzi dla niej bardzo ważny wzór:

$$i^2=-1. \tag{2.5}$$

Rzeczywiście, na mocy wzoru (2.2):
$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+0\cdot 1)=(-1,0)\equiv -1.$

Z dowodu twierdzenia 2.1 dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy, że $(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)\equiv a+bi$. Zatem dla $a, b\in\mathbb{R}$ można dokonać utożsamienia:

$$(a,b)\equiv a+bi. \tag{2.6}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Otrzymujemy w ten sposób *postać algebraiczną* $a+bi$ liczby zespolonej (a,b).

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych zapisanych w postaci algebraicznej wykonuje się zatem tak samo jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów zmiennej i, przy czym należy pamiętać o tym, że w miejsce i^2 należy zawsze podstawić (-1). Np. $(1+2i)\cdot(3-i) = 3-i+6i-2i^2 = 3+5i+2 = 5+5i$, $(1+2i)+(3-i) = 4+i$, $(1+2i)-(3-i) = -2+3i$.

Natomiast przy dzieleniu liczb zepolonych wygodnie jest wykorzystywać tzw. liczby sprzężone. Jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi, to *liczbą sprzężoną* do liczby $z = a+bi$ nazywamy liczbę $\overline{z} = a-bi$. Wówczas $z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2-b^2i^2 = a^2-b^2\cdot(-1) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$. Zatem **aby podzielić liczbę zespoloną w przez liczbę zespoloną $z \neq 0$ należy licznik i mianownik ułamka $\frac{w}{z}$ pomnożyć przez liczbę sprzężoną z mianownikiem tego ułamka**, czyli $\frac{w}{z} = \frac{w\cdot\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{w\cdot\overline{z}}{a^2+b^2}$. Np. $\frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2-2i+3i-3i^2}{1^2+1^2} = \frac{2+i+3}{2} = \frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$.

Przykład 2.1. Wyznaczymy wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie:

$$(1+2i)\cdot(z-i)+(4i-3)\cdot(1-i\cdot z)+1+7i = 0.$$

Mamy, że $(1+2i)\cdot(-i) = -i-2\cdot(-1) = 2-i$ oraz $(4i-3)\cdot(-i) = -4\cdot(-1)+3i = 4+3i$. Zatem nasze równanie przybiera postać:

$$(1+2i)\cdot z+2-i+4i-3+(4+3i)\cdot z+1+7i = 0,$$

czyli

$$(5+5i)\cdot z = -10i.$$

Zatem $z = \frac{-10i}{5+5i} = \frac{-2i}{1+i} = \frac{-2i\cdot(1-i)}{1^2+1^2} = \frac{-2i-2}{2} = -1-i$. Stąd jedynym rozwiązaniem naszego równania w liczbach zespolonych jest $z = -1-i$. $\square$

Jeżeli a, b są liczbami rzeczywistymi oraz $z = a+bi$, to *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z nazywamy liczbę $re(z) = a$, zaś *częścią* *urojoną* liczby z nazywamy liczbę (rzeczywistą!) $im(z) = b$. Np. $re(i) = 0$ oraz $im(i) = 1$. Łatwo zauważyć, że $re(z+w) = re(z)+re(w)$ dla dowolnych liczb zespolonych z, w. Ponadto z tych oznaczeń wynika natychmiast, że **dwie liczby zespolone zapisane w postaci algebraicznej są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste są równe i ich części urojone są równe**.

Przykład 2.2. Wyznaczymy wszystkie liczby rzeczywiste x, y takie, że

$$x \cdot (1 - i) \cdot (2 + i) + 2y \cdot (2 - i)^2 = -6 + 8i.$$

W tym celu obliczamy najpierw $(1-i)\cdot(2+i) = 2+i-2i-(-1) = 3-i$ oraz $(2-i)^2 = 4-4i+(-1) = 3-4i$. Zatem nasze równanie przybiera postać:

$$x \cdot (3 - i) + y \cdot (6 - 8i) = -6 + 8i,$$

czyli

$$(3x + 6y) + (-x - 8y) \cdot i = -6 + 8i.$$

Zatem z porównania części rzeczywistych i urojonych uzyskujemy, że liczby x, y muszą spełniać układ równań:

$$\begin{cases} 3x + \ \ 6y = -6 \\ -x - \ \ 8y = 8 \end{cases}.$$

Z drugiego równania wyliczamy $x = -8y - 8$ i podstawiamy do równania pierwszego. W ten sposób uzyskamy, że $y = -1$ oraz $x = 0$. $\square$

Modułem liczby zespolonej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{2.7}$$

Z tych określeń mamy od razu, że

$$re(z) \leq |z| \text{ oraz } im(z) \leq |z|, \tag{2.8}$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2. \tag{2.9}$$

2.2 Własności sprzęgania liczb zespolonych

Własność 2.1. $\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \ldots + \overline{z_n}$.

Dowód. Istnieją liczby rzeczywiste $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ takie, że $z_k = a_k + b_k i$ dla $k = 1, \ldots, n$. Zatem $z_1 + \ldots + z_n = (a_1 + b_1 i) + \ldots + (a_n + b_n i) = (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n)i$, skąd $\overline{z_1 + \ldots + z_n} = (a_1 + \ldots + a_n) - (b_1 + \ldots + b_n)i$ oraz $\overline{z_1} + \ldots + \overline{z_n} = (a_1 - b_1 i) + \ldots + (a_n - b_n i) = (a_1 + \ldots + a_n) - (b_1 + \ldots + b_n)i$, skąd mamy tezę.□

Własność 2.2. $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$.

Dowód. Dla $n = 2$ istnieją liczby rzeczywiste a_1, a_2, b_1, b_2 takie, że $z_1 = a_1 + b_1 i$ oraz $z_2 = a_2 + b_2 i$. Stąd $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, czyli $\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ oraz $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, czyli teza zachodzi dla $n = 2$. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n. Wówczas dla liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}$ na mocy pierwszej części dowodu mamy, że $\overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot z_{n+1}} = \overline{(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n) \cdot z_{n+1}} = \overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} \cdot \overline{z_{n+1}}$, więc na mocy założenia indukcyjnego $\overline{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot z_{n+1}} = \overline{z_1} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n} \cdot \overline{z_{n+1}}$. Stąd na mocy zasady indukcji mamy tezę.□

Własność 2.3. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Dowód. Wystarczy w poprzednim wzorze podstawić

$$z = z_1 = \ldots = z_n.\square$$

Własność 2.4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, $w \neq 0$.

Dowód. Ponieważ $w \neq 0$, więc też $\overline{w} \neq 0$ (dlaczego?). Z własności 2.2 mamy, że $\overline{z} = \overline{w \cdot \frac{z}{w}} = \overline{w} \cdot \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}$, skąd po podzieleniu obu stron przez $\overline{w}$ uzyskamy tezę.□

2.3 Własności modułu liczb zespolonych

Własność 2.5. $|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$.

Dowód. Na mocy (2.9) i własności 2.2: $|z_1 \cdot \ldots \cdot z_n|^2 = (z_1 \cdot \ldots \cdot z_n) \cdot \overline{(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n)} = z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot \overline{z_1} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n} = (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot \ldots \cdot (z_n \cdot \overline{z_n}) = |z_1|^2 \cdot \ldots \cdot |z_n|^2$, skąd po spierwiastkowaniu obu stron uzyskamy tezę.□

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Własność 2.6. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$.

Dowód. Ponieważ $w \neq 0$, więc też $|w| \neq 0$ (dlaczego?). Na mocy własności 2.5 $|z| = \left|w \cdot \frac{z}{w}\right| = |w| \cdot \left|\frac{z}{w}\right|$, więc po podzieleniu obu stron przez $|w|$ uzyskamy tezę.□

Własność 2.7. $|z^n| = |z|^n$.

Dowód. Wystarczy podstawić $z = z_1 = \ldots = z_n$ w własności 2.5.□

Własność 2.8. $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$.

Dowód. Stosujemy indukcję względem n. Niech $n = 2$. Jeśli $z_1 + z_2 = 0$, to nasz wzór zachodzi. Załóżmy dalej, że $z_1 + z_2 \neq 0$. Wtedy $|z_1 + z_2| > 0$. Ponadto $1 = re\left(\frac{z_1}{z_1+z_2} + \frac{z_2}{z_1+z_2}\right) = re\left(\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) + re\left(\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \leq \left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1+z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_1+z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1+z_2|}$, skąd po pomnożeniu obu stron przez $|z_1 + z_2|$ uzyskamy tezę dla $n = 2$.

Załóżmy teraz, że nasza nierówność zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n i niech $z_1, \ldots, z_{n+1}$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wówczas z pierwszej części dowodu i z założenia indukcyjnego mamy, że $|z_1 + \ldots + z_{n+1}| = |(z_1 + \ldots + z_n) + z_{n+1}| \leq |z_1 + \ldots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|$, czyli nasza nierówność zachodzi dla liczby $n+1$.

Stąd na mocy zasady indukcji mamy tezę.□

Własność 2.9. $|z - w| =$ odległość punktu z od punktu w.

Dowód. Istnieją liczby rzeczywiste a_1, a_2, b_1, b_2 takie, że $z = a_1 + b_1 i \equiv (a_1, b_1)$ oraz $w = a_2 + b_2 i \equiv (a_2, b_2)$. Ponadto $z - w = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$, więc $|z - w| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$. Zatem z geometrii analitycznej mamy tezę.□

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

2.4 Pierwiastek kwadratowy z liczb zespolonych

Funkcję znak liczby rzeczywistej x określamy następująco:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \quad x > 0 \\ 0 & \text{jeśli} \quad x = 0 \\ -1 & \text{jeśli} \quad x < 0 \end{cases}. \tag{2.10}$$

Łatwo zauważyć, że $|x| = sgn(x) \cdot x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $(sgn(x))^2 = 1$ dla $x \neq 0$.

Niech $\omega = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $\omega^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2 \cdot (-1) = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Zatem dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\omega^2 = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}. \tag{2.11}$$

Twierdzenie 2.2. *Niech* $a, b \in \mathbb{R}$ *oraz*

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{jeśli} \quad b = 0 \text{ i } a \geq 0 \\ \sqrt{-a} \cdot i & \text{jeśli} \quad b = 0 \text{ i } a < 0 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + sgn(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \cdot i & \text{jeśli} \quad b \neq 0 \end{cases}. \tag{2.12}$$

Wtedy $\omega^2 = a + bi$. *Ponadto* $\{z \in \mathbb{C} : z^2 = a + bi\} = \{\omega, -\omega\}$.

Dowód. Dla $a \geq 0$ i $b = 0$ mamy, że $(\sqrt{a})^2 = a = a + bi$. Dla $a < 0$ i $b = 0$ jest $-a > 0$ oraz $(\sqrt{-a} \cdot i)^2 = (-a) \cdot (-1) = a = a + bi$. Dla $b \neq 0$ mamy, że $\sqrt{a^2 + b^2} \pm a > 0$. Oznaczmy $x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$, $y = sgn(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$. Wtedy $x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} = a$ oraz $2xy = 2sgn(b) \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} = 2sgn(b) \cdot \frac{\sqrt{b^2}}{2} = sgn(b) \cdot |b| = b$. Zatem z (2.11) mamy, że $(x+yi)^2 = a+bi$. Kończy to dowód pierwszej części twierdzenia.

Zauważmy, że $(-\omega)^2 = \omega^2 = a + bi$. Jeśli zaś $z \in \mathbb{C}$ jest takie, że $z^2 = a + bi$, to $z^2 = \omega^2$, skąd $0 = z^2 - \omega^2 = (z - \omega) \cdot (z + \omega)$, więc $z = \omega$ lub $z = -\omega$. Zatem twierdzenie jest udowodnione.□

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Liczbę zespoloną ω nazywamy *pierwiastkiem kwadratowym* z liczby zespolonej z, jeżeli $\omega^2 = z$. Twierdzenie 2.2 mówi zatem, że z każdej liczby zespolonej można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy i podaje wzory na te pierwiastki. Czasami pierwiastek kwadratowy z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt{z}$, ale należy być bardzo ostrożnym przy stosowaniu tego oznaczenia.

Z twierdzenia 2.2 wynika też, że dowolne równanie kwadratowe

$$az^2 + bz + c = 0, \tag{2.13}$$

o współczynnikach zespolonych a, b, c, $a \neq 0$ posiada pierwiastek zespolony. Mianowicie oznaczmy $\Delta = b^2 - 4ac$. Wtedy istnieje liczba zespolona ω taka, że $\omega^2 = \Delta$. Ponadto $az^2 + bz + c = a \cdot [z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}] = a \cdot [(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}] = a \cdot [(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}] = a \cdot [(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\omega^2}{4a^2}] = a \cdot (z + \frac{b}{2a} + \frac{\omega}{2a}) \cdot (z + \frac{b}{2a} - \frac{\omega}{2a})$, skąd wynika, że wszystkimi pierwiastkami zespolonymi równania (2.13) są:

$$z_1 = \frac{-b-\omega}{2a} \text{ oraz } z_2 = \frac{-b+\omega}{2a}.$$

Rozdział 3

Ciało liczb zespolonych II

3.1 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Niech z będzie niezerową liczbą zespoloną. Wówczas istnieją liczby rzeczywiste a, b, takie, że

$$z = a + bi \tag{3.1}$$

oraz $a \neq 0$ lub $b \neq 0$. Liczbę z możemy traktować jako punkt (a, b) płaszczyzny, którego odległość od punktu $(0, 0)$ jest równa $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Oznaczmy przez ϕ miarę kąta skierowanego jaki tworzy wektor $\vec{Oz}$ z osią OX w orientacji płaszczyzny przeciwnej do ruchów wskazówek zegara. Wtedy mamy, że $\phi \in [0, 2\pi)$ oraz

$$\begin{array}{l} \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array} . \tag{3.2}$$

Otrzymujemy stąd wzór

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi), \tag{3.3}$$

który nazywamy *postacią trygonometryczną* liczby zespolonej z. Liczbę ϕ nazywamy *argumentem głównym* liczby z i oznaczamy przez $Arg(z)$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Natomiast każdą liczbę rzeczywistą $\alpha = \phi + 2k\pi$ dla całkowitych k nazywamy *argumentem* liczby z i oznaczamy przez $\arg(z)$. Oczywiście dla takich α mamy, że $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Możemy więc napisać wzór

$$z = |z|[\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)]. \tag{3.4}$$

Na odwrót, niech r będzie dodatnią liczbą rzeczywistą i niech β będzie liczbą rzeczywistą taką, że $z = r(\cos\beta + i\sin\beta)$. Wówczas $|z| = |r| \cdot |\cos\beta + i\sin\beta| = r \cdot \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta} = r$, skąd $\cos\beta = \cos\phi$ oraz $\sin\beta = \sin\phi$, więc z trygonometrii mamy, że istnieje liczba całkowita k taka, że $\beta = \phi + 2k\pi$.

Dla niezerowych liczb zespolonych z, w równość $\arg(z) = \arg(w)$ będziemy dalej rozumieli w ten sposób, że liczby $\arg(z)$ i $\arg(w)$ różnią się jedynie o całkowitą wielokrotność liczby 2π.

3.2 Własności argumentu liczby zespolonej

Własność 3.1. Dla dowolnych niezerowych liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ zachodzi wzór:

$$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \ldots + \arg(z_n). \tag{3.5}$$

Dowód. Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 2$ oznaczmy $\arg(z_1) = \alpha$, $\arg(z_2) = \beta$. Wtedy $z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ oraz $z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$. Zatem $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|((\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) + i(\cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha)) = |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)]$, na mocy znanych wzorów trygonometrycznych. Stąd rzeczywiście $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ i wzór (3.5) zachodzi dla $n = 2$.

Niech teraz wzór (3.5) zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 2$. Weźmy dowolne niezerowe liczby zespolone $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}$. Wówczas z pierwszej części dowodu i z założenia indukcyjnego otrzymamy, że $\arg(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \cdot z_{n+1}) = \arg((z_1 \cdot \ldots \cdot z_n) \cdot z_{n+1}) = \arg(z_1 \cdot \ldots \cdot z_n) + \arg(z_{n+1}) = \arg(z_1) + \ldots + \arg(z_n) + \arg(z_{n+1})$, czyli wzór (3.5) zachodzi dla $n + 1$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Zatem na mocy zasady indukcji wzór (3.5) zachodzi dla dowolnego naturalnego $n \geq 2$.□

Własność 3.2. Podstawiając $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = \cos\alpha + i\sin\alpha$ we wzorze (3.5) i wykorzystując (3.4) uzyskujemy natychmiast tzw. **wzór de Moivre'a**:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.6}$$

Własność 3.3. Dla dowolnych niezerowych liczb zespolonych z, w zachodzi wzór:

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w). \tag{3.7}$$

Dowód. Ponieważ $z = w \cdot \frac{z}{w}$, więc ze wzoru (3.5) (dla $n = 2$) uzyskujemy, że $\arg(z) = \arg(w) + \arg\left(\frac{z}{w}\right)$, skąd mamy tezę.□

Własność 3.4. Dla dowolnej niezerowej liczby zespolonej z mamy, że

$$\arg(\overline{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z). \tag{3.8}$$

Dowód. Zauważmy, że 0 jest argumentem dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej. Ponadto $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, więc ze wzoru (3.5): $0 = \arg(z \cdot \overline{z}) = \arg(z) + \arg(\overline{z})$, skąd $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$. Ponadto ze wzoru (3.7): $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = 0 - \arg(z) = -\arg(z)$. Zatem wzór (3.8) jest udowodniony.□

Własność 3.5. Dla dowolnej niezerowej liczby zespolonej z zachodzi wzór:

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z). \tag{3.9}$$

Dowód. Zauważmy, że π jest argumentem liczby (-1), więc ze wzoru (3.5) $\arg(-z) = \arg(-1) + \arg(z) = \pi + \arg(z)$.□

Zadanie 3.1. Pokazać, że dla dowolnej niezerowej liczby zespolonej z:

(a) $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z)$, (b) $\arg(iz) = \frac{\pi}{2} + \arg(z)$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

3.3 Interpretacja geometryczna mnożenia liczb zespolonych

Ze wzoru (3.5) otrzymujemy natychmiast, że aby pomnożyć niezerowe liczby zespolone należy pomnożyć ich moduły i dodać ich argumenty. Niech z_0 będzie ustaloną niezerową liczbą zespoloną. Wówczas ze wzoru (3.5) dla $n = 2$ wynika, że przekształcenie $z \mapsto z_0 \cdot z$ dla zespolonych z jest złożeniem obrotu o kąt o mierze $Arg(z_0)$ i jednokładności o środku O i skali $|z_0|$.

3.4 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby zespolonej z nazywamy każdą taką liczbę zespoloną ω, że $\omega^n = z$. Łatwo zauważyć, że jedynym pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby 0 jest 0. Dla niezerowych liczb zespolonych zachodzi natomiast następujące

Twierdzenie 3.1. *Jeśli z jest niezerową liczbą zespoloną oraz $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia z liczby z i wszystkie te pierwiastki dają się ująć wzorem*

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.10}$$

Dowód. Ze wzoru de Moivre'a dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ mamy, że $\omega_k^n = |z|[\cos(\phi + 2k\pi) + i\sin(\phi + 2k\pi)] = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = z$, więc liczby (3.10) są pierwiastkami n-tego stopnia z liczby z. Niech teraz $k, l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ będą takie, że $\omega_k = \omega_l$. Wówczas istnieje liczba całkowita t taka, że $\frac{\phi+2k\pi}{n} - \frac{\phi+2l\pi}{n} = 2t\pi$, skąd $k - l = t \cdot n$. Ale $-n < k - l < n$, więc $t = 0$ i $k = l$. Zatem liczby (3.10) są parami różne.

Niech teraz ω będzie pierwiastkiem n-tego stopnia z liczby z. Ponieważ $z \neq 0$, więc też $\omega \neq 0$. Zatem istnieje liczba rzeczywista α

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

taka, że $\omega = |\omega|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Stąd ze wzoru de Moivre'a mamy, że $z = \omega^n = |\omega|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$. Zatem $|\omega|^n = |z|$ oraz $n\alpha = \phi + 2s\pi$ dla pewnego całkowitego s. Dzieląc s przez n z resztą uzyskamy, że istnieje liczba całkowita q i istnieje $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ takie, że $s = qn + k$. Zatem $\alpha = \frac{\phi+2k\pi}{n} + 2q\pi$, skąd wynika, że $\omega = \omega_k$.

Kończy to dowód naszego twierdzenia.□

3.5 Pierwiastki pierwotne z jedności

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Ponieważ $1 = \cos 0 + i\sin 0$, więc ze wzoru (3.10) otrzymujemy n różnych pierwiastków n-tego stopnia z 1:

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad \text{dla} \ \ k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.11}$$

Zatem zbiór $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ posiada dokładnie n elementów oraz

$$\mathbb{C}_n = \{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} : \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\}. \tag{3.12}$$

Liczbę zespoloną ω nazywamy *pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności*, jeżeli $\omega^n = 1$ oraz nie istnieje liczba naturalna $m < n$ taka, że $\omega^m = 1$.

Twierdzenie 3.2. *Dla liczby zespolonej ω następujące warunki są równoważne:*

(i) ω jest pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności;

(ii) $\omega = \epsilon_k$ dla pewnego k względnie pierwszego z liczbą n;

(iii) $\mathbb{C}_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$.

Dowód. (i)⇒(ii). Załóżmy, że ω jest pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności. Zatem $\omega^n = 1$ oraz $\omega^s \neq 1$ dla wszystkich liczb naturalnych $s < n$. Ponadto istnieje $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ takie, że $\omega = \epsilon_k$. Załóżmy, że liczby k i n nie są względnie pierwsze. Wówczas istnieje liczba naturalna $d > 1$ oraz istnieją liczby całkowite l i $m > 0$ takie, że $k = dl$ oraz $n = dm$. Stąd m jest liczbą naturalną mniejszą od

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

n oraz ze wzoru de Moivre'a $\omega^m = \cos\frac{2km\pi}{n} + i\sin\frac{2km\pi}{n} = \cos\frac{2ldm\pi}{dm} + i\sin\frac{2ldm\pi}{dm} = \cos(2l\pi) + i\sin(2l\pi) = 1$ i mamy sprzeczność.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Załóżmy, że $\omega = \epsilon_k$ dla pewnego $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ względnie pierwszego z liczbą n. Wtedy $\omega^n = 1$, skąd dla całkowitych t: $(\omega^t)^n = (\omega^n)^t = 1^t = 1$. Zatem $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\} \subseteq \mathbb{C}_n$. Wystarczy zatem wykazać, że liczby $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ są parami różne. Załóżmy, że tak nie jest. Wówczas istnieją $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ takie, że $p > q$ oraz $\omega^p = \omega^q$. Stąd $1 = \omega^{p-q} = \epsilon_k^{p-q} = \cos\frac{2k(p-q)\pi}{n} + i\sin\frac{2k(p-q)\pi}{n}$ na mocy wzoru de Moivre'a. Zatem istnieje liczba całkowita s taka, że $\frac{2k(p-q)\pi}{n} = 2s\pi$, skąd $n|k(p-q)$. Ale liczby n i k są względnie pierwsze, więc z zasadniczego twierdzenia arytmetyki $n|p-q$. Ponadto $p-q$ jest liczbą naturalną mniejszą od n, więc mamy sprzeczność.

(iii)$\Rightarrow$(i). Załóżmy, że $\mathbb{C}_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$. Ponieważ zbiór $\mathbb{C}_n$ ma dokładnie n elementów, więc liczby $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ są parami różne, skąd $\omega^m \neq 1$ dla liczb naturalnych $m < n$ oraz $\omega^n = 1$. Zatem ω jest pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności. $\square$

Z powyższego twierdzenia wynika od razu następujący

Wniosek 3.1. *Dla $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ liczba ϵ_k jest pierwiastkiem pierwotnym n-tego stopnia z jedności wtedy i tylko wtedy, gdy liczby k i n są względnie pierwsze.*

Twierdzenie 3.3 (Zasadnicze Twierdzenie Algebry). *Dla dowolnej liczby naturalnej n i dla dowolnych liczb zespolonych $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takich, że $a_n \neq 0$ równanie algebraiczne*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

posiada pierwiastek zespolony.

Dowód tego twierdzenia jest długi (zostanie podany dopiero na drugim roku).

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 4

Układy równań liniowych

4.1 Podstawowe pojęcia związane z układami równań liniowych

Układem m równań liniowych o niewiadomych x_1, x_2, ..., x_n nad ciałem K nazywamy układ równań postaci:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & \ldots\ldots & . & .. \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. , \tag{4.1}$$

gdzie współczynniki a_{ij} (dla $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$) oraz elementy b_i (dla $i = 1, \ldots, m$) należą do ciała K. Układ ten nazywamy *jednorodnym*, gdy $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Definicja 4.1. Powiemy, że równanie

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \quad = \quad b \tag{4.2}$$

jest *kombinacją liniową równań układu* (4.1), jeżeli istnieją $c_1, c_2, \ldots,$ $c_m \in K$ (zwane *współczynnikami tej kombinacji*) takie, że po pomnożeniu stronami i-tego równania przez c_i dla $i = 1, \ldots, m$ i dodaniu stronami otrzymanych równań uzyskamy równanie (4.2), tzn.

$$b = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \quad \text{oraz} \quad a_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Uwaga 4.1. Zauważmy, że jeśli równanie (4.2) jest kombinacją liniową pewnych równań układu (4.1), to jest ono także kombinacją liniową wszystkich równań tego układu (brakujące współczynniki są równe 0).

Definicja 4.2. *Rozwiązaniem* układu (4.1) nazywamy każdy taki ciąg $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ elementów ciała K, że po zastąpieniu w równaniach tego układu niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elementami $p_1, p_2, \ldots, p_n$ otrzymamy równości prawdziwe w ciele K (tj. gdy $a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n = b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$).

Twierdzenie 4.1. *Każde rozwiązanie układu (4.1) jest rozwiązaniem każdego równania będącego kombinacją liniową równań układu (4.1).*

Dowód. Załóżmy, że równanie (4.2) jest kombinacją liniową o współczynnikach $c_1, c_2, \ldots, c_m$ równań układu (4.1) i niech $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ będzie rozwiązaniem układu (4.1). Wtedy

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}p_1 & + & a_{12}p_2 & + & \ldots & + & a_{1n}p_n & = & b_1 \\ a_{21}p_1 & + & a_{22}p_2 & + & \ldots & + & a_{2n}p_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & \ldots\ldots & . & .. \\ a_{m1}p_1 & + & a_{m2}p_2 & + & \ldots & + & a_{mn}p_n & = & b_m \end{array} \right. ,$$

więc po pomnożeniu obu stron i-tej równości przez c_i dla $i = 1, \ldots, m$ i dodaniu stronami otrzymanych równości uzyskamy na mocy wzorów (4.3), że

$$a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_np_n = b,$$

czyli $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jest rozwiązaniem równania (4.2).□

Definicja 4.3. Dwa układy równań liniowych (U_1) i (U_2) z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ nad ciałem K nazywamy *równoważnymi*, gdy każde równanie układu (U_1) jest kombinacją liniową równań układu (U_2) i odwrotnie. Piszemy wtedy $(U_1) \equiv (U_2)$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Z twierdzenia 4.1 wynika od razu następujące

Twierdzenie 4.2. *Równoważne układy równań liniowych posiadają identyczne zbiory rozwiązań.*

Definicja 4.4. Układ równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy *sprzecznym*, gdy równanie $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n = 1$ jest kombinacją liniową równań tego układu.

Ponieważ równanie $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 1$ nie posiada rozwiązania, więc z powyższej definicji oraz z twierdzenia 4.1 wynika od razu następujące

Twierdzenie 4.3. *Sprzeczny układ równań liniowych nie posiada rozwiązania.*

Lemat 4.1. *Załóżmy, że i-te równanie dla $i = 1, \ldots, k$ układu równań*

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \ldots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{21}x_1 & + & a'_{22}x_2 & + & \ldots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \ldots\ldots & . & \ldots\ldots & . & \ldots & . & \ldots\ldots & . & . \\ a'_{k1}x_1 & + & a'_{k2}x_2 & + & \ldots & + & a'_{kn}x_n & = & b'_k \end{array}\right. , \tag{4.4}$$

jest kombinacją liniową równań układu (4.1) o współczynnikach $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im}$. Jeżeli równanie (4.2) jest kombinacją liniową równań układu (4.4) o współczynnikach $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Wówczas równanie (4.2) jest kombinacją liniową równań układu (4.1) o współczynnikach

$$\sum_{i=1}^{k} c_i c_{i1}, \ \sum_{i=1}^{k} c_i c_{i2}, \ \ldots \ , \sum_{i=1}^{k} c_i c_{im}.$$

Dowód. Na mocy (4.3) mamy, że dla $i = 1, 2, \ldots, k$: $a'_{ij} = \sum_{t=1}^{m} c_{it} a_{tj}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $b'_i = \sum_{t=1}^{m} c_{it} b_t$. Ponadto $a_j = \sum_{i=1}^{k} c_i a'_{ij}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $b = \sum_{i=1}^{k} c_i b'_i$. Zatem dla $j = 1, 2, \ldots, n$:

$a_j = \sum_{i=1}^{k}\left(c_i \cdot \sum_{t=1}^{m} c_{it}a_{tj}\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{m} c_ic_{it}a_{tj} = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} c_ic_{it}a_{tj} =$ $\sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k} c_ic_{it}\right)a_{tj}$ oraz $b = \sum_{i=1}^{k}\left(c_i \cdot \sum_{t=1}^{m} c_{it}b_t\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{t=1}^{m} c_ic_{it}b_t =$ $\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} c_ic_{it}b_t = \sum_{t=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k} c_ic_{it}\right)b_t$, skąd na mocy (4.3) mamy tezę. □

Z lematu wynika od razu, że jeśli równanie $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a$, gdzie $a \neq 0$ jest kombinacją liniową równań układu (4.1), to układ ten jest sprzeczny. Ponadto z lematu wynikają od razu następujące twierdzenia:

Twierdzenie 4.4. *Załóżmy, że układy równań liniowych* (U_1) *i* (U_2) *z* n *niewiadomymi* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *są równoważne. Wówczas układ* (U_1) *jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy układ* (U_2) *jest sprzeczny.*

Twierdzenie 4.5. *Niech* (U_1), (U_2), (U_3) *będą układami równań liniowych z* n *niewiadomymi* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *nad ciałem* K. *Wówczas:*
(i) $(U_1) \equiv (U_1)$;
(ii) jeżeli $(U_1) \equiv (U_2)$, *to* $(U_2) \equiv (U_1)$;
(iii) jeżeli $(U_1) \equiv (U_2)$ *i* $(U_2) \equiv (U_3)$, *to* $(U_1) \equiv (U_3)$.

Problem *rozwiązania układu* równań liniowych polega na znalezieniu **wszystkich** rozwiązań tego układu. Bardzo użyteczne przy rozwiązywaniu tego problemu są tzw. *operacje elementarne.*

4.2 Operacje elementarne nad układem równań liniowych

(i). Zamiana miejscami równania i-tego z równaniem j-tym $(i \neq j)$ oznaczana przez $r_i \leftrightarrow r_j$. Operacja odwrotna: $r_i \leftrightarrow r_j$.
(ii). Pomnożenie i-tego równania przez niezerowy skalar a oznaczana przez $a \cdot r_i$. Operacja odwrotna: $\frac{1}{a} \cdot r_i$.
(iii). Dodanie do i-tego równania równania j-tego $(i \neq j)$ pomnożonego przez dowolny skalar a oznaczana przez $r_i + a \cdot r_j$. Przy tej operacji

zmieniamy tylko równanie i-te! Operacja odwrotna: $r_i + (-a) \cdot r_j$.
(iv). Wykreślenie powtarzających się kopii pewnego równania.
(v). Wykreślenie równań postaci $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ (gdy liczba równań jest większa od 1).
(vi). Zamiana kolejności niewiadomych x_i oraz x_j $(i \neq j)$ w każdym równaniu oznaczana przez $x_i \leftrightarrow x_j$. W wyniku zastosowania tej operacji równanie

$$a_1x_1 + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_jx_j + \ldots + a_nx_n = b$$

przechodzi na równanie

$$a_1x_1 + \ldots + a_jx_j + \ldots + a_ix_i + \ldots + a_nx_n = b.$$

Z definicji układów równoważnych mamy zatem, że jeśli układ (U_2) powstaje z układu (U_1) przez wykonanie operacji elementarnej, to układy (U_1) i (U_2) są równoważne. Zatem z twierdzeń 4.2, 4.4 i 4.5 przez prostą indukcję otrzymujemy stąd od razu następujące

Twierdzenie 4.6. *Załóżmy, że układ (U') równań liniowych powstaje z układu (U) przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych. Wówczas układy te są równoważne, mają te same zbiory rozwiązań i układ (U) jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy układ (U') jest sprzeczny.*

Na twierdzeniu 4.6 opiera się metoda rozwiązywania układów równań liniowych zwana *metodą eliminacji Gaussa.*

4.3 Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa polega na znalezieniu dla danego układu (4.1), (w którym $a_{ij} \neq 0$ dla pewnych i, j) przy pomocy operacji elementarnych równoważnego mu układu (4.5), który po ewentualnej

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

permutacji niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$ ma postać:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + c_{1\,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \quad x_2 \qquad\quad + c_{2\,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad x_3 \qquad + c_{3\,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{3n}x_n = d_3 \\ \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_k + c_{k\,k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 = d_{k+1} \end{cases} . \tag{4.5}$$

Jeżeli $d_{k+1} \neq 0$, to układ (4.5) jest sprzeczny (i z twierdzenia 4.3 nie ma rozwiązania), a więc na mocy twierdzenia 4.6, układ (4.1) też jest sprzeczny i nie ma rozwiązania.
Jeżeli $d_{k+1} = 0$ i $k = n$, to układ (4.1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie:

$$x_1 = d_1\ , x_2 = d_2,\ \ldots\ , x_n = d_n. \tag{4.6}$$

Jeżeli $d_{k+1} = 0$ oraz $k < n$, to $x_{k+1},\ x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$ są dowolnymi skalarami (nazywamy je *parametrami*), zaś pozostałe niewiadome wyliczamy z równań układu (4.5), tzn.

$$x_i = d_i - c_{i\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{in}x_n \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k. \tag{4.7}$$

Aby sprowadzić układ (4.1) do postaci (4.5) należy najpierw przy pomocy operacji elementarnych przekształcić go do układu postaci:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} . \tag{4.8}$$

Robimy to np. w ten sposób, że najpierw znajdujemy element $a_{ij} \neq 0$, a następnie przez operacje: $x_1 \leftrightarrow x_j$, $r_1 \leftrightarrow r_i$, $\frac{1}{a_{ij}} \cdot r_1$ doprowadzamy układ (4.1) do postaci (4.8).

Następnie przy pomocy równania pierwszego eliminujemy zmienną x_1 z pozostałych równań układu (4.8) przez wykonanie operacji:

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$r_2 - a'_{21} \cdot r_1, r_3 - a'_{31} \cdot r_1, \ldots, r_m - a'_{m1} \cdot r_1$. Otrzymamy wówczas układ postaci:

$$\begin{cases} x_1 + & a"_{12}x_2 + & \ldots + & a"_{1n}x_n = b"_1 \\ & a"_{22}x_2 + & \ldots + & a"_{2n}x_n = b"_2 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a"_{m2}x_2 + & \ldots + & a"_{mn}x_n = b"_m \end{cases} . \tag{4.9}$$

Następnie stosujemy nasz algorytm do układu:

$$\begin{cases} a"_{12}x_2 + & \ldots + & a"_{1n}x_n = b"_1 \\ a"_{22}x_2 + & \ldots + & a"_{2n}x_n = b"_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a"_{m2}x_2 + & \ldots + & a"_{mn}x_n = b"_m \end{cases} \tag{4.10}$$

nie ruszając pierwszego równania układu (4.9). Po skończonej liczbie kroków uzyskamy układ postaci:

$$\begin{cases} x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 + & \ldots + e_{1k}x_k + e_{1\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{1n}x_n & = f_1 \\ \qquad x_2 + e_{23}x_3 + & \ldots + e_{2k}x_k + e_{2\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{2n}x_n & = f_2 \\ \qquad\qquad x_3 + & \ldots + e_{3k}x_k + e_{3\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{3n}x_n & = f_3 \\ \qquad\qquad\quad \ddots & \vdots & \\ & x_k + e_{k\,k+1}x_{k+1} + \ldots + e_{kn}x_n & = f_k \\ & 0 & = f_{k+1} \end{cases} .$$

Jeżeli $f_{k+1} \neq 0$, to otrzymany układ jest sprzeczny, a więc też układ (4.1) jest sprzeczny. Jeżeli zaś $f_{k+1} = 0$, to przy pomocy operacji: $r_1 - e_{1k} \cdot r_k$, $r_2 - e_{2k} \cdot r_k$,...,$r_{k-1} - e_{k-1\,k} \cdot r_k$ eliminujemy zmienną x_k z początkowych $k-1$ równań. Później eliminujemy zmienną x_{k-1} z wcześniejszych równań przy pomocy $k-1$-szego równania, itd.
W końcu, po skończonej liczbie kroków, uzyskamy w ten sposób układ (4.5).

Zauważmy jeszcze, że przy stosowaniu metody eliminacji Gaussa liczba równań układu nie zwiększa się. Oznacza to, że **jeśli w układzie (4.1) liczba równań jest mniejsza od liczby niewiadomych, to układ ten nie może mieć dokładnie jednego rozwiązania!**

Ponadto, jeśli układ (4.1) nie ma rozwiązania, to na mocy twierdzenia 4.6, układ (4.5) też nie posiada rozwiązania, a więc $d_{k+1} \neq 0$. Stąd układ (4.5) jest sprzeczny i na mocy twierdzenia 4.6 układ (4.1) też jest sprzeczny. Uwzględniając twierdzenie 4.3 udowodniliśmy w ten sposób następujące

Twierdzenie 4.7. *Układ równań liniowych jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy nie posiada rozwiązania.*

Rozdział 5

Wyznaczniki I

5.1 Permutacje

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Niech $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Każdą bijekcję $f : X_n \longrightarrow X_n$ nazywamy *permutacją* zbioru X_n. Ponieważ zbiór X_n jest skończony, więc funkcja $f : X_n \longrightarrow X_n$ jest permutacją wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowa (lub równoważnie, wtedy i tylko wtedy, gdy f jest "na").

Zbiór wszystkich permutacji zbioru X_n oznaczamy przez S_n. Jak wiadomo ze szkoły średniej S_n posiada dokładnie $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ elementów. Ze wstępu do matematyki wynika, że złożenie permutacji zbioru X_n jest permutacją tego zbioru, składanie permutacji jest łączne, posiada element neutralny e, którym jest przekształcenie tożsamościowe zbioru X_n w siebie i ponadto każda permutacja $f \in S_n$ posiada przekształcenie odwrotne f^{-1}, które też jest permutacją zbioru X_n (oczywiście $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$).

Permutację $f \in S_n$ wygodnie jest zapisywać w postaci dwuwierszowej tablicy

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(i) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

w której w pierwszym wierszu umieszczone są wszystkie elementy zbioru X_n (najczęściej w porządku rosnącym), zaś w drugim wierszu umieszczone są kolejne obrazy tych elementów przy odwzorowaniu f. Zatem na przykład

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Inwersją permutacji $f \in S_n$ nazywamy taki podzbiór dwuelementowy $\{i, j\}$ zbioru X_n, że $i < j$ oraz $f(i) > f(j)$. Zbiór wszystkich inwersji permutacji $f \in S_n$ oznaczamy przez I_f. Np. $I_e = \emptyset$, więc $|I_e| = 0$, czyli **permutacja tożsamościowa nie posiada inwersji**.

Przykład 5.1. Niech $i, j \in X_n$, $i < j$. Oznaczmy przez (i, j) permutację zbioru X_n, która zamienia miejscami elementy i, j oraz nie zmienia pozostałych elementów zbioru X_n (takie permutacje nazywamy *transpozycjami*). Zatem

$$(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots i-1 & i & i+1 \dots j-1 & j & j+1 \dots n \\ 1 & 2 \dots i-1 & j & i+1 \dots j-1 & i & j+1 \dots n \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Stąd $I_{(i,j)} = \{\underbrace{\{i, i+1\}, \{i, i+2\}, \{i, i+3\}, \dots, \{i, j-1\}, \{i, j\}}_{j-i},$

$\underbrace{\{i+1, j\}, \{i+2, j\}, \{i+3, j\}, \dots, \{j-1, j\}}_{(j-1)-i}\}$.

Zatem $|I_{(i,j)}| = (j - i) + (j - 1) - i = 2(j - i) - 1$. Uzyskaliśmy więc, że **każda transpozycja posiada nieparzystą liczbę wszystkich inwersji**.□

Znakiem permutacji $f \in S_n$ nazywamy liczbę $sgn(f)$ określoną wzorem:

$$sgn(f) = (-1)^{|I_f|}. \tag{5.4}$$

Powiemy, że permutacja $f \in S_n$ jest *parzysta*, jeśli $sgn(f) = 1$ oraz że f jest nieparzysta, jeśli $sgn(f) = -1$. Zatem z przykładu 5.1 mamy, że **dowolna transpozycja jest permutacją nieparzystą**. Ponieważ $sgn(e) = (-1)^0 = 1$, więc permutacja tożsamościowa jest parzysta. Zbiór wszystkich permutacji parzystych $f \in S_n$ będziemy oznaczali przez A_n.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 5.1. *Dla dowolnych permutacji $f, g \in S_n$ zachodzi wzór:*

$$sgn(f \circ g) = sgn(f) \cdot sgn(g). \tag{5.5}$$

W szczególności $sgn(f^{-1}) = sgn(f)$.

Dowód. Oznaczmy przez P_n rodzinę wszystkich podzbiorów dwuelementowych zbioru X_n. Niech $h \in S_n$. Weźmy dowolne $A \in P_n$. Wtedy $A = \{i, j\}$ dla pewnych $i, j \in X_n$, $i \neq j$. Oznaczmy $sgn_h(A) = sgn\left(\frac{h(i)-h(j)}{i-j}\right)$. Określenie to jest poprawne, bo $\frac{h(j)-h(i)}{j-i} = \frac{-(h(i)-h(j))}{-(i-j)} = \frac{h(i)-h(j)}{i-j}$. Ponadto $A \in I_h \Leftrightarrow sgn_h(A) = -1$. Wynika stąd wzór:

$$sgn(h) = \prod_{A \in P_n} sgn_h(A). \tag{5.6}$$

Łatwo zauważyć, że dowolna permutacja $g \in S_n$ wyznacza bijekcję $G : P_n \longrightarrow P_n$ przy pomocy wzoru $G(A) = \{g(i), g(j)\}$ dla $A = \{i, j\}$. Wynika stąd, że dla dowolnych $f, g \in S_n$ zachodzi wzór:

$$sgn(f) = \prod_{A \in P_n} sgn_f(G(A)). \tag{5.7}$$

Ponadto dla $A \in P_n$ mamy, że

$$sgn_f(G(A)) \cdot sgn_g(A) = sgn_{f \circ g}(A). \tag{5.8}$$

Rzeczywiście, $A = \{i, j\}$ dla pewnych $i, j \in X_n$, $i \neq j$ oraz $sgn_f(G(A)) = sgn_f(\{g(i), g(j)\}) = sgn\left(\frac{f(g(i))-f(g(j))}{g(i)-g(j)}\right)$ oraz $sgn_g(A) = sgn\left(\frac{g(i)-g(j)}{i-j}\right)$. Ale $sgn(x) \cdot sgn(y) = sgn(x \cdot y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, więc

$$sgn_f(G(A)) \cdot sgn_g(A) = sgn\left(\frac{f(g(i)) - f(g(j))}{g(i) - g(j)} \cdot \frac{g(i) - g(j)}{i - j}\right) =$$

$$sgn\left(\frac{(f \circ g)(i) - (f \circ g)(j)}{i - j}\right) = sgn_{f \circ g}(A).$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Zatem na mocy (5.6), (5.8) i (5.7) mamy, że $sgn(f \circ g) = \prod\limits_{A \in P_n} sgn_{f \circ g}(A) = \prod\limits_{A \in P_n} [sgn_f(G(A)) \cdot sgn_g(A)] = \prod\limits_{A \in P_n} sgn_f(G(A)) \cdot \prod\limits_{A \in P_n} sgn_g(A) = \prod\limits_{A \in P_n} sgn_f(A) \cdot \prod\limits_{A \in P_n} sgn_g(A) = sgn(f) \cdot sgn(g)$.

W szczególności mamy stąd, że $1 = sgn(e) = sgn(f \circ f^{-1}) = sgn(f) \cdot sgn(f^{-1})$, czyli $sgn(f^{-1}) = sgn(f)$. Kończy to dowód naszego twierdzenia. □

5.2 Określenie macierzy

Niech K będzie dowolnym ciałem oraz niech n i m będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Prostokątną tablicę

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

utworzoną z elementów a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ ciała K nazywamy $m \times n$*-macierzą* nad ciałem K. Elementy a_{ij} nazywamy *wyrazami* macierzy. Rzędy pionowe nazywamy *kolumnami*, a poziome - *wierszami* tej macierzy. Zatem element a_{ij} stoi w i-tym wierszu i j-tej kolumnie rozpatrywanej macierzy.

$n \times n$-macierze, nazywamy *macierzami kwadratowymi stopnia* n.

Dwie macierze nazywamy równymi, jeżeli jako tablice są identyczne.

Oznaczenia macierzy: A, B, C, itd.

Dla macierzy (5.9) piszemy też:

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \tag{5.10}$$

Macierzą transponowaną A^T $m \times n$-macierzy A postaci (5.9) nazywamy taką $n \times m$-macierz, która jako swą i-tą kolumnę, dla $i = 1, 2, \dots, m$, ma i-ty wiersz macierzy A. Zatem

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{5.11}$$

5.3 Określenie wyznacznika

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ stopnia n nad ciałem K nazywamy następujący element ciała K:

$$\det(A) = \sum_{f \in S_n} sgn(f) \cdot a_{1f(1)} \cdot a_{2f(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nf(n)}. \tag{5.12}$$

Wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ będziemy też oznaczali symbolem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.13}$$

Stopień macierzy kwadratowej A nazywa się również *stopniem wyznacznika* tej macierzy, zaś wiersze (kolumny) macierzy A nazywamy *wierszami (kolumnami) wyznacznika* tej macierzy.

Przykład 5.2. Udowodnimy, że dla dowolnych elementów a, b, c, d ciała K zachodzi wzór:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c. \tag{5.14}$$

Zauważmy, że $S_2 = \{e, g\}$, gdzie $g = (1, 2)$ jest transpozycją. Zatem $sgn(e) = 1$ i $sgn(g) = -1$. Ponadto $a_{11} = a$, $a_{12} = b$, $a_{21} = c$, $a_{22} = d$,

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

więc na mocy definicji wyznacznika $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \sum_{f\in S_2} sgn(f)\cdot a_{1f(1)}\cdot a_{2f(2)}$
$= sgn(e)\cdot a_{11}\cdot a_{22} + sgn(g)\cdot a_{12}\cdot a_{21} = a\cdot d - b\cdot c.$ □

Przykład 5.3. Udowodnimy, że nad dowolnym ciałem K zachodzi wzór:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Mamy tutaj $n = 3$ oraz S_3 składa się z następujących elementów: e, $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ponadto $sgn(e) = 1$, f_1, f_2, f_4 są transpozycjami, więc $sgn(f_1) = sgn(f_2) = sgn(f_4) = -1$ oraz $|I_{f_3}| = 2$ i $|I_{f_5}| = 2$, czyli $sgn(f_3) = sgn(f_5) = 1$. Zatem z definicji wyznacznika mamy, że $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{f\in S_3} sgn(f)a_{1f(1)}a_{2f(2)}a_{3f(3)} =$
$sgn(e)a_{11}a_{22}a_{33} + sgn(f_1)a_{11}a_{23}a_{32} + sgn(f_2)a_{12}a_{21}a_{33} + sgn(f_3)a_{12}a_{23}a_{31} + sgn(f_4)a_{13}a_{22}a_{31} + sgn(f_5)a_{13}a_{21}a_{32} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$, skąd z własności dodawania w ciele wynika nasz wzór. Jednak podany wyżej wzór na wyznacznik stopnia 3 jest zbyt skomplikowany do zapamiętania. W związku z tym do obliczania wyznaczników stopnia 3 stosuje się tzw. *regułę Sarrusa*. Polega ona na dopisaniu z prawej strony wyznacznika dwóch jego pierwszych kolumn i następnie wymnożeniu prawoskośnie wyrazów ze znakiem + oraz lewoskośnie ze znakiem - i dodaniu otrzymanych wyników. Istotnie: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$
$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Można sprawdzić, że do tego samego rezultatu prowadzi też dopisywanie u dołu wyznacznika dwóch jego pierwszych wierszy. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Przykład 5.4. Udowodnimy, że zachodzi wzór:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

Niech $f \in S_n$ oraz $f \neq e$. Wtedy istnieje największa liczba naturalna k taka, że $f(k) \neq k$. Zatem $f(k+1) = k+1, f(k+2) = k+2, \dots, f(n) = n$, skąd wynika, że $f(k) < k$, czyli $a_{kf(k)} = 0$. Zatem z definicji wyznacznika mamy, że $\det(A) = \sum\limits_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = sgn(e) a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 6

Wyznaczniki II

6.1 Własności wyznaczników

Wszystkie macierze występujące w podanych niżej własnościach są macierzami kwadratowymi nad ustalonym ciałem K, którego elementy będziemy nazywali *skalarami*.

Uwaga 6.1. Niech I oraz J będą niepustymi skończonymi zbiorami, niech $\phi : I \longrightarrow J$ będzie bijekcją i niech $a_j \in K$ dla $j \in J$. Wtedy $\sum\limits_{i \in I} a_{\phi(i)} = \sum\limits_{j \in J} a_j$, gdyż sumujemy te same elementy, lecz być może w innym porządku.

Własność 6.1. Wyznacznik macierzy kwadratowej A jest równy wyznacznikowi jej macierzy transponowanej A^T:

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ i $A^T = [b_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$. Wtedy $b_{ij} = a_{ji}$ dla $i, j = 1, \dots, n$. Zatem z definicji wyznacznika:

$$\det(A^T) = \sum_{f \in S_n} sgn(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} =$$

$$\sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{f(1)1} a_{f(2)2} \dots a_{f(n)n}.$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Zauważmy, że dla $f \in S_n$ zachodzi równość

$$\{(f(i), i) : i = 1, 2, \ldots, n\} = \{(j, f^{-1}(j)) : j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ale $sgn(f) = sgn(f^{-1})$ na mocy twierdzenia 5.1 oraz z przemienności i łączności mnożenia w ciele mamy, że

$$\det(A^T) = \sum_{f \in S_n} sgn(f^{-1}) a_{1f^{-1}(1)} a_{2f^{-1}(2)} \ldots a_{nf^{-1}(n)}.$$

Ponadto przekształcenie $f \mapsto f^{-1}$ dla $f \in S_n$ jest bijekcją zbioru S_n na zbiór S_n, więc z uwagi 6.1:

$$\det(A^T) = \sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \ldots a_{nf(n)} = \det(A)\Box$$

Uwaga 6.2. Z własności 6.1 wynika, że **każda własność wyznacznika sformułowana w języku wierszy (kolumn) jest prawdziwa w przetłumaczeniu na język kolumn (wierszy).** Z tego powodu wszędzie dalej będziemy dowodzili tylko jednej wersji takich własności.

Własność 6.2. Jeżeli macierz kwadratowa B powstaje z macierzy kwadratowej A przez pomnożenie wszystkich elementów pewnego jej wiersza (kolumny) przez ustalony skalar a, to

$$\det(B) = a \cdot \det(A).$$

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$, $a \in K$ i złóżmy, że macierz $B = [b_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ powstaje z A przez pomnożenie k-tego wiersza przez a. Wtedy $b_{kj} = aa_{kj}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $b_{ij} = a_{ij}$ dla $i \neq k$ oraz $j = 1, 2, \ldots, n$. Zatem z definicji wyznacznika

$$\det(B) = \sum_{f \in S_n} sgn(f) b_{1f(1)} \ldots b_{kf(k)} \ldots b_{nf(n)} =$$

$$= \sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} \ldots (aa_{kf(k)}) \ldots a_{nf(n)} =$$

$$= a \cdot \sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} \ldots a_{kf(k)} \ldots a_{nf(n)} = a \cdot \det(A).\Box$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Uwaga 6.3. Podstawiając $a = 0$ w własności 6.2 uzyskamy, że jeżeli pewien wiersz (kolumna) macierzy kwadratowej A składa się z samych zer, to $\det(A) = 0$.

Własność 6.3. Niech $g \in S_n$ i niech macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A stopnia n w ten sposób, że i-ty wiersz (kolumnę) macierzy A przestawiamy na miejsce o numerze $g(i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas

$$\det(B) = sgn(g) \cdot \det(A).$$

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ oraz $B = [b_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$. Wtedy z założenia wynika, że $b_{ij} = a_{f(i)j}$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n$. Z określenia wyznacznika mamy, że $\det(B) = \sum\limits_{f \in S_n} sgn(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)} =$ $\sum\limits_{f \in S_n} sgn(f) a_{g(1)f(1)} a_{g(2)f(2)} \cdots a_{g(n)f(n)}$. Ale $\{(g(i), f(i)) : i = 1, 2, \dots, n\}$ $= \{(j, (g^{-1} \circ f)(j)) : j = 1, 2, \dots, n\}$, więc z przemienności i łączności mnożenia w ciele mamy, że

$$a_{g(1)f(1)} a_{g(2)f(2)} \cdots a_{g(n)f(n)} = a_{1(g^{-1} \circ f)(1)} a_{2(g^{-1} \circ f)(2)} \cdots a_{n(g^{-1} \circ f)(n)}$$

dla $f \in S_n$. Ponadto z twierdzenia 5.1 wynika, że $sgn(f) = sgn(g) \cdot sgn(g^{-1} \circ f)$ dla $f \in S_n$, więc

$$\det(B) = sgn(g) \cdot \sum_{f \in S_n} sgn(g^{-1} \circ f) a_{1(g^{-1} \circ f)(1)} a_{2(g^{-1} \circ f)(2)} \cdots a_{n(g^{-1} \circ f)(n)}.$$

Ale przekształcenie $f \mapsto g^{-1} \circ f$ dla $f \in S_n$ jest bijekcją zbioru S_n na S_n, więc z uwagi 6.1

$$\det(B) = sgn(g) \cdot \sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = sgn(g) \cdot \det(A). \square$$

Uwaga 6.4. Jak wiemy $sgn(g) = -1$ dla dowolnej transpozycji g. Zatem z własności 6.3 wynika, że jeżeli macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A stopnia $n \geq 2$ przez zamianę miejscami dwóch

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

jej wierszy (kolumn), to $\det(B) = -\det(A)$ (czyli wyznacznik zmienia znak!).

Własność 6.4. Niech elementy l-tego wiersza (kolumny) wyznacznika będą sumami k-składników:

$$a_{lj} = x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{kj} \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Wówczas wyznacznik jest sumą k wyznaczników, które mają prócz l-tego wiersza (kolumny) te same wiersze (kolumny) co pierwotny wyznacznik. Natomiast l-ty wiersz (kolumna) i-tego wyznacznika dla $i = 1, 2, \ldots, k$ ma postać:

$$x_{i1}\ x_{i2}\ \ldots\ x_{in}.$$

Dowód. Oznaczmy pierwotny wyznacznik przez W, zaś pozostałe wyznaczniki przez $W_1, W_2, \ldots, W_k$ odpowiednio. Wówczas z definicji wyznacznika mamy, że

$$W = \sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} \ldots (x_{1f(l)} + x_{2f(l)} + \ldots + x_{kf(l)}) \ldots a_{nf(n)} =$$

$$\sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} \ldots x_{1f(l)} \ldots a_{nf(n)} + \sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} \ldots x_{2f(l)} \ldots a_{nf(n)}$$

$$+ \ldots + \sum_{f \in S_n} sgn(f) a_{1f(1)} \ldots x_{kf(l)} \ldots a_{nf(n)} = W_1 + W_2 + \ldots + W_k. \ \square$$

Własność 6.5. Jeśli w macierzy kwadratowej dwa wiersze lub dwie kolumny są identyczne, to jej wyznacznik jest równy 0.

Dowód. Załóżmy, że i-ty wiersz macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ jest identyczny z k-tym $(i < k)$ wierszem tej macierzy. Wtedy

$$a_{ij} = a_{kj} \text{ dla } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Ale $(i,k) \circ (i,k) = e$ i $sgn((i,k)) = -1$, więc na mocy twierdzenia 5.1 przekształcenie $f \mapsto f \circ (i,k)$ dla $f \in A_n$ jest bijekcją zbioru A_n na zbiór $S_n \setminus A_n$. Zatem z uwagi 6.1 mamy, że

$$\sum_{g \in S_n \setminus A_n} sgn(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \ldots a_{ng(n)} =$$

$$-\sum_{f \in A_n} a_{1(f\circ(i,k))(1)} a_{2(f\circ(i,k))(2)} \ldots a_{n(f\circ(i,k))(n)},$$

gdyż $sgn(g) = -1$ dla $g \in S_n \setminus A_n$. Ale dla $f \in A_n$ mamy, że $f((i,k)(i)) = f(k)$, $f((i,k)(k)) = f(i)$ oraz dla $t \neq i,k$ jest $f((i,k)(t)) = f(t)$, więc na mocy (6.1)

$a_{1(f\circ(i,k))(1)} \dots a_{i(f\circ(i,k))(i)} \dots a_{k(f\circ(i,k))(k)} \dots a_{n(f\circ(i,k))(n)} =$

$a_{1f(1)} \dots a_{if(k)} \dots a_{kf(i)} \dots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \dots a_{if(i)} \dots a_{kf(k)} \dots a_{nf(n)}$.

Stąd $\det(A) = \sum_{g \in S_n} sgn(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)} =$

$$= \sum_{g \in A_n} sgn(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)} + \sum_{g \in S_n \setminus A_n} sgn(g) a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)} =$$

$$= \sum_{f \in A_n} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} - \sum_{f \in A_n} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \dots a_{nf(n)} = 0. \square$$

Własność 6.6. Wyznacznik nie zmienia wartości, gdy do elementów jednego wiersza (kolumny) dodać odpowiednie elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez ustalony skalar.

Dowód. Niech macierz B powstaje z macierzy kwadratowej A przez dodanie do l-tego wiersza wiersza k-tego ($l \neq k$) pomnożonego przez skalar a. Oznaczmy przez C macierz, która powstaje z macierzy A przez zastąpienie jej l-tego wiersza wierszem k-tym. Wtedy na mocy własności 6.5 mamy, że $\det(C) = 0$. Ponadto z własności 6.4 i 6.2 mamy, że $\det(B) = \det(A) + a \cdot \det(C) = \det(A) + a \cdot 0 = \det(A)$. $\square$

6.2 Operacje elementarne na macierzy

Bardzo ważne znaczenie w algebrze liniowej odgrywają tzw. *operacje elementarne* na wierszach lub kolumnach macierzy. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie $m \times n$-macierzą nad ciałem K.

1. Operacje elementarne na wierszach macierzy A:

(i) Pomnożenie i-tego wiersza macierzy A przez niezerowy skalar a. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od i, zaś każdy wyraz i-tego wiersza mnożymy przez a. Operację tę oznaczamy symbolem $a \cdot w_i$.

(ii) Zamiana miejscami i-tego wiersza macierzy A z wierszem j-tym ($i \neq j$) macierzy A. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o nume-

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

rach różnych od i oraz j. Operację tę oznaczamy symbolem $w_i \leftrightarrow w_j$.

(iii) Dodanie do j-tego wiersza macierzy A i-tego $(i \neq j)$ wiersza tej macierzy pomnożonego przez dowolny skalar a. Przy tej operacji nie zmieniamy wierszy o numerach różnych od j. Operację tę oznaczamy przez $w_j + a \cdot w_i$.

2. Operacje elementarne na kolumnach macierzy A:

(i) Pomnożenie i-tej kolumny macierzy A przez niezerowy skalar a. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od i, zaś każdy wyraz i-tej kolumny mnożymy przez a. Operację tę oznaczamy symbolem $a \cdot k_i$.

(ii) Zamiana miejscami i-tej kolumny macierzy A z kolumną j-tą $(i \neq j)$ macierzy A. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od i oraz j. Operację tę oznaczamy symbolem $k_i \leftrightarrow k_j$.

(iii) Dodanie do j-tej kolumny macierzy A i-tej $(i \neq j)$ kolumny tej macierzy pomnożonego przez dowolny skalar a. Przy tej operacji nie zmieniamy kolumn o numerach różnych od j. Operację tę oznaczamy symbolem $k_j + a \cdot k_i$.

6.3 Obliczanie wyznacznika za pomocą operacji elementarnych

Stosując algorytm podobny do eliminacji Gaussa możemy każdą macierz kwadratową A stopnia n nad ciałem K sprowadzić do tzw. postaci *trójkątnej górnej*:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wówczas z przykładu 5.4 mamy, że $\det(B) = b_{11}b_{22}\dots b_{nn}$. Ponadto z własności wyznacznika podanych w rozdziale 5 wynika, że

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(B) \neq 0.$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Przykład 6.1.
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \overset{w_2-w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\overset{w_3+w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix} \overset{w_4+3\cdot w_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} \overset{w_2+w_4}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} \overset{w_3+2\cdot w_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \\ 0 & -3 & -5 & -19 \end{vmatrix} \overset{w_4+3\cdot w_2}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix} = (-9)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -26 & -61 \end{vmatrix} \overset{w_4+26\cdot w_3}{=}$$

$$(-9)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = (-9)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 17 = -153. \square$$

Rozdział 7

Rozwinięcie Laplace'a i wzory Cramera

7.1 Rozwinięcie Laplace'a

Rozważmy macierz kwadratową A stopnia $n \geq 2$ nad ciałem K:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

Dla $i, j = 1, 2, \dots, n$ oznaczmy przez A_{ij} macierz kwadratową stopnia $n - 1$, która powstaje z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Zatem

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.2}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Zauważmy, że jeśli w macierzy

$$A[i,j] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & 0 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

zamienimy miejscami j-tą kolumnę z kolumną $j+1$-szą, następnie $j+1$-szą a $j+2$-gą itd., w końcu zamienimy $n-1$-szą kolumnę z n-tą kolumną (wykonamy więc $n-j$ zamian), to otrzymamy macierz:

$$A'[i,j] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} & a_{ij} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Ponadto z uwagi 6.4 mamy, że

$$\det(A'[i,j]) = (-1)^{n-j} \cdot \det(A[i,j]). \tag{7.5}$$

Następnie w macierzy (7.4) zamieńmy miejscami i-ty wiersz z $i+1$-szym, $i+1$-szy wiersz z $i+2$-gim itd. , w końcu zamieńmy miejscami $n-1$-szy wiersz z n-tym (wykonamy więc $n-i$ zamian). Otrzymamy

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

wtedy macierz

$$A''[i,j] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} & 0 \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} & a_{ij} \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Z uwagi 6.4 oraz z (7.5) mamy, że $\det(A''[i,j]) = (-1)^{n-i} \cdot \det(A'[i,j]) = (-1)^{n-i} \cdot (-1)^{n-j} \cdot \det(A[i,j]) = (-1)^{-i-j} \cdot \det(A[i,j])$, więc

$$\det(A[i,j]) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A''[i,j]). \tag{7.7}$$

Ponadto z (7.2) i (7.6) mamy, że

$$(A''[i,j])_{nn} = A_{ij}. \tag{7.8}$$

Lemat 7.1. *Niech b_{ij} dla $i,j = 1,2,\dots,n$ będą elementami ciała K takimi, że $b_{in} = 0$ dla $i = 1,2,\dots,n-1$. Niech* $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn-1} & b_{nn} \end{bmatrix}$. *Wtedy* $\det(B) = b_{nn} \cdot \det(B_{nn})$.

Dowód. Z definicji wyznacznika mamy, że

$$\det(B) = \sum_{f \in S_n} sgn(f) b_{1f(1)} b_{2f(2)} \dots b_{nf(n)}.$$

Niech $T_n = \{f \in S_n : f(n) = n\}$. Jeśli $f \in S_n \setminus T_n$, to $f(n) \neq n$, więc istnieje $i < n$ takie, że $f(i) = n$, skąd $a_{if(i)} = 0$. Zatem $\det(B) = \sum_{f \in T_n} sgn(f) b_{1f(1)} \dots b_{n-1f(n-1)} b_{nn} = b_{nn} \cdot \sum_{f \in T_n} sgn(f) b_{1f(1)} \dots b_{n-1f(n-1)}$.
Ale przekształcenie $g \mapsto \bar{g}$ dla $g \in S_{n-1}$ dane wzorem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n-1) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n-1) & n \end{pmatrix}$$

jest bijekcją zbioru S_{n-1} na zbiór T_n, przy czym $I_g = I_{\bar{g}}$, więc $sgn(g) = sgn(\bar{g})$ dla $g \in S_{n-1}$. Zatem z uwagi 6.1 mamy, że
$\det(B) = b_{nn} \cdot \sum\limits_{g \in S_{n-1}} sgn(g) b_{1g(1)} b_{2g(2)} \dots b_{n-1 g(n-1)} = b_{nn} \cdot \det(B_{nn})$. □

Z (7.8),(7.7) oraz z lematu 7.1 mamy, że

$$\det(A[i,j]) = (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}). \tag{7.9}$$

Ponadto $a_{kj} = \underbrace{0 + \ldots + 0}_{k-1} + a_{kj} + \underbrace{0 + \ldots + 0}_{n-k}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, więc z własności 6.4 wyznacznika w wersji dla kolumn mamy, że

$$\det(A) = \det(A[1,j]) + \det(A[2,j]) + \ldots + \det(A[n,j]). \tag{7.10}$$

Zatem z (7.10) oraz z (7.9) uzyskujemy następujące

Twierdzenie 7.1 (Laplace'a dla kolumn). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ stopnia $n \geq 2$ nad ciałem K i dla każdego $j = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi wzór:*

$$\det(A) =$$
$$(-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}).$$

Z własności 6.1 wyznacznika otrzymujemy stąd też następujące

Twierdzenie 7.2 (Laplace'a dla wierszy). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ stopnia $n \geq 2$ nad ciałem K i dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi wzór:*

$$\det(A) =$$
$$(-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}).$$

Wniosek 7.1. *Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ nad ciałem K. Wówczas dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$:*

(i) $a_{i1}(-1)^{j+1}\det(A_{j1})+a_{i2}(-1)^{j+2}\det(A_{j2})+\ldots+a_{in}(-1)^{j+n}\det(A_{jn}) = 0$ *oraz*
(ii) $a_{1i}(-1)^{1+j}\det(A_{1j})+a_{2i}(-1)^{2+j}\det(A_{2j})+\ldots+a_{ni}(-1)^{n+j}\det(A_{nj}) = 0$.

Dowód. Zastąpmy w macierzy A wiersz j-ty wierszem i-tym. Wówczas otrzymana macierz A' ma dwa wiersze równe, więc z własności 6.5 wyznacznika mamy, że $\det(A') = 0$. Ale $A'_{ij} = A_{ij}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, więc stosując rozwinięcie Laplace'a względem j-tego wiersza macierzy A' uzyskamy, że $0 = \det(A') = a_{i1}(-1)^{j+1}\det(A_{j1}) + a_{i2}(-1)^{j+2}\det(A_{j2}) + \ldots + a_{in}(-1)^{j+n}\det(A_{jn})$, co kończy dowód (i).

Dowód (ii) jest analogiczny. □

Uwaga 7.1. Niech $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$ nad ciałem K. Wówczas skalar

$$(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \tag{7.11}$$

nazywamy *dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} w macierzy A. Wniosek 7.1 możemy zatem wypowiedzieć następująco: **Suma elementów jakiejś kolumny (wiersza) pomnożonych przez odpowiednie dopełnienia algebraiczne elementów innej kolumny (wiersza) jest równa 0**.

7.2 Wzory Cramera

Niech dany będzie układ n równań liniowych z n niewiadomymi x_1, x_2, ..., x_n nad ciałem K:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \tag{7.12}$$

Oznaczmy przez A_i (dla $i = 1, 2, \ldots, n$) macierz powstającą z macierzy A tego układu przez zastąpienie i-tej kolumny macierzy A kolumną

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

wyrazów wolnych $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. Zatem

$$A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

$W = \det(A)$ nazywamy *wyznacznikiem głównym* układu (7.12). Ponadto oznaczmy $W_i = \det(A_i)$ dla $i = 1, \dots, n$. Wówczas zachodzi następujące

Twierdzenie 7.3 (Cramera). *Jeżeli wyznacznik główny układu (7.12) jest różny od zera, to układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorami Cramera:*

$$x_1 = \frac{W_1}{W},\ x_2 = \frac{W_2}{W},\ \dots,\ x_n = \frac{W_n}{W}. \tag{7.13}$$

Jeżeli zaś $W = 0$, ale $W_i \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \dots, n$, to układ (7.12) nie posiada rozwiązania.

Dowód. Załóżmy, że $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in K^n$ jest rozwiązaniem układu (7.12). Weźmy dowole $i = 1, 2, \dots, n$ i pomnóżmy j-te równanie przez $(-1)^{j+i} \det(A_{ji})$ dla $j = 1, 2, \dots, n$, a następnie dodajmy stronami. Wówczas z wniosku 7.1(ii) i z twierdzenia Laplace'a dla kolumn uzyskamy, że $\det(A) \cdot p_i = b_1(-1)^{1+i} \det(A_{1i}) + b_2(-1)^{2+i} \det(A_{2i}) + \dots + b_n(-1)^{n+i} \det(A_{ni})$. Ale stosując rozwinięcie Laplace'a względem i-tej kolumny uzyskamy, że

$$W_i = b_1(-1)^{1+i} \det(A_{1i}) + \dots + b_n(-1)^{n+i} \det(A_{ni}), \tag{7.14}$$

więc

$$W \cdot p_i = W_i \ \text{ dla } \ i = 1, 2, \dots, n. \tag{7.15}$$

Jeżeli zatem $W = 0$ oraz $W_i \neq 0$ dla pewnego i, to na mocy (7.15) mamy sprzeczność, czyli w tym przypadku układ (7.12) nie posiada rozwiązania. Jeżeli zaś $W \neq 0$, to $p_i = \frac{W_i}{W}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Pozostaje zatem wykazać, że dla $W \neq 0$ ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dany wzorami (7.13) jest rozwiązaniem układu (7.12). Dla $i = 1, 2, \dots, n$ na mocy (7.14) mamy, że $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{W_j}{W} =$
$\frac{1}{W} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}W_j = \frac{1}{W} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k(-1)^{k+j}\det(A_{kj}) \right) =$
$\frac{1}{W} \cdot \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_k(-1)^{k+j}\det(A_{kj}) = \frac{1}{W} \cdot \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_k(-1)^{k+j}\det(A_{kj}) =$
$\frac{1}{W} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(b_k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{k+j}\det(A_{kj}) \right)$. Ale na mocy wniosku 7.1(i) dla $k \neq i$ będzie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{k+j}\det(A_{kj}) = 0$ oraz $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) =$ $\det(A) = W$ na mocy twierdzenia Laplace'a, więc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots +$ $a_{in}x_n = \frac{1}{W}b_iW = b_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Zatem ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dany wzorami (7.13) jest rozwiązaniem układu (7.12). □

Uwaga 7.2. Zauważmy, że twierdzenie Cramera nic nie mówi o przypadku, gdy $W = W_1 = W_2 = \dots = W_n = 0$. W takim przypadku układ (7.12) może nie mieć rozwiązania albo może mieć więcej niż jedno rozwiązanie. Należy wówczas zastosować inną metodę, np. eliminację Gaussa.

Uwaga 7.3. Układ równań (7.12), w którym $\det(A) \neq 0$ nazywa się *układem Cramera.*

Z uwagi 6.3 oraz z twierdzenia Cramera mamy natychmiast następujący

Wniosek 7.2. *Jednorodny układ Cramera posiada dokładnie jedno rozwiązanie:* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. □

Przykład 7.1. Stosując wzory Cramera rozwiążemy nad ciałem $\mathbb{R}$ układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}.$$

Obliczamy najpierw wyznacznik główny naszego układu. Stosujemy kolejno: operacje $k_4 + k_1$, $k_3 + k_1$, $k_2 + k_1$, rozwinięcie Laplace'a względem czwartego wiersza, rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza:

$$\mathrm{W}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$(-1)\cdot 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(7-24) = (-3)\cdot(-17) = 51$. Stąd $W = 51 \neq 0$, więc z twierdzenia Cramera układ nasz posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Obliczamy teraz wyznacznik W_1 stosując kolejno: operacje $k_1 + k_2$, $k_3 - k_4$, $k_2 + 2\cdot k_4$, rozwinięcie Laplace'a względem pierwszego wiersza, operację $k_2 + k_3$, rozwinięcie Laplace'a względem drugiego wiersza:

$$W_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$\begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, bo w ostatnim wyznaczniku mamy dwie identyczne kolumny. Postępując podobnie obliczamy: $W_2 = 0$ i $W_3 = 51$. Zatem ze wzorów Cramera: $x_1 = \frac{W_1}{W} = 0$, $x_2 = \frac{W_2}{W} = 0$ oraz $x_3 = \frac{W_3}{W} = 1$. Wyznacznika W_4 nie musimy już obliczać, bo z pierwszego równania $x_4 = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2 = 0 + 0 - 1 + 2 = 1$.□

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 8

Algebra macierzy

8.1 Podstawowe operacje na macierzach

Oznaczmy przez $M_{m\times n}(K)$ zbiór wszystkich $m \times n$ macierzy nad ciałem K. Jeżeli $A \in M_{m\times n}(K)$, to przez $[A]_{ij}$ będziemy oznaczali wyraz stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie macierzy A. Przypomnijmy też, że elementy ciała K nazywamy *skalarami*.

1. Mnożenie macierzy przez skalar. *Iloczynem macierzy* $A \in M_{m\times n}(K)$ *przez skalar* $a \in K$ nazywamy macierz $a \cdot A \in M_{m\times n}(K)$ taką, że

$$[a \cdot A]_{ij} = a \cdot [A]_{ij} \;\text{ dla wszystkich }\; i = 1, \dots, m; \;\; j = 1, \dots, n. \tag{8.1}$$

Zatem **aby pomnożyć macierz A przez skalar a należy wszystkie jej wyrazy pomnożyć przez ten skalar**. Zauważmy, że z tego określenia wynikają od razu wzory:

$$(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A) \text{ dla dowolnych } a, b \in K, \;\; A \in M_{m\times n}(K). \tag{8.2}$$

$$1 \cdot A = A \;\text{ dla każdego }\; A \in M_{m\times n}(K). \tag{8.3}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

2. Dodawanie macierzy. *Sumą macierzy* $A, B \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy macierz $A+B \in M_{m\times n}(K)$ taką, że

$$[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \text{ dla wszystkich } i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n. \tag{8.4}$$

Z tego określenia dla dowolnych $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$, $a, b \in K$ wynikają od razu wzory:

$$A + B = B + A. \tag{8.5}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C. \tag{8.6}$$

$$(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot B. \tag{8.7}$$

$$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B. \tag{8.8}$$

Oznaczmy przez $0_{m\times n}$ taką $m\times n$-macierz, której wszystkie współrzędne są równe 0, czyli $[0_{m\times n}]_{ij} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$. Macierz tę nazywamy *macierzą zerową.*

Z określenia dodawania macierzy wynika, że dla dowolej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$:

$$A + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A = A. \tag{8.9}$$

Macierzą przeciwną do macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy macierz $-A \in M_{m\times n}(K)$ taką, że

$$[-A]_{ij} = -[A]_{ij} \text{ dla wszystkich } i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n. \tag{8.10}$$

Z tego określenia oraz z definicji dodawania macierzy wynika od razu, że dla dowolnej macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}, \tag{8.11}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$$(-1) \cdot A = -A. \tag{8.12}$$

3. Odejmowanie macierzy. *Różnicą macierzy* $A, B \in M_{m\times n}(K)$ nazywamy macierz $A - B \in M_{m\times n}(K)$ taką, że

$$[A - B]_{ij} = [A]_{ij} - [B]_{ij} \text{ dla } i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n. \tag{8.13}$$

Zatem dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{m\times n}(K)$:

$$A - B = A + (-B). \tag{8.14}$$

4. Mnożenie macierzy. Iloczyn $A \cdot B$ macierzy A i B o współczynnikach z ciała K określamy jedynie wówczas, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Niech $A \in M_{m\times n}(K)$ i $B \in M_{n\times k}(K)$. *Iloczynem macierzy A i B* nazywamy macierz $A \cdot B \in M_{m\times k}(K)$ taką, że

$$[A \cdot B]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot [B]_{tj} \text{ dla } i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, k. \tag{8.15}$$

Zatem aby pomnożyć macierz $A \in M_{m\times n}(K)$ przez macierz $B \in M_{n\times k}(K)$ należy pierwszy wiersz macierzy A pomnożyć (skalarnie) przez pierwszą kolumnę macierzy B, następnie należy pomnożyć pierwszy wiersz macierzy A przez drugą kolumnę macierzy B, itd. W ten sposób uzyskamy kolejne wyrazy pierwszego wiersza macierzy $A \cdot B$. Aby otrzymać drugi wiersz macierzy $A \cdot B$ należy pomnożyć drugi wiersz macierzy A przez kolejne kolumny macierzy B. W końcu należy pomnożyć ostatni wiersz macierzy A kolejno przez wszystkie kolumny macierzy B.

Przykład 8.1. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Wówczas $B \cdot A$ nie ma sensu (gdyż ilość kolumn macierzy B nie jest równa ilości wierszy macierzy A) oraz $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, bo

$$\begin{array}{ll} 1\cdot 2 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 9 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 9 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 3 \end{array}.$$

Wynika stąd, że mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 8.1. *Dla dowolnych macierzy $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times k}(K)$ zachodzi wzór:*

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Dowód. Z określenia macierzy transponowanej wynika, że $A^T \in M_{n\times m}(K)$, $B^T \in M_{k\times n}(K)$ oraz $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$ dla $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ i $[B^T]_{ij} = [B]_{ji}$ dla $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$. Zatem $B^T \cdot A^T \in M_{k\times m}(K)$, $(A \cdot B)^T \in M_{k\times m}(K)$. Ponadto dla wszystkich możliwych i,j:

$$[(A \cdot B)^T]_{ij} = [A \cdot B]_{ji} = \sum_{t=1}^{m} [A]_{jt} \cdot [B]_{ti} = \sum_{t=1}^{m} [A^T]_{tj} \cdot [B^T]_{it} =$$

$$= \sum_{t=1}^{m} [B^T]_{it} \cdot [A^T]_{tj} = [B^T \cdot A^T]_{ij}. \ \square$$

Twierdzenie 8.2. *Mnożenie macierzy jest łączne tzn. dla dowolnych macierzy $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times r}(K), C \in M_{r\times s}(K)$:*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Dowód. Mamy, że $A{\cdot}B \in M_{m\times r}(K)$, $B{\cdot}C \in M_{n\times s}(K)$, $(A{\cdot}B){\cdot}C \in M_{m\times s}(K)$, $A{\cdot}(B{\cdot}C) \in M_{m\times s}(K)$. Zatem macierze $A{\cdot}(B{\cdot}C)$ i $(A{\cdot}B){\cdot}C$ mają te same wymiary. Ponadto dla wszystkich możliwych i, j:

$$[(A \cdot B) \cdot C]_{ij} = \sum_{t=1}^{r} [A \cdot B]_{it} \cdot [C]_{tj} \sum_{t=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{n} [A]_{il} \cdot [B]_{lt} \right) \cdot [C]_{tj} =$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \sum_{l=1}^{n} ([A]_{il} \cdot [B]_{lt}) \cdot [C]_{tj} = \sum_{t=1}^{r} \sum_{l=1}^{n} [A]_{il} \cdot ([B]_{lt} \cdot [C]_{tj}) =$$

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{t=1}^{r} [A]_{il} \cdot ([B]_{lt} \cdot [C]_{tj}) = \sum_{l=1}^{n} \left([A]_{il} \cdot \sum_{t=1}^{r} [B]_{lt} \cdot [C]_{tj} \right) =$$

$$\sum_{l=1}^{n} [A]_{il} \cdot [B \cdot C]_{lj} = [A \cdot (B \cdot C)]_{ij}. \ \square$$

Twierdzenie 8.3. *Dla każdego $a \in K$ i dla dowolnych macierzy $A \in M_{m\times n}(K), B \in M_{n\times k}(K)$:*

$$a \cdot (A \cdot B) = (a \cdot A) \cdot B = A \cdot (a \cdot B).$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Dowód. Dla $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$: $[(a \cdot A) \cdot B]_{ij} =$
$= \sum_{t=1}^{n} [a \cdot A]_{it} \cdot [B]_{tj} = \sum_{t=1}^{n} (a \cdot [A]_{it}) \cdot [B]_{tj} = a \cdot \sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot [B]_{tj} =$
$= a \cdot [A \cdot B]_{ij} = [a \cdot (A \cdot B)]_{ij}$ oraz $[A \cdot (a \cdot B)]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot [a \cdot B]_{tj} =$
$\sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot (a \cdot [B]_{tj}) = a \cdot \sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot [B]_{tj} = a \cdot [A \cdot B]_{ij} = [a \cdot (A \cdot B)]_{ij}$.
$\square$

Twierdzenie 8.4. *Mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania macierzy tzn.*

(i) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ *dla dowolnych* $A \in M_{m\times n}(K)$, $B, C \in M_{n\times k}(K)$ *oraz*

(ii) $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ *dla dowolnych* $B, C \in M_{m\times n}(K)$, $A \in M_{n\times k}(K)$.

Dowód. (i). Wystarczy wykazać, że dla wszystkich możliwych i, j: $[A \cdot (B+C)]_{ij} = [A \cdot B + A \cdot C]_{ij}$. Ale $[A \cdot (B+C)]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} [A]_{it}[B+C]_{tj} =$
$\sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot ([B]_{tj} + [C]_{tj}) = \sum_{t=1}^{n} ([A]_{it} \cdot [B]_{tj} + [A]_{it} \cdot [C]_{tj}) =$
$\sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot [B]_{tj} + \sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot [C]_{tj} = [A \cdot B]_{ij} + [A \cdot C]_{ij} = [A \cdot B + A \cdot C]_{ij}$.

(ii) można udowodnić podobnie jak (i). $\square$

8.2 Algebra macierzy kwadratowych

Będziemy dalej pisali $M_n(K)$ zamiast $M_{n\times n}(K)$ oraz 0_n zamiast $0_{n\times n}$. Dla dowolnych $A, B \in M_n(K)$ mamy, że $A + B, A \cdot B \in M_n(K)$. Ponadto mnożenie macierzy kwadratowych jest łączne i rozdzielne względem dodawania macierzy.

Przykład 8.2. Niech $n \geq 2$ oraz niech $A, B \in M_n(K)$ będą takimi macierzami, że $[A]_{11} = 1$ i $[A]_{ij} = 0$ dla pozostałych i, j oraz $[B]_{12} = 1$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

i $[B]_{ij} = 0$ dla pozostałych i, j. Wtedy $B \cdot A = 0_n$ oraz $A \cdot B = B$. Zatem $A \cdot B \neq B \cdot A$, czyli mnożenie macierzy kwadratowych stopnia większego od 1 nie jest przemienne!. □

Macierzą jednostkową stopnia n nazywamy macierz $I_n \in M_n(K)$, która ma na głównej przekątnej same jedynki, zaś na pozostałych miejscach same zera tzn. $[I_n]_{ii} = 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $[I_n]_{ij} = 0$ dla wszystkich $i \neq j$.

Twierdzenie 8.5. *Macierz jednostkowa stopnia n jest elementem neutralnym mnożenia macierzy w zbiorze $M_n(K)$ tzn.*

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$.

Dowód. Dla wszystkich $i, j = 1, 2, \dots, n$ mamy, że $[I_n \cdot A]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} [I_n]_{it} \cdot [A]_{tj} = [I_n]_{ii} \cdot [A]_{ij} = 1 \cdot [A]_{ij} = [A]_{ij}$ oraz $[A \cdot I_n]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} [A]_{it} \cdot [I_n]_{tj} = [A]_{ij} \cdot [I_n]_{jj} = [A]_{ij} \cdot 1 = [A]_{ij}$. Zatem $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$ dla każdego $A \in M_n(K)$. □

Macierzą skalarną stopnia n nazywamy macierz postaci:

$$a \cdot I_n \text{ dla dowolnego } a \in K.$$

Zatem macierz skalarna ma na głównej przekątnej wspólny skalar a, zaś na pozostałych miejscach same zera. Z poznanych własności mnożenia macierzy mamy, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ i dla dowolnego $a \in K$ jest $(a \cdot I_n) \cdot A = a \cdot (I_n \cdot A) = a \cdot A$ oraz $A \cdot (a \cdot I_n) = a \cdot (A \cdot I_n) = a \cdot A$.

Twierdzenie 8.6 (Cauchy'ego). *Dla dowolnych macierzy kwadratowych A i B tego samego stopnia nad ciałem K zachodzi wzór:*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Dowód. Niech $A, B \in M_n(K)$. Wówczas $[A \cdot B] = \sum_{s=1}^{n} [A]_{is} \cdot [B]_{sj}$ dla $i, j = 1, 2, \dots, n$. Zatem każdy wyraz i-tego wiersza macierzy $A \cdot B$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

jest sumą n składników postaci $[A]_{is} \cdot [B]_{sj}$. Oznaczmy przez H_j j-tą kolumnę macierzy $A \cdot B$ oraz przez A_j j-tą kolumnę macierzy A. Wtedy będziemy mieli, że

$$H_j = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{n} [A]_{1s}[B]_{sj} \\ \sum_{s=1}^{n} [A]_{2s}[B]_{sj} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^{n} [A]_{ns}[B]_{sj} \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{n} [B]_{sj} \cdot A_s.$$

Zatem $A \cdot B = \left[\sum_{s_1=1}^{n} [B]_{s_1 1} \cdot A_{s_1}, \sum_{s_2=1}^{n} [B]_{s_2 2} \cdot A_{s_2}, \ldots, \sum_{s_n=1}^{n} [B]_{s_n n} \cdot A_{s_n} \right]$,
skąd z własności 6.4 stosowanej n-krotnie będziemy mieli, że

$$\det(A \cdot B) =$$
$$\sum_{s_1=1}^{n} \sum_{s_2=1}^{n} \cdots \sum_{s_n=1}^{n} [B]_{s_1 1}[B]_{s_2 2} \ldots [B]_{s_n n} \det([A_{s_1}, A_{s_2}, \ldots, A_{s_n}]).$$

Ale jeżeli dwie kolumny macierzy są identyczne, to jej wyznacznik jest równy 0, więc tylko te składniki naszej sumy mogą być niezerowe, dla których s_j i s_k są różne dla $j \neq k$, czyli tylko te, dla których $s_1, s_2, \ldots, s_n$ jest permutacją liczb $1, 2, \ldots, n$. Ale dla $f \in S_n$ na mocy własności 6.3:
$\det([A_{f(1)}, A_{f(2)}, \ldots, A_{f(n)}]) = sgn(f) \cdot \det([A_1, A_2, \ldots, A_n]) = sgn(f) \cdot \det(A)$, więc $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \sum_{f \in S_n} sgn(f)[B]_{f(1)1}[B]_{f(2)2} \ldots [B]_{f(n)n}$
$= \det(A) \cdot \det(B^T) = \det(A) \cdot \det(B)$. □

Definicja 8.1. *Macierzą dopełnień* macierzy $A \in M_n(K)$ nazywamy macierz postaci

$$D(A) = \left[(-1)^{i+j} \det(A_{ij})\right]_{i,j=1,2,\ldots,n}. \tag{8.16}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 8.7. *Dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ zachodzi wzór:*

$$A \cdot D(A) = D(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n.$$

Dowód. Dla dowolnych $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$[A \cdot D(A)]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} [A]_{it}[D(A)]_{tj} = \sum_{t=1}^{n} [A]_{it}(-1)^{t+j} \det(A_{tj}).$$

Zatem z twierdzenia Laplace'a oraz z wniosku 7.1: $[A \cdot D(A)]_{ii} = \det(A)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz dla $i \neq j$: $[A \cdot D(A)]_{ij} = 0$. Stąd $A \cdot D(A) = \det(A) \cdot I_n$.

Podobnie dla $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$[A \cdot D(A)]_{ij} = \sum_{t=1}^{n} [D(A)]_{it}[A]_{tj} = \sum_{t=1}^{n} (-1)^{i+t} \det(A_{it})[A]_{tj},$$

więc z twierdzenia Laplace'a i z wniosku 7.1, $[D(A) \cdot A]_{ii} = \det(A)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz dla $i \neq j$ mamy, że $[D(A) \cdot A]_{ij} = 0$. Zatem $D(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$. □

8.3 Odwracanie macierzy

Definicja 8.2. Powiemy, że macierz $A \in M_n(K)$ jest *odwracalna*, jeżeli istnieje taka macierz $B \in M_n(K)$, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \tag{8.17}$$

Uwaga 8.1. Macierz B we wzorze (8.17) jest wyznaczona jednoznacznie (przez macierz A). Rzeczywiście, niech dodatkowo $C \in M_n(K)$ będzie takie, że $A \cdot C = C \cdot A = I_n$. Wtedy $C = C \cdot I_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B$, czyli $C = B$. W związku z tym macierz B nazywamy *macierzą odwrotną do macierzy* A i oznaczamy przez A^{-1}.

Twierdzenie 8.8. *Macierz $A \in M_n(K)$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det(A) \neq 0$. *Jeżeli* $\det(A) \neq 0$, *to zachodzi wzór:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T. \tag{8.18}$$

Dowód. Załóżmy, że macierz A jest odwracalna. Wtedy istnieje macierz $B \in M_n(K)$ taka, że $A \cdot B = I_n$. Zatem z twierdzenia Cauchy'ego $\det(A) \cdot \det(B) = \det(I_n)$. Ale $\det(I_n) = 1$, więc $\det(A) \cdot \det(B) = 1$, skąd $\det(A) \neq 0$.

Na odwrót, załóżmy, że $\det(A) \neq 0$. Wówczas z twierdzenia 8.7: $A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T\right) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \left(A \cdot D(A)^T\right) = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\det(A) \cdot I_n) = I_n$ i podobnie $\left(\frac{1}{\det(A)} \cdot D(A)^T\right) \cdot A = I_n$. Zatem macierz A jest odwracalna i zachodzi wzór (8.18). □

Uwaga 8.2. Macierze $A \in M_n(K)$ o wyznaczniku różnym od zera nazywamy *macierzami nieosobliwymi*.

Twierdzenie 8.9. *Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_n(K)$ następujące warunki są równoważne:*
(i) $B = A^{-1}$,
(ii) $A \cdot B = I_n$,
(iii) $B \cdot A = I_n$.

Dowód. Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ jest oczywista.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Niech $A \cdot B = I_n$. Wtedy z twierdzenia Cauchy'ego $\det(A) \cdot \det(B) = \det(I_n) = 1$, skąd $\det(A) \neq 0$ i na mocy twierdzenia 8.8 istnieje A^{-1}. Stąd $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot I_n$, czyli $(A^{-1} \cdot A) \cdot B = A^{-1}$, a więc $I_n \cdot B = A^{-1}$, czyli $B = A^{-1}$. Zatem z określenia macierzy odwrotnej $B \cdot A = I_n$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Załóżmy, że $B \cdot A = I_n$. Wtedy z twierdzenia Cauchy'ego: $\det(B) \cdot \det(A) = \det(I_n) = 1$, czyli $\det(A) \neq 0$. Zatem z twierdzenia 8.8 istnieje A^{-1} oraz $(B \cdot A) \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1}$, więc $B \cdot (A \cdot A^{-1}) = A^{-1}$, skąd $B \cdot I_n = A^{-1}$, a zatem $B = A^{-1}$. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 8.10. *Iloczyn macierzy odwracalnych jest macierzą odwracalną. Dokładniej, jeżeli macierze $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(K)$ są odwracalne, to zachodzi wzór:*

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdot A_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}. \tag{8.19}$$

Dowód. Zauważmy, że $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_m) \cdot (A_m^{-1} \cdot A_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = (A_1 \cdot \ldots \cdot A_{m-1}) \cdot (A_{m-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = \ldots = A_1 \cdot A_1^{-1} = I_n$. Zatem na mocy twierdzenia 8.9 mamy tezę. □

8.4 Odwracanie macierzy przy pomocy operacji elementarnych

Z definicji mnożenia macierzy wynika, że dla dowolnej macierzy $A \in M_n(K)$ operacji elementarnej na wierszach macierzy A odpowiada pomnożenie macierzy A z lewej strony przez macierz, która powstaje z macierzy jednostkowej I_n przez wykonanie na niej tej samej operacji.

Stosując operacje elementarne na wierszach nieosobliwej macierzy A możemy ją przekształcić przy pomocy algorytmu Gaussa do macierzy jednostkowej I_n. Wynika stąd, że istnieją macierze $B_1, B_2, \ldots, B_s$ takie, że

$$B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A = I_n. \tag{8.20}$$

Zatem $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1$, czyli $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot I_n$. Stąd **macierz A^{-1} powstaje z macierzy I_n przez wykonanie na niej tych samych operacji elementarnych, co na macierzy A.**

W praktyce przy obliczaniu macierzy odwrotnej do macierzy nieosobliwej A przy pomocy operacji elementarnych na wierszach postępujemy w sposób następujący. Z prawej strony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową I_n tego samego stopnia. Na wierszach otrzymanej w ten sposób macierzy blokowej $[A|I_n]$ wykonujemy operacje elementarne aż do uzyskania macierzy blokowej postaci $[I_n|B]$. Macierz B jest wtedy macierzą odwrotną do macierzy A, tj. $B = A^{-1}$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 9

Przestrzenie liniowe

9.1 Określenie przestrzeni liniowej

Niech K będzie dowolnym ciałem, V-niepustym zbiorem, w którym określone jest działanie dodawania $+$ i operacja $\circ : K \times V \longrightarrow V$ mnożenia przez elementy z ciała K (przy czym dla $a \in K$ oraz $\alpha \in V$ będziemy pisali $a \circ \alpha$ zamiast $\circ((a, \alpha))$) oraz wyróżniony jest element $\Theta \in V$.

Elementy zbioru V będziemy nazywali *wektorami*, wektor Θ *wektorem zerowym*, a elementy ciała K *skalarami*. Używać będziemy greckich liter do oznaczania wektorów, a łacińskich do oznaczania skalarów.

Zbiór V (z działaniem $+$, operacją $\circ$ mnożenia przez skalary z ciała K oraz wyróżnionym elementem Θ) nazywamy *przestrzenią liniową nad ciałem K*, jeśli spełnione są następujące warunki (*aksjomaty przestrzeni liniowych*):

A1. $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ \alpha + \beta = \beta + \alpha$, tj. *działanie $+$ jest przemienne*;

A2. $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in V}\ \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, tj. *działanie $+$ jest łączne*;

A3. $\forall_{\alpha\in V}\ \alpha + \Theta = \alpha$, tj. *wektor Θ jest elementem neutralnym działania $+$*;

A4. $\forall_{\alpha\in V}\exists_{\delta\in V}\ \alpha + \delta = \Theta$;

A5. $\forall_{\alpha,\beta\in V}\forall_{a\in K}\ a \circ (\alpha + \beta) = a \circ \alpha + a \circ \beta$;

A6. $\forall_{\alpha\in V}\forall_{a,b\in K}\ (a + b) \circ \alpha = a \circ \alpha + b \circ \alpha$;

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

A7. $\forall_{\alpha\in V}\forall_{a,b\in K}\ (a\cdot b)\circ\alpha = a\circ(b\circ\alpha)$;
A8. $\forall_{\alpha\in V}\ 1\circ\alpha=\alpha$.

9.2 Przykłady przestrzeni liniowych

Przykład 9.1. Zbiór jednoelementowy $V=\{\alpha\}$ z działaniem $+$ takim, że $\alpha+\alpha=\alpha$ oraz wyróżnionym elementem $\Theta=\alpha$ jest przestrzenią liniową nad dowolnym ciałem K, jeżeli mnożenie $\circ$ określimy wzorem: $a\circ\alpha=\alpha$ dla każdego $a\in K$. Przestrzenie takiej postaci nazywamy *zerowymi.* □

Przykład 9.2. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, a K dowolnym ciałem. Niech K^n będzie zbiorem wszystkich ciągów postaci $[a_1,a_2,\ldots,a_n]$, gdzie $a_1,\ldots,a_n\in K$. Sumę dwu ciągów $\alpha=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$, $\beta=[b_1,b_2,\ldots,b_n]$ określamy jako $[a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n]$; iloczyn $a\circ\alpha$ dla $a\in K$ określamy jako $[aa_1,aa_2,\ldots,aa_n]$. Niech ponadto $\Theta=[\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n}]$. Łatwo sprawdzić, że aksjomaty **A1-A8** są w tym przypadku spełnione, a więc zbiór K^n z tak określonym dodawaniem i mnożeniem przez skalary oraz z wyróżnionym wektorem Θ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Przestrzeń tę oznacza się przez K^n i nazywa n-wymiarową przestrzenią liniową współrzędnych nad ciałem K. Dla wektora $[a_1,a_2,\ldots,a_n]\in K^n$ element a_i dla $i=1,2,\ldots,n$ nazywamy *i-tą współrzędną* lub i-tą składową tego wektora. □

Przykład 9.3. Dla dowolnego ciała K oznaczmy przez K^∞ zbiór wszystkich ciągów nieskończonych $[a_1,a_2,\ldots]$ o wyrazach z tego ciała. Dodawanie takich ciągów i mnożenie przez skalary określamy następująco:

$$[a_1,a_2,\ldots]+[b_1,b_2,\ldots]=[a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots],$$

$$a\circ[a_1,a_2,\ldots]=[aa_1,aa_2,\ldots].$$

Natomiast wektor zerowy określamy jako $\Theta=[0,0,\ldots]$. Łatwo sprawdzić, że wówczas aksjomaty **A1-A8** też są spełnione. Otrzymaną w ten sposób przestrzeń liniową oznaczamy przez K^∞. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Przykład 9.4. Niech L będzie dowolnym ciałem. Wówczas podzbiór $K \subseteq L$ zawierający 0 i 1, który jest ciałem ze względu na wszystkie działania określone w ciele L nazywamy *podciałem ciała* L. W tej sytuacji L z działaniem dodawania $+$ ciała, operacją mnożenia przez elementy z ciała K i wyróżnionym elementem $\Theta = 0$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Oznaczamy ją przez L_K. W szczególności ciało K jest przestrzenią liniową nad K oraz $\mathbb{R}$ jest w naturalny sposób przestrzenią liniową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. $\square$

Przykład 9.5. Zbiór $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach rzeczywistych ze zwykłym dodawaniem wielomianów i z naturalnym mnożeniem wielomianów przez liczby rzeczywiste oraz z wyróżnionym elementem $\Theta = 0$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Oznaczamy ją przez $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Przykład 9.6. Niech m i n będą ustalonymi liczbami naturalnymi i niech K będzie ciałem. Wówczas zbiór $M_{m\times n}(K)$ wszystkich $m \times n$-macierzy o wyrazach z ciała K z naturalnym dodawaniem macierzy i mnożeniem przez skalary oraz z wyróżnionym elementem $\Theta = 0_{m\times n}$ tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K. Oznaczamy ją przez $M_{m\times n}(K)$. $\square$

Przykład 9.7. Zbiór wszystkich równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \dots, x_n$ o współczynnikach z ciała K, z naturalnym dodawaniem równań stronami i naturalną operacją mnożenia równań przez skalary oraz z wektorem Θ rozumianym jako równanie $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ jest przestrzenią liniową. $\square$

Przykład 9.8. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem i niech K będzie ciałem. Oznaczmy przez K^X zbiór wszystkich funkcji $f : X \to K$. Dodawanie funkcji z tego zbioru określamy wzorem:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ dla } x \in X.$$

Natomiast mnożenie przez skalary określamy wzorem:

$$(a \circ f)(x) = a \cdot f(x) \text{ dla } x \in X.$$

Łatwo sprawdzić, że w ten sposób otrzymujemy przestrzeń liniową nad ciałem K, którą oznaczamy przez K^X. □

9.3 Własności działań na wektorach

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wówczas

Własność 9.1. Prawo skracania równości:

$$\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in V}[\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow \beta=\gamma].$$

Dowód. Załóżmy, że $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$. Z **A4** i z **A1** istnieje $\delta\in V$ takie, że $\delta+\alpha=\Theta$. Zatem z **A2** mamy, że $(\delta+\alpha)+\beta=(\delta+\alpha)+\gamma$, czyli $\Theta+\beta=\Theta+\gamma$, a więc z **A3** i **A1** $\beta=\gamma$. □

Własność 9.2. Dla każdego wektora $\alpha\in V$ istnieje dokładnie jeden wektor $\delta\in V$ taki, że $\alpha+\delta=\Theta$.

Dowód. Istnienie takiego wektora δ wynika z **A4**. Jeśli zaś $\delta_1\in V$ jest takie, że $\alpha+\delta_1=\Theta$, to $\alpha+\delta_1=\alpha+\delta$, więc z własności 9.1 mamy, że $\delta_1=\delta$. □

Uwaga 9.1. Wektor $\delta\in V$ taki, że $\alpha+\delta=\Theta$ nazywamy *wektorem przeciwnym do wektora* α i oznaczamy przez $-\alpha$. Ponieważ z **A1** $(-\alpha)+\alpha=\Theta$, więc α jest wektorem przeciwnym do wektora $(-\alpha)$, czyli mamy wzór:

$$-(-\alpha)=\alpha \text{ dla każdego } \alpha\in V. \tag{9.1}$$

Uwaga 9.2. Można udowodnić, że suma n wektorów z przestrzeni V nie zależy od sposobu rozstawienia nawiasów. Ponadto z przemienności dodawania wektorów wynika, że suma n wektorów nie zależy też od kolejności składników.

Własność 9.3. Dla dowolnych wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in V$ zachodzi wzór:

$$-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=(-\alpha_1)+(-\alpha_2)+\ldots+(-\alpha_n). \tag{9.2}$$

Dowód. Mamy, że $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + [(-\alpha_1) + \ldots + (-\alpha_n)] = (\alpha_1 + (-\alpha_1)) + \ldots + (\alpha_n + (-\alpha_n)) = \Theta + \ldots + \Theta = \Theta$. Zatem wektor $(-\alpha_1) + \ldots + (-\alpha_n)$ jest wektorem przeciwnym do wektora $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, skąd mamy nasz wzór. □

Własność 9.4. Dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta \in V$ istnieje dokładnie jeden wektor $\gamma \in V$ taki, że $\alpha + \gamma = \beta$. Mianowicie $\gamma = \beta + (-\alpha)$. Będziemy go nazywali *różnicą wektorów* α i β i oznaczali przez $\beta - \alpha$.

Dowód. Mamy, że $\alpha + [\beta + (-\alpha)] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = \Theta + \beta = \beta$. Jeżeli ponadto $\gamma_1 \in V$ jest takie, że $\alpha + \gamma_1 = \beta$, to $\alpha + \gamma_1 = \alpha + \gamma$, więc z własności 9.1 mamy, że $\gamma_1 = \gamma$. □

Uwaga 9.3. Oczywiście dla dowolnego wektora $\alpha \in V$: $\alpha - \alpha = \Theta$, bo $\alpha - \alpha = \alpha + (-\alpha) = \Theta$.

Własność 9.5. $0 \circ \alpha = \Theta$ dla dowolnego wektora $\alpha \in V$.

Dowód. Ponieważ $0 = 0+0$, więc na mocy **A6**: $0 \circ \alpha = (0+0) \circ \alpha = 0 \circ \alpha + 0 \circ \alpha$. Zatem z **A3** $0 \circ \alpha + \Theta = 0 \circ \alpha + 0 \circ \alpha$ i z własności 9.1 $\Theta = 0 \circ \alpha$. □

Własność 9.6. $-\alpha = (-1) \circ \alpha$ dla dowolnego wektora $\alpha \in V$.

Dowód. Ponieważ $\alpha = 1 \circ \alpha$ na mocy **A8**, więc z **A6** $\alpha + (-1) \circ \alpha = 1 \circ \alpha + (-1) \circ \alpha = (1 + (-1)) \circ \alpha = 0 \circ \alpha = \Theta$ na mocy własności 9.5. □

Własność 9.7. $a \circ \Theta = \Theta$ dla każdego $a \in K$.

Dowód. Z **A3** mamy, że $\Theta = \Theta + \Theta$, więc na mocy **A5**: $a \circ \Theta = a \circ (\Theta + \Theta) = a \circ \Theta + a \circ \Theta$, czyli na mocy **A3**, $a \circ \Theta + \Theta = a \circ \Theta + a \circ \Theta$, więc z własności 9.1, $\Theta = a \circ \Theta$. □

Własność 9.8. $a \circ \alpha \neq \Theta$ dla dowolnych $0 \neq a \in K$, $\Theta \neq \alpha \in V$.

Dowód. Załóżmy, że $0 \neq a \in K$, $\Theta \neq \alpha \in V$ i $a \circ \alpha = \Theta$. Wtedy z własności 9.7 mamy, że $\Theta = a^{-1} \circ (a \circ \alpha) = (a^{-1} \cdot a) \circ \alpha = 1 \circ \alpha = \alpha$ na mocy **A7** i **A8**, skąd $\alpha = \Theta$ i mamy sprzeczność. □

Uwaga 9.4. Z własności 9.5, 9.7 i 9.8 wynika od razu, że dla dowolnych $a \in K$, $\alpha \in V$:

$$a \circ \alpha = \Theta \Leftrightarrow [a = 0 \text{ lub } \alpha = \Theta].$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Własność 9.9. $(-a) \circ \alpha = a \circ (-\alpha) = -(a \circ \alpha)$ dla dowolnych $a \in K$, $\alpha \in V$.

Dowód. Na mocy **A6** i własności 9.5 mamy, że $(-a) \circ \alpha + a \circ \alpha = ((-a) + a) \circ \alpha = 0 \circ \alpha = \Theta$, skąd $(-a) \circ \alpha = -(a \circ \alpha)$. Ponadto z **A5** i własności 9.7 $a \circ (-\alpha) + a \circ \alpha = a \circ (\alpha + (-\alpha)) = a \circ \Theta = \Theta$, więc $a \circ (-\alpha) = -(a \circ \alpha)$. □

Własność 9.10. Dla dowolnego $a \in K$ i dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in V$:

$$a \circ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = a \circ \alpha_1 + a \circ \alpha_2 + \ldots + a \circ \alpha_n.$$

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 2$ teza wynika z **A5**. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in V$. Wtedy z założenia indukcyjnego

$$a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) = a \circ \alpha_1 + \ldots + a \circ \alpha_n.$$

Zatem na mocy **A5** $a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) = a \circ ((\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + \alpha_{n+1}) = a \circ (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) + a \circ \alpha_{n+1} = a \circ \alpha_1 + \ldots + a \circ \alpha_n + a \circ \alpha_{n+1}$, czyli teza zachodzi dla liczby $n + 1$. □

Z własności 9.10 i z **A7** wynika od razu

Własność 9.11. Dla dowolnych $a, a_1, \ldots, a_n \in K$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$:

$$a \circ (a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = (a \cdot a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a \cdot a_n) \circ \alpha_n.$$

Uwaga 9.5. Z udowodnionych własności działań na wektorach można łatwo wyprowadzić następujące prawa rachunkowe dotyczące odejmowania wektorów:

$$\alpha - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - \gamma,\ \alpha - (\beta - \gamma) = (\alpha - \beta) + \gamma,$$

$$-(\alpha + \beta) = (-\alpha) - \beta,\ -(\alpha - \beta) = (-\alpha) + \beta,$$

$$a \circ (\alpha - \beta) = a \circ \alpha - a \circ \beta,\ (a - b) \circ \alpha = a \circ \alpha - b \circ \beta,$$

$$(-a) \circ (-\alpha) = a \circ \alpha.$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 10

Podprzestrzenie przestrzeni liniowych

10.1 Określenie podprzestrzeni

Definicja 10.1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niepusty podzbiór V_1 przestrzeni V nazywamy *podprzestrzenią* przestrzeni V, jeśli ma on następujące własności:

(I) suma dowolnych dwu wektorów należących do V_1 należy do V_1,

(II) jeśli $\alpha \in V_1$ i $a \in K$, to $a \circ \alpha \in V_1$.

Uwaga 10.1. Wektor zerowy Θ należy do każdej podprzestrzeni V_1 przestrzeni V. Rzeczywiście, ponieważ $V_1 \neq \emptyset$, więc istnieje $\alpha \in V_1$ i wówczas z (II) mamy, że $0 \circ \alpha \in V_1$, skąd z własności 9.5 jest $\Theta \in V_1$.

Uwaga 10.2. Podprzestrzeń V_1 przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest przestrzenią liniową nad ciałem K względem dodawania wektorów zredukowanego do V_1 i mnożenia przez skalary zredukowanego do V_1. Sprawdzenie prawdziwości aksjomatów **A1**-**A8** nie przedstawia trudności. Np. z (II) oraz z własności 9.6 wynika, że $-\alpha \in V_1$ dla każdego $\alpha \in V_1$.

Każda przestrzeń liniowa V zawiera co najmniej dwie podprzestrzenie: zbiór V oraz podprzestrzeń złożoną tylko z wektora Θ. Pierwszą

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

z tych podprzestrzeni nazywamy *niewłaściwą*, a drugą *zerową*.

Twierdzenie 10.1. *Część wspólna dowolnej niepustej rodziny podprzestrzeni danej przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest podprzestrzenią przestrzeni V.*

Dowód. Niech $\mathcal{W}$ będzie dowolną niepustą rodziną podprzestrzeni przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $W_0 = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W$. Z uwagi 10.1 mamy, że $\Theta \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$. Zatem $\Theta \in W_0$. Niech $\alpha, \beta \in W_0$. Wtedy $\alpha, \beta \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, skąd $\alpha + \beta \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, więc $\alpha + \beta \in W_0$. Jeśli $a \in K$ oraz $\alpha \in W_0$, to $\alpha \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, skąd $a \circ \alpha \in W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, więc $a \circ \alpha \in W_0$. Zatem W_0 jest podprzestrzenią przestrzeni V. $\square$

10.2 Podprzestrzenie generowane i ich własności

Twierdzenie 10.2. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech A będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni V. Istnieje najmniejsza (w sensie inkluzji) podprzestrzeń przestrzeni V zawierająca A.*

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{W}$ rodzinę wszystkich podprzestrzeni W przestrzeni V takich, że $A \subseteq W$. Rodzina $\mathcal{W}$ jest niepusta, bo np. $V \in \mathcal{W}$. Z twierdzenia 10.1 mamy, że $W_0 = \bigcap_{W \in \mathcal{W}} W$ jest podprzestrzenią przestrzeni V, a ponieważ $A \subseteq W$ dla każdego $W \in \mathcal{W}$, więc $A \subseteq W_0$. Niech teraz V_1 będzie podprzestrzenią przestrzeni V taką, że $A \subseteq V_1$. Wtedy $V_1 \in \mathcal{W}$, skąd $W_0 \subseteq V_1$. Zatem W_0 jest najmniejszą w sensie inkluzji podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór A. $\square$

Uwaga 10.3. Najmniejszą podprzestrzeń przestrzeni liniowej V zawierającą zbiór $A \subseteq V$ nazywamy *podprzestrzenią rozpiętą na podzbiorze* A lub *generowaną przez podzbiór* A i oznaczamy przez $lin(A)$.

Z tego określenia wynika od razu, że $lin(\emptyset) = \{\Theta\}$.

Jeśli zbiór A jest skończony i $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, to zamiast

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$lin(\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\})$ będziemy pisali $lin(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Zauważmy, że dla każdego $\alpha \in V$ jest $lin(\alpha) = \{a \circ \alpha : a \in K\}$. Rzeczywiście, $\alpha = 1 \circ \alpha \in \{a \circ \alpha : a \in K\}$ oraz dla dowolnych $a, b \in K$ mamy, że $a \circ \alpha + b \circ \alpha = (a + b) \circ \alpha$ i $a \circ (b \circ \alpha) = (ab) \circ \alpha$, więc $\{a \circ \alpha : a \in K\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą α. Jeżeli zaś W jest podprzestrzenią przestrzeni V taką, że $\alpha \in W$, to dla dowolnego $a \in K$ jest $a \circ \alpha \in W$, skąd $\{a \circ \alpha : a \in K\} \subseteq W$. Zatem $lin(\alpha) = \{a \circ \alpha : a \in K\}$.

Ponadto z definicji podprzestrzeni generowanej wynika od razu, że jeżeli A i B są podzbiorami przestrzeni liniowej V takimi, że $A \subseteq B$, to $lin(A) \subseteq lin(B)$.

Twierdzenie 10.3. *Niech $V_1, V_2, \ldots, V_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas zbiór*

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n : \alpha_i \in V_i \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

jest podprzestrzenią przestrzeni V. Ponadto
$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = lin(V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n)$.

Dowód. Niech $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Wtedy $\alpha_i = \underbrace{\Theta + \ldots + \Theta}_{i-1}$ $+ \alpha_i + \underbrace{\Theta + \ldots + \Theta}_{n-i}$, skąd $\alpha_i \in V_1 + \ldots + V_n$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zatem $V_1 \cup \ldots \cup V_n \subseteq V_1 + \ldots + V_n$. Niech $\alpha, \beta \in V_1 + \ldots + V_n$. Wtedy istnieją $\alpha_i, \beta_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ takie, że $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ i $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_n$, skąd $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) \in V_1 + \ldots + V_n$, bo $\alpha_i + \beta_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Ponadto dla $a \in K$ mamy, że $a \circ \alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, skąd z własności 9.10 $a \circ \alpha = a \circ \alpha_1 + \ldots + a \circ \alpha_n \in V_1 + \ldots + V_n$. Zatem $V_1 + \ldots + V_n$ jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór $V_1 \cup \ldots \cup V_n$.

Niech teraz W będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni V taką, że $V_1 \cup \ldots \cup V_n \subseteq W$. Weźmy dowolne $\alpha \in V_1 + \ldots + V_n$. Wtedy istnieją $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ takie, że $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Ale $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W$, więc $\alpha \in W$. Zatem $V_1 + \ldots + V_n \subseteq W$. Stąd $V_1 + \ldots + V_n \subseteq lin(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$. Ale $lin(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$ jest najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór $V_1 \cup \ldots \cup V_n$, więc stąd $V_1 + \ldots + V_n = lin(V_1 \cup \ldots \cup V_n)$. $\square$

Twierdzenie 10.4. *Dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K zachodzi wzór:*

$$lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n : a_1, \ldots, a_n \in K\}.$$

Dowód. Ponieważ $\alpha_i \in lin(\alpha_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, więc $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq lin(\alpha_1) \cup \ldots \cup lin(\alpha_n)$, skąd $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq lin(lin(\alpha_1) \cup \ldots \cup lin(\alpha_n))$. Ponadto $\{\alpha_i\} \subseteq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, więc $lin(\alpha_i) \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zatem $lin(lin(\alpha_1) \cup \ldots \cup lin(\alpha_n)) \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Stąd $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = lin(lin(\alpha_1), \ldots, lin(\alpha_n)) = lin(\alpha_1) + \ldots + lin(\alpha_n) = \{a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n : a_1, \ldots, a_n \in K\}$ na mocy twierdzenia 10.3 i uwagi 10.3. $\square$

Twierdzenie 10.5. *Dla dowolnych podzbiorów X i Y przestrzeni liniowej V nad ciałem K zachodzi wzór:*

$$lin(X \cup Y) = lin(X) + lin(Y).$$

Dowód. Mamy, że $X \subseteq lin(X) \subseteq lin(X \cup Y)$ i $Y \subseteq lin(Y) \subseteq lin(X \cup Y)$, więc $X \cup Y \subseteq lin(X \cup Y)$. Ale $lin(X \cup Y)$ jest najmniejszą podprzestrzenią zawierającą zbiór $X \cup Y$, więc stąd $lin(X \cup Y) \subseteq lin(X) + lin(Y)$. Dalej, jeżeli W jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą $X \cup Y$, to $X \subseteq W$, skąd $lin(X) \subseteq W$ oraz analogicznie $lin(Y) \subseteq W$. Zatem $lin(X) \cup lin(Y) \subseteq W$ i z twierdzenia 10.3 mamy, że $lin(X) + lin(Y) \subseteq W$. Ale W jest dowolną podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą zbiór $X \cup Y$, więc stąd $lin(X) + lin(Y) \subseteq lin(X \cup Y)$. Stąd ostatecznie $lin(X \cup Y) = lin(X) + lin(Y)$. $\square$

Z twierdzenia 10.5 mamy natychmiast następujący

Wniosek 10.1. *Dla dowolnych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ przestrzeni liniowej V zachodzi wzór:*

$$lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + lin(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 10.6. *Dla dowolnego podzbioru X przestrzeni liniowej V nad ciałem K i dla każdego wektora $\alpha \in V$:*

$$\alpha \in lin(X) \Leftrightarrow lin(X \cup \{\alpha\}) = lin(X).$$

Dowód. Załóżmy, że $lin(X \cup \{\alpha\}) = lin(X)$. Ponieważ $X \cup \{\alpha\} \subseteq lin(X \cup \{\alpha\})$, więc stąd $X \cup \{\alpha\} \subseteq lin(X)$, skąd $\alpha \in lin(X)$. Na odwrót, niech teraz $\alpha \in lin(X)$. Weźmy dowolną podprzestrzeń W przestrzeni V taką, że $X \subseteq W$. Wtedy $lin(X) \subseteq W$ i $\alpha \in lin(X)$, więc $X \cup \{\alpha\} \subseteq W$, skąd $lin(X \cup \{\alpha\}) \subseteq W$. Ale W jest dowolną podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą X, więc stąd $lin(X \cup \{\alpha\}) \subseteq lin(X)$. Ponadto $X \subseteq X \cup \{\alpha\}$, więc $lin(X) \subseteq lin(X \cup \{\alpha\})$ i ostatecznie $lin(X \cup \{\alpha\}) = lin(X)$. □

10.3 Kombinacja liniowa wektorów

Definicja 10.2. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Powiemy, że wektor $\alpha \in V$ jest *kombinacją liniową wektorów* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, jeżeli istnieją skalary $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ (zwane *współczynnikami tej kombinacji*) takie, że

$$\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n. \tag{10.1}$$

Uwaga 10.4. Twierdzenie 10.4 możemy wypowiedzieć następująco: $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ składa się ze wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Twierdzenie 10.7. *Niech X będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas $lin(X)$ jest zbiorem wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X.*

Dowód. Oznaczmy przez V_1 zbiór wszystkich kombinacji liniowych wszystkich skończonych podzbiorów zbioru X. Dla $\alpha \in X$ mamy, że $\alpha = 1 \circ \alpha \in V_1$, więc $X \subseteq V_1$. Ponieważ $X \neq \emptyset$, więc $V_1 \neq \emptyset$. Niech $a \in K$ oraz $\alpha, \beta \in V_1$. Wtedy istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in X$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ oraz $\beta = b_1 \circ \beta_1 + \ldots +$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$b_m \circ \beta_m$. Zatem $a \circ \alpha = (aa_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (aa_n)\alpha_n \in V_1$ oraz $\alpha \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $\beta \in lin(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, więc z wniosku 10.1 $\alpha + \beta \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$, czyli na mocy uwagi 10.4 $\alpha + \beta \in V_1$. Stąd V_1 jest podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą X. Niech W będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni V zawierającą X. Wtedy dla dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ mamy, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in W$, skąd dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$ jest $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \in W$. Zatem $V_1 \subseteq W$, czyli V_1 jest najmniejszą podprzestrzenią przestrzeni X zawierającą zbiór X. Zatem $V_1 = lin(X)$.□

Twierdzenie 10.8. *Niech $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Jeżeli wektor α jest kombinacją liniową wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_m$ oraz dla $i = 1, 2, \ldots, m$ wektor β_i jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, to wektor α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

Dowód. Z uwagi 10.4 mamy, że $\beta_1, \ldots, \beta_m \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Zatem $lin(\beta_1, \ldots, \beta_m) \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ale z uwagi 10.4 $\alpha \in lin(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, więc stąd $\alpha \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, czyli z uwagi 10.4 wektor α jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. □

Przykład 10.1. Niech K będzie ciałem i niech $n \in \mathbb{N}$. W przestrzeni K^n określamy wektory

$$\varepsilon_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0],\ \varepsilon_2 = [0, 1, 0, \ldots, 0],\ \varepsilon_3 = [0, 0, 1, \ldots, 0],\ \ldots,$$
$$\varepsilon_n = [0, 0, 0, \ldots, 1]$$

Dla dowolnych skalarów $a_1, \ldots, a_n \in K$

$$\begin{array}{c} a_1 \circ \varepsilon_1 = [a_1, 0, 0, \ldots, 0] \\ a_2 \circ \varepsilon_2 = [0, a_2, 0, \ldots, 0] \\ a_3 \circ \varepsilon_3 = [0, 0, a_3, \ldots, 0] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \circ \varepsilon_n = [0, 0, 0, \ldots, a_n] \end{array},$$

więc po dodaniu stronami tych równości uzyskamy wzór:

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 \circ \varepsilon_1 + a_2 \circ \varepsilon_2 + \ldots + a_n \circ \varepsilon_n. \tag{10.2}$$

Z tego wzoru wynika zatem, że każdy wektor przestrzeni K^n jest kombinacją liniową wektorów $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, czyli $K^n = lin(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Mówimy też, że wektory $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ generują przestrzeń K^n.$\square$

10.4 Operacje elementarne na układach wektorów

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wyróżniamy następujące operacje elementarne nad układem wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

O1. Zamiana miejscami wektorów α_i z α_j (dla $i \neq j$) oznaczana przez $w_i \leftrightarrow w_j$. Oczywiście operacja ta jest do siebie odwrotna.

O2. Pomnożenie i-tego wektora przez niezerowy skalar $a \in K$, oznaczenie: $a \cdot w_i$. Ponieważ dla $a \neq 0$ jest $a^{-1} \circ (a \circ \alpha_i) = (a^{-1}a) \circ \alpha_i = 1 \circ \alpha_i = \alpha_i$, więc operacją odwrotną do $a \cdot w_i$ jest operacja $a^{-1} \cdot w_i$.

O3. Dodanie do wektora α_i wektora α_j (dla $i \neq j$) pomnożonego przez dowolny skalar $a \in K$, oznaczenie: $w_i + a \cdot w_j$. Ponieważ $(\alpha_i + a \circ \alpha_j) + (-a) \circ \alpha_j = \alpha_i + a \circ \alpha_j + (-(a \circ \alpha_j)) = \alpha_i$, więc operacją odwrotną do operacji $w_i + a \cdot w_j$ jest operacja $w_i + (-a) \cdot w_j$.

Twierdzenie 10.9. *Jeżeli układ wektorów $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K powstaje z układu wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych, to*

$$lin(\beta_1, \ldots, \beta_n) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Dowód. Indukcja pozwala nam ograniczyć się do jednej operacji. Ponadto operacje elementarne są odwracalne, więc wystarczy wykazać, że $lin(\beta_1, \ldots, \beta_n) \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, czyli, że $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subseteq lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dla operacji **O1** jest to oczywiste. Dla operacji **O2** mamy, że $\beta_j = \alpha_j$ dla $j \neq i$ oraz $\beta_i = a \circ \alpha_i \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Dla operacji **O3** $\beta_k = \alpha_k$ dla $k \neq i$ oraz $\beta_i = \alpha_i + a \circ \alpha_j \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Przykład 10.2. Sprawdzimy, czy wektor $[1,2,3]$ należy do podprzestrzeni $W = lin([1,3,2],[1,2,1],[2,5,3])$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Po wykonaniu operacji $w_2 - w_1$, $w_3 - 2w_1$ uzyskamy na mocy twierdzenia 10.9, że $W = lin([1,3,2],[0,-1,-1],[0,-1,-1]) = lin([1,3,2],[0,-1,-1]) = \{x \circ [1,3,2] + y \circ [0,-1,-1] : x,y \in \mathbb{R}\} = \{[x, 3x-y, 2x-y] : x,y \in \mathbb{R}\}$. Zatem $[1,2,3] \in W$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x,y \in \mathbb{R}$ takie, że $[1,2,3] = [x, 3x-y, 2x-y]$, czyli gdy $x = 1$ oraz $3x - y = 2x - y = -1$, a więc gdy $x = 1$ i $x = 0$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że $[1,2,3] \notin W$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 11

Baza i wymiar przestrzeni liniowej

11.1 Liniowa niezależność wektorów

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Powiemy, że układ wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest *liniowo zależny*, jeżeli istnieją skalary $a_1, \ldots, a_n \in K$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$.

Przykład 11.1. Wektory $\Theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ są liniowo zależne, bo np. $1 \circ \Theta + 0 \circ \alpha_1 + \ldots + 0 \circ \alpha_n = \Theta$ oraz $1 \neq 0$. $\Box$

Uwaga 11.1. Jeżeli układ wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest liniowo zależny, to dla dowolnej permutacji $f \in S_n$ układ $(\alpha_{f(1)}, \ldots, \alpha_{f(n)})$ też jest liniowo zależny.

Przykład 11.2. Wektory $\alpha, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo zależne, bo $1 \circ \alpha + (-1) \circ \alpha + 0 \circ \alpha_1 + \ldots + 0 \circ \alpha_n = \Theta$ i $1 \neq 0$. $\Box$

Definicja 11.1. Powiemy, że układ wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest *liniowo niezależny*, jeżeli nie jest on liniowo zależny, tzn.

$$\forall_{a_1, \ldots, a_n \in K}\ [a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0].$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Przykład 11.3. Ze wzoru (10.2) wynika od razu, że układ wektorów $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ przestrzeni K^n jest liniowo niezależny. □

Uwaga 11.2. Z uwagi 11.1 wynika, że jeśli układ wektorów $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni liniowej V jest liniowo niezależny (w skrócie *lnz*), to dla dowolnej permutacji $f \in S_n$ układ $(\alpha_{f(1)}, \ldots, \alpha_{f(n)})$ też jest liniowo niezależny. Ponadto z przykładu 11.2 wynika, że wtedy $\alpha_i \neq \alpha_j$ dla $i \neq j$. Możemy zatem powiedzieć, że zbiór wektorów $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Dalej, z przykładu 11.1 wynika, że $\Theta \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Jeżeli $X = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ jest niepustym podzbiorem zbioru $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, to zbiór X też jest liniowo niezależny, gdyż w przeciwnym wypadku istniałyby skalary $b_1, \ldots, b_k$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_k \circ \beta_k = \Theta$ i wówczas uzupełniając ciąg $(b_1, \ldots, b_k)$ zerami uzyskamy ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ taki, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$, wbrew liniowej niezależności zbioru $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.□

Z uwagi 11.2 wynika zatem, że definicję liniowej niezależności można rozszerzyć na dowolne podzbiory przestrzeni liniowej.

Definicja 11.2. Powiemy, że podzbiór X przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest liniowo niezależny (w skrócie *lnz*), jeżeli każdy skończony podzbiór zbioru X jest liniowo niezależny. Zbiór pusty wektorów uważamy za liniowo niezależny.

Z uwagi 11.2 oraz z tej definicji mamy od razu następujące

Twierdzenie 11.1. *Dowolny podzbiór liniowo niezależnego zbioru wektorów przestrzeni liniowej jest zbiorem liniowo niezależnym.*

Przykład 11.4. W przestrzeni $V = \mathbb{R}[x]$ nad ciałem $\mathbb{R}$ zbiór $\{1, x, x^2, \ldots\}$ jest liniowo niezależny. □

Zadanie 11.1. Pokazać, że w przestrzeni $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ zbiór $\{\log p : p \text{ jest liczbą pierwszą}\}$ jest liniowo niezależny.

Przykład 11.5. Jeżeli α jest niezerowym wektorem przestrzeni liniowej V nad ciałem K, to zbiór $\{\alpha\}$ jest liniowo niezależny. Rzeczywiście, niech $a \in K$ będzie takie, że $a \circ \alpha = \Theta$. Wtedy z uwagi 9.4 mamy, że $a = 0$, czyli zbiór $\{\alpha\}$ jest lnz.□

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 11.2. *Jeżeli układ wektorów* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K *powstaje z układu* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *przez kolejne wykonanie skończonej liczby operacji elementarnych, to układ* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *jest liniowo niezależny.*

Dowód. Indukcja pozwala nam ograniczyć się do jednej operacji elementarnej. Ponadto operacje elementarne są odwracalne, więc wystarczy wykazać, że jeżeli układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest lnz, to układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz. Dla operacji **O1** jest to oczywiste. Dla operacji **O2** mamy, że $\beta_j = \alpha_j$ dla $j \neq i$ oraz $\beta_i = a \circ \alpha_i$ dla pewnego $a \neq 0$. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = \Theta$. Wtedy $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + (a_i a) \circ \alpha_i + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Stąd z liniowej niezależności układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mamy, że $a_1 = a_2 = \ldots = a_i a = \ldots = a_n = 0$. Ale $a \neq 0$, więc stąd $a_1 = \ldots = a_i = \ldots = a_n = 0$, czyli układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz.

Dla operacji **O3** bez zmniejszania ogólności możemy zakładać, że $b_1 = \alpha_1 + a \circ \alpha_2$ oraz $\beta_j = \alpha_j$ dla $j = 2, \ldots, n$. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = \Theta$. Wtedy $a_1 \circ (\alpha_1 + a \circ \alpha_2) + a_2 \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$, czyli $a_1 \circ \alpha_1 + (a_1 a + a_2) \circ \alpha_2 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$, skąd z lnz układu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mamy, że $a_1 = a_1 a + a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$, czyli $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, a więc układ $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest lnz. □

Twierdzenie 11.3. *Niech* X *będzie zbiorem liniowo niezależnym wektorów przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K. *Wówczas dla każdego wektora* $\alpha \in V$:

$$\alpha \in lin(X) \Leftrightarrow [\alpha \in X \textit{ lub zbiór } X \cup \{\alpha\} \textit{ jest liniowo zależny}].$$

Dowód. $\Leftarrow$. Załóżmy, że $\alpha \notin lin(X)$. Wtedy $\alpha \notin X$, gdyż $X \subseteq lin(X)$. Zatem zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo zależny. Ale zbiór X jest liniowo niezależny, więc istnieją parami różne wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ takie, że zbiór $\{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ jest liniowo zależny. Zatem istnieją skalary $a, a_1, \ldots, a_n \in K$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $a \circ \alpha + a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Stąd z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynika, że $a \neq 0$. Zatem $\alpha = (-\frac{a_1}{a}) \circ \alpha_1 + \ldots + (-\frac{a_n}{a}) \circ \alpha_n \in lin(X)$, czyli $\alpha \in lin(X)$ na mocy twierdzenia 10.7 i mamy sprzeczność.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$\Rightarrow$. Na mocy twierdzenia 10.7 istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Zatem $1 \circ \alpha + (-a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (-a_n) \circ \alpha_n = \Theta$, skąd wynika, że $\alpha \in X$ albo $\alpha \notin X$ i zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo zależny. □

11.2 Baza przestrzeni liniowej

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Powiemy, że podzbiór $X \subseteq V$ jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym, jeśli X jest zbiorem liniowo niezależnym oraz dla każdego zbioru liniowo niezależnego $Y \subseteq V$ takiego, że $X \subseteq Y$ jest $X = Y$.

Definicja 11.3. Każdy maksymalny liniowo niezależny podzbiór X wektorów przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy *bazą* tej przestrzeni.

Twierdzenie 11.4. *Każdy liniowo niezależny zbiór wektorów X_0 przestrzeni liniowej V nad ciałem K można rozszerzyć do bazy $X \supseteq X_0$ tej przestrzeni.*

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów liniowo niezależnych przestrzeni V zawierających zbiór X_0. Wtedy $\mathcal{A} \neq \emptyset$, bo $X_0 \in \mathcal{A}$. Ponadto zbiór $\mathcal{A}$ jest częściowo uporządkowany przez inkluzję zbiorów. Jeżeli $\mathcal{B}$ jest łańcuchem w $\mathcal{A}$, tzn. dla dowolnych $Y, Z \in \mathcal{B}$ jest $Y \subseteq Z$ lub $Z \subseteq Y$, to $Y_0 = \bigcup_{Y \in \mathcal{B}} Y$ też jest zbiorem liniowo niezależnym, gdyż dla dowolnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Y_0$ istnieją $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{B}$ takie, że $\alpha_i \in Y_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy istnieje $k \leq n$ takie, że $Y_i \subseteq Y_k$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, skąd $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Y_k$. Ale zbiór Y_k jest liniowo niezależny, więc zbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ też jest liniowo niezależny. Zatem w $\mathcal{A}$ każdy łańcuch ma ograniczenie górne, więc z lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje w $\mathcal{A}$ element maksymalny X, który jest szukaną bazą przestrzeni V zawierającą X_0. □

Ponieważ zbiór pusty jest liniowo niezależny, więc z twierdzenia 11.4 mamy natychmiast następujące

Twierdzenie 11.5. *Każda przestrzeń liniowa posiada bazę.* □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 11.6. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Zbiór $X \subseteq V$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem liniowo niezależnym oraz $V = lin(X)$ (tzn. X generuje V).*

Dowód. Załóżmy, że X jest bazą przestrzeni V. Wówczas X jest zbiorem liniowo niezależnym. Weźmy dowolne $\alpha \in V$ i załóżmy, że $\alpha \notin lin(X)$. Wtedy z twierdzenia 11.3 wynika, że $\alpha \notin X$ oraz zbiór $X \cup \{\alpha\}$ jest liniowo niezależny. Zatem X nie jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym i mamy sprzeczność.

Na odwrót, załóżmy, że zbiór X jest liniowo niezależny oraz $V = lin(X)$. Weźmy dowolny liniowo niezależny zbiór $Y \subseteq V$ taki, że $X \subseteq Y$. Gdyby $X \neq Y$, to dla pewnego $\alpha \in Y$ byłoby, że $\alpha \notin X$ i zbiór $X \cup \{\alpha\} \subseteq Y$ jest liniowo niezależny. Zatem z twierdzenia 11.3 mielibyśmy, że $\alpha \notin lin(X) = V$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $X = Y$ i zbiór X jest bazą przestrzeni V. □

Przykład 11.6. Ponieważ zbiór $\{1, x, x^2, \dots\}$ generuje przestrzeń $\mathbb{R}[x]$ i jest liniowo niezależny, więc na mocy twierdzenia 11.6 jest on bazą tej przestrzeni. □

Przykład 11.7. Niech K będzie dowolnym ciałem i niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas z twierdzenia 11.6 oraz z przykładów 10.1 i 11.3 wynika od razu, że zbiór $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ jest bazą przestrzeni K^n. Nazywamy ją *bazą kanoniczną*. □

Z twierdzeń 10.9, 11.2 i 11.6 wynika od razu następujące

Twierdzenie 11.7. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą parami różnymi wektorami i niech $beta_1, \dots, \beta_n$ będą parami różnymi wektorami przestrzeni liniowej V. Załóżmy, że układ wektorów $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ powstaje z układu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ przez kolejne zastosowanie skończonej liczby operacji elementarnych. Wówczas zbiór $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą tej przestrzeni.* □

Twierdzenie 11.8. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas każdy maksymalny (względem liczby elementów) podzbiór liniowo niezależny $A \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą podprzestrzeni $lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Dowód. Niech $A \subseteq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ będzie maksymalnym (względem liczby elementów) podzbiorem liniowo niezależnym. Wówczas oczywiście $lin(A) \subseteq lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = W$. Niech $i = 1, \dots, n$. Jeśli $\alpha_i \in A$, to $\alpha_i \in lin(A)$; jeśli zaś $\alpha_i \notin A$, to z maksymalności A wynika, że zbiór $A \cup \{\alpha_i\}$ jest liniowo zależny. Zatem z twierdzenia 11.3 $\alpha_i \in lin(A)$. Stąd $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq lin(A)$, czyli $W \subseteq lin(A)$ i ostatecznie $lin(A) = W$. Zatem z twierdzenia 11.6 zbiór A jest bazą podprzestrzeni W. □

Twierdzenie 11.9. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą parami różnymi wektorami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wektor $\alpha \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci*

$$\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n \textit{ dla pewnych } a_1, \dots, a_n \in K.$$

Dowód. Załóżmy, że zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V. Wówczas z twierdzenia 11.6 mamy, że $V = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ oraz zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Zatem dla dowolnego $\alpha \in V$ istnieją $a_1, \dots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n$. Jeśli $b_1, \dots, b_n \in K$ są takie, że $\alpha = b_1 \circ \alpha_1 + \dots + b_n \circ \alpha_n$, to $a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n = b_1 \circ \alpha_1 + \dots + b_n \circ \alpha_n$, czyli $(a_1 - b_1) \circ \alpha_1 + \dots + (a_n - b_n) \circ \alpha_n = \Theta$, więc z liniowej niezależności zbioru $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ mamy, że $a_i - b_i = 0$, czyli $a_i = b_i$ dla $i = 1, \dots, n$.

Na odwrót, jeżeli $a_1, \dots, a_n \in K$ są takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$, to $a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n = 0 \circ \alpha_1 + \dots + 0 \circ \alpha_n$, skąd z jednoznaczności zapisu wektora $a_i = 0$ dla $i = 1, \dots, n$, czyli zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Ponadto z założenia $V = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, więc z twierdzenia 11.6 zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V. □

Definicja 11.4. Niech $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas ciąg $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ nazywamy *bazą uporządkowaną* przestrzeni V. Niech $\alpha \in V$. Wtedy na mocy twierdzenia 11.9 istnieje dokładnie jeden ciąg $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ taki, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n$. Ciąg $(a_1, \dots, a_n)$ nazywamy *ciągiem współrzędnych wektora* α w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, a element a_i, dla każdego $i = 1, \dots, n$, nazywa się *i-tą współrzędną wektora* α w tej bazie.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Wniosek 11.1. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech, dla pewnej liczby naturalnej n, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie bazą uporządkowaną tej przestrzeni. Przyporządkujmy każdemu wektorowi $\alpha \in V$, ciąg jego współrzędnych w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Otrzymane w ten sposób odwzorowanie ϕ jest bijekcją zbioru V na zbiór K^n. Przy tym $\phi(\alpha_i) = \varepsilon_i$ dla $i = 1, \dots, n$.*□

Definicja 11.5. Odwzorowanie ϕ określone w powyższym wniosku nazywamy *układem współrzędnych wyznaczonym przez bazę* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

11.3 Wymiar przestrzeni liniowej

Lemat 11.1. *Niech wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V i niech $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, przy czym $a_j \neq 0$. Wówczas wektory*

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n \tag{11.1}$$

też tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód. Zauważmy, że wektory (11.1) powstają z wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ przez kolejne wykonanie następujących operacji elementarnych: $a_j \cdot w_j, w_j + a_1 \cdot w_1, \dots, w_j + a_{j-1} \cdot w_{j-1}, w_j + a_{j+1} \cdot w_{j+1}, \dots, w_j + a_n \cdot w_n$. Zatem na mocy twierdzenia 11.7, wektory (11.1) tworzą bazę przestrzeni V. □

Twierdzenie 11.10 (Steinitza o wymianie). *Jeśli wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V nad ciałem K, a wektory $\beta_1, \dots, \beta_s$ są liniowo niezależne, to*

(i) $s \leq n$ oraz

(ii) spośród wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ można wybrać $n - s$ wektorów, które łącznie z wektorami $\beta_1, \dots, \beta_s$ tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem s. Dla $s = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla liczb mniejszych od pewnej liczby naturalnej s i rozpatrzmy s wektorów liniowo niezależnych

$\beta_1, \dots, \beta_s$. Wektory $\beta_1, \dots, \beta_{s-1}$ są liniowo niezależne, a więc z założenia indukcyjnego $s-1 \le n$ i istnieje $n-s+1 = n-(s-1)$ wektorów spośród wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, które łącznie z $\beta_1, \dots, \beta_{s-1}$ tworzą bazę przestrzeni V. Dla uproszczenia znakowania przyjmiemy, że tymi wektorami są $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-s+1}$.

Wykażemy najpierw, że $s-1 < n$. W przeciwnym razie byłoby $n = s-1$ (bo $s-1 \le n$), a zatem już wektory $\beta_1, \dots, \beta_{s-1}$ tworzyłyby bazę przestrzeni V, a stąd wynikałoby, że $\beta_s \in lin(\beta_1, \dots, \beta_{s-1})$, co na mocy twierdzenia 11.3 prowadzi do sprzeczności (gdyż wektory $\beta_1, \dots, \beta_s$ są liniowo niezależne). Wobec tego $s-1 < n$, a stąd $s \le n$. To dowodzi (i).

Ponieważ wektory $\beta_1, \dots, \beta_{s-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-s+1}$ tworzą bazę przestrzeni V, więc β_s jest ich kombinacją liniową. Wobec liniowej niezależności wektorów $\beta_1, \dots, \beta_s$ i twierdzenia 11.3, w kombinacji liniowej przedstawiającej β_s, co najmniej jeden z wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-s+1}$ występuje ze współczynnikiem różnym od zera. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy przyjąć, że $a_{n-s+1} \neq 0$. Wtedy z lematu 11.1 wektory $\beta_1, \dots, \beta_{s-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-s}, \beta_s$ tworzą bazę przestrzeni V, czyli wektory $\beta_1, \dots, \beta_s, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-s}$ tworzą bazę przestrzeni V, co kończy dowód twierdzenia. □

Wniosek 11.2. *Jeśli n-elementowy zbiór jest bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K, to każda baza tej przestrzeni składa się z dokładnie n wektorów.*

Dowód. Niech wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Niech X będzie inną bazą tej przestrzeni. Gdyby zbiór X miał więcej niż n elementów, to byłyby one liniowo niezależne i otrzymalibyśmy sprzeczność z twierdzeniem Steinitza o wymianie. Zatem $|X| \le n$. Ale wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne i zbiór skończony X jest bazą przestrzeni V, więc znowu z twierdzenia Steinitza o wymianie $n \le |X|$, czyli ostatecznie $|X| = n$.□

Definicja 11.6. Liczbę elementów dowolnej skończonej bazy przestrzeni liniowej V nad ciałem K nazywamy *wymiarem przestrzeni V* i oznaczamy przez $\dim_K V$ lub $\dim V$, jeśli wiadomo nad jakim ciałem rozpatrujemy przestrzeń V.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

W ten sposób wymiar jest określony dla wszystkich takich przestrzeni, które mają skończoną bazę. Jeśli dana przestrzeń liniowa V nie ma skończonej bazy, to mówimy, że jej *wymiar jest nieskończony* i piszemy $\dim V = \infty$. Można udowodnić, że wszystkie bazy dowolnej przestrzeni liniowej V mają tę samą moc. Wobec tego można określić wymiar dowolnej przestrzeni liniowej V jako moc dowolnej bazy przestrzeni V.

Przykład 11.8. Ponieważ dla dowolnego ciała K przestrzeń K^n posiada bazę n-elementową (np. bazę kanoniczną), więc $\dim_K K^n = n$. $\square$

Przykład 11.9. Ponieważ dla dowolnego ciała K zbiór $\{1\}$ jest bazą przestrzeni liniowej K_K, więc $\dim_K K = 1$. W szczególności $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ oraz $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, gdyż zbiór $\{1, i\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. $\square$

Przykład 11.10. Ponieważ zbiór pusty jest bazą przestrzeni zerowej $\{\Theta\}$, więc $\dim\{\Theta\} = 0$. $\square$

Przykład 11.11. Ponieważ zbiór $\{1, x, x^2, \dots\}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}[x]$, więc $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. $\square$

Przykład 11.12. Dla dowolnego ciała K w przestrzeni liniowej K^∞ wektory $\epsilon_1 = [1, 0, 0, \dots], \epsilon_2 = [0, 1, 0, \dots], \dots$ są liniowo niezależne. Zatem z twierdzenia Steinitza o wymianie $\dim K^\infty = \infty$. $\square$

Twierdzenie 11.11. *Jeśli przestrzeń liniowa V ma wymiar n, to każda jej podprzestrzeń W ma wymiar nie większy niż n.*

Dowód. Niech X będzie bazą podprzestrzeni W. Wtedy zbiór X jest liniowo niezależny, więc na mocy twierdzenia Steinitza o wymianie $|X| \leq n$. $\square$

Twierdzenie 11.12. *Dla dowolnej podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V wymiaru skończonego równoważne są warunki:*

(i) $\dim W = \dim V$, *(ii)* $W = V$.

Dowód. (ii)$\Rightarrow$(i). Oczywiste. (i)$\Rightarrow$(ii). Oznaczmy $n = \dim V$. Wtedy istnieje baza $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ przestrzeni V. Ale $\dim W = n$,

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

więc istnieje baza $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ podprzestrzeni W. Zatem wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ są liniowo niezależne i na mocy twierdzenia Steinitza o wymianie można je uzupełnić do bazy przestrzeni V, $n-n=0$ wektorami wybranymi spośród wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Zatem wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni V, skąd $V = lin(\beta_1, \dots, \beta_n) = W$. $\square$

Z twierdzenia 11.8 wynika od razu następujące

Twierdzenie 11.13. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V. Wówczas* $\dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq n$. *Ponadto* $\dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne.* $\square$

Twierdzenie 11.14. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ będą wektorami przestrzeni liniowej V wymiaru n. Wówczas równoważne są warunki:*
(i) zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V,
(ii) zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny,
(iii) zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ generuje przestrzeń V.

Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii). Oczywiste. (ii)$\Rightarrow$(iii). Wynika od razu z twierdzenia Steinitza o wymianie. (iii)$\Rightarrow$(i). Z założenia wynika, że $V = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Zatem $\dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = n$ i na mocy twierdzenia 11.13 zbiór $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest liniowo niezależny. Zatem ostatecznie ten zbiór jest bazą przestrzeni V. $\square$

Twierdzenie 11.15. *Niech V_1 i V_2 będą skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas podprzestrzenie $V_1 \cap V_2$ i $V_1 + V_2$ są również skończenie wymiarowe i zachodzi wzór:*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2). \tag{11.2}$$

Dowód. Ponieważ $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią przestrzeni skończenie wymiarowej V_1, więc z twierdzenia 11.11 przestrzeń $V_1 \cap V_2$ jest skończenie wymiarowa. Niech $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ będzie bazą przestrzeni $V_1 \cap V_2$. Wtedy z twierdzenia Steinitza o wymianie ten zbiór można uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_s\}$ przestrzeni V_1 i można go też uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ przestrzeni V_2. Wtedy

$\dim(V_1 \cap V_2) = k$, $\dim V_1 = k+s$ i $\dim V_2 = k+r$, więc pozostaje wykazać, że $\dim(V_1+V_2) = k+s+r$. Ale $V_1+V_2 = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s) + lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r) = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, więc wystarczy wykazać, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ są liniowo niezależne. W tym celu weźmy dowolne skalary $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s, c_1, \ldots, c_r \in K$ takie, że
$a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k + b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_s \circ \beta_s + c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r = \Theta$.
Oznaczmy: $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k$, $\beta = b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_s \circ \beta_s$, $\gamma = c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r$. Wtedy $\gamma = -(\alpha + \beta) \in V_1 \cap V_2$. Zatem istnieją $d_1, \ldots, d_k \in K$ takie, że $\gamma = d_1 \circ \alpha_1 + \ldots + d_k \circ \alpha_k$, skąd $c_1 \circ \gamma_1 + \ldots + c_r \circ \gamma_r + (-d_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (-d_k) \circ \alpha_k = \Theta$. Zatem z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ mamy, że $c_1 = \ldots = c_r = -d_1 = \ldots = -d_k = 0$, czyli $\gamma = \Theta$ oraz $\Theta = \alpha + \gamma$. Zatem z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s$ otrzymamy, że $a_1 = \ldots = a_k = b_1 = \ldots = b_s = 0$ i ostatecznie wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ są liniowo niezależne. □

Wniosek 11.3. *Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V wymiaru n. Wtedy* $\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim V_1 + \dim V_2 - n$.

Dowód. Ponieważ $\dim(V_1 + V_2) \leq n$, więc z twierdzenia 11.15 uzyskujemy, że $\dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) \leq n$, skąd mamy tezę. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 12

Izomorfizmy. Sumy proste. Hiperpłaszczyzny

12.1 Izomorfizmy przestrzeni liniowych

Definicja 12.1. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Powiemy, że przestrzenie V i W są *izomorficzne* i piszemy $V \cong W$, jeżeli istnieje bijekcja $f : V \longrightarrow W$ spełniająca warunki: (1) $\forall_{\alpha,\beta \in V} f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ i (2) $\forall_{a \in K} \forall_{\alpha \in V} f(a \circ \alpha) = a \circ f(\alpha)$. Takie przekształcenia f nazywamy *izomorfizmami liniowymi*.

Twierdzenie 12.1. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi wymiaru n nad ciałem K. Wtedy $V \cong W$. Jeśli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V, zaś wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni W, to istnieje dokładnie jeden taki izomorfizm $f : V \longrightarrow W$, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. W szczególności każda n-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem K jest izomorficzna z przestrzenią K^n.*

Dowód. Z założenia oraz z twierdzenia 11.9 wynika, że $f : V \to W$ dane wzorem

$$f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n \text{ dla } a_1, \ldots, a_n \in K \tag{12.1}$$

jest dobrze określoną bijekcją oraz $f(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Ponadto dla dowolnych $a, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$ oraz dla

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ i $\beta = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$ mamy, że $\alpha + \beta = (a_1 + b_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_n + b_n) \circ \alpha_n$, $a \circ \alpha = (aa_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (aa_n) \circ \alpha_n$, więc $f(\alpha + \beta) = (a_1 + b_1) \circ \beta_1 + \ldots + (a_n + b_n) \circ \beta_n = [a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n] + [b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_n \circ \beta_n] = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a \circ \alpha) = (aa_1) \circ \beta_1 + \ldots + (aa_n) \circ \beta_n = a \circ (a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n) = a \circ f(\alpha)$. Zatem f jest izomorfizmem liniowym takim, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. W szczególności mamy stąd, że $V \cong W$ oraz $V \cong K^n$. Niech teraz $g : V \longrightarrow W$ będzie izomorfizmem liniowym takim, że $g(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy przez prostą indukcję względem k można wykazać, że $g(\gamma_1 + \ldots + \gamma_k) = g(\gamma_1) + \ldots + g(\gamma_k)$ dla dowolnych $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in V$. Zatem dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$ mamy, że $g(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = g(a_1 \circ \alpha_1) + \ldots + g(a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ g(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ g(\alpha_n) = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n$, czyli $g = f$. □

Wniosek 12.1. *Jeśli α, β są niezerowymi wektorami przestrzeni liniowej V o skończonym wymiarze, to istnieje izomorfizm f przestrzeni V na siebie taki, że $f(\alpha) = \beta$.*

Dowód. Ponieważ $\alpha \neq \Theta$ i $\beta \neq \Theta$, więc zbiory $\{\alpha\}$ i $\{\beta\}$ są liniowo niezależne. Z twierdzenia Steinitza o wymianie wynika zatem, że można te zbiory uzupełnić do baz $\{\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$, $\{\beta, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ przestrzeni V. Wtedy z twierdzenia 12.1 wynika istnienie żądanego izomorfizmu f. □

Niech $f : V \longrightarrow W$ będzie izomorfizmem liniowym. Wtedy z (12.1) mamy, że $f(\Theta) = f(0 \circ \Theta) = 0 \circ f(\Theta) = \Theta$. Zatem

$$f(\Theta) = \Theta.$$

Stąd dla $\alpha \in V$ mamy, że $f(\alpha) + f(-\alpha) = f(\alpha + (-\alpha)) = f(\Theta) = \Theta$, czyli

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) \text{ dla każdego } \alpha \in V.$$

Zatem izomorfizm liniowy zachowuje działania dodawania wektorów, mnożenia przez skalary, branie wektora przeciwnego i wektor zerowy. Stąd izomorfizm liniowy zachowuje wszystkie własności algebraiczne

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

(pojęcie własności algebraicznej rozumiemy tutaj w intuicyjnym sensie) przestrzeni liniowych i układów wektorów. Uwaga ta może posłużyć do wprowadzenia ścisłej definicji własności algebraicznej przestrzeni liniowych jako własności zachowywanej przez wszystkie izomorfizmy liniowe. Można wykazać, że dla izomorfizmu liniowego f:

(I) jeśli podzbiór $X \subseteq V$ jest liniowo niezależny (zależny lub jest bazą), to $f(X)$ jest liniowo niezależny (odpowiednio zależny, jest bazą),

(II) jeśli $\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ i β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, to $f(\beta)$ jest kombinacją liniową wektorów $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$,

(III) jeśli $\dim V = n$, to $\dim W = n$.

W algebrze liniowej utożsamia się izomorficzne przestrzenie liniowe.

12.2 Suma prosta podprzestrzeni

Twierdzenie 12.2. *Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną i niech $V_1, \ldots, V_n$ będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V. Następujące warunki są równoważne:*

(i) $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{\Theta\}$ dla $i = 1, \ldots, n$;

(ii) jeśli $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \Theta$, gdzie $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \Theta$.

Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii). Weźmy dowolne $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ takie, że $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \Theta$. Wtedy dla $i = 1, \ldots, n$: $\alpha_i = (-\alpha_1) + \ldots + (-\alpha_{i-1}) + (-\alpha_{i+1}) + \ldots + (-\alpha_n) \in V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{\Theta\}$, czyli $\alpha_i = \Theta$ dla $i = 1, \ldots, n$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Weźmy dowolne $i = 1, \ldots, n$ i niech $\alpha \in V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n)$. Wtedy istnieją $\alpha_k \in V_k$ dla $k = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ takie, że $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_n$, skąd $\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i-1} + (-\alpha) + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_n = \Theta$. Zatem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = -\alpha = \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_n = \Theta$, skąd $\alpha = \Theta$. Zatem $V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_n) = \{\Theta\}$. $\square$

Definicja 12.2. Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest *sumą prostą swoich podprzestrzeni* $V_1, \ldots, V_n$, gdy $V = V_1 + \ldots + V_n$ oraz spełniony jest którykolwiek warunek (a więc oba warunki) powyższego twierdzenia. Piszemy wtedy $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$. Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to mówimy, że podprzestrzeń V_2 jest *dopełnieniem liniowym podprzestrzeni* V_1 (w przestrzeni V).

Twierdzenie 12.3. *Dla dowolnej podprzestrzeni V_1 przestrzeni liniowej V istnieje podprzestrzeń $W \subseteq V$ taka, że $V = V_1 \oplus W$.*

Dowód. Z twierdzenia 11.5 podprzestrzeń V_1 posiada bazę X. Zatem z twierdzenia 11.4 istnieje podzbiór $Y \subseteq V$ rozłączny z X i taki, że zbiór $X \cup Y$ jest bazą przestrzeni V. Ponadto $V_1 = lin(X)$ oraz $V = lin(X \cup Y)$. Niech $W = lin(Y)$. Wtedy z twierdzenia 10.5 mamy, że $lin(X \cup Y) = lin(X) + lin(Y)$, czyli $V = V_1 + W$. Niech $\alpha \in V_1 \cap W$. Wtedy istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X$, $\beta_1, \ldots, \beta_k \in Y$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_k \circ \beta_k$, skąd $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n + (-b_1) \circ \beta_1 + \ldots + (-b_k) \circ \beta_k = \Theta$. Zatem z liniowej niezależności zbioru $X \cup Y$ mamy, że $a_1 = \ldots = a_n = -b_1 = \ldots = -b_k = 0$, czyli $\alpha = \Theta$ i $V_1 \cap W = \{\Theta\}$. Zatem $V = V_1 \oplus W$.
□

12.3 Hiperpłaszczyzny liniowe

Definicja 12.3. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową. *Hiperpłaszczyzną liniową przestrzeni V* nazywamy każdą podprzestrzeń przestrzeni V o wymiarze $n-1$.

Twierdzenie 12.4. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K wymiaru n i niech V_1 będzie podprzestrzenią wymiaru k. Wówczas V_1 jest częścią wspólną $n-k$ hiperpłaszczyzn liniowych przestrzeni V.*

Dowód. Niech $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ będzie bazą podprzestrzeni V_1. Z twierdzenia Steinitza o wymianie możemy ją uzupełnić do bazy $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n\}$ przestrzeni V. Niech $W_i = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_{k+i-1}, \alpha_{k+i+1}, \ldots, \alpha_n)$ dla $i = 1, \ldots, n-k$. Wówczas $W_1, \ldots, W_{n-k}$ są hiperpłaszczyznami zawierającymi V_1, skąd $V_1 \subseteq W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$. Niech $\alpha \in W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$. Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Dla liczb naturalnych $i \leq n-k$ mamy, że $\alpha \in W_i$, więc wektor α można przedstawić w postaci $\alpha =$

$a_{i1} \circ \alpha_1 + \ldots + a_{i\,k+i-1} \circ \alpha_{k+i-1} + a_{i\,k+i+1} \circ \alpha_{k+i+1} + \ldots + a_{in} \circ \alpha_n$. Z jednoznaczności przedstawienia wektora α w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ wynika, że $a_{k+i} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n-k$. Wobec tego $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k \in V_1$. Zatem $W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k} \subseteq V_1$ i ostatecznie $V_1 = W_1 \cap \ldots \cap W_{n-k}$. □

Twierdzenie 12.5. *Niech l będzie liczbą naturalną. Niech $V_1, \ldots, V_l$ będą hiperpłaszczyznami n-wymiarowej przestrzeni liniowej V. Wówczas* $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_l) \geq n - l$.

Dowód. Dla $l = 1$ teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego $l = k$ i niech $V_1, \ldots, V_{k+1}$ będą hiperpłaszczyznami przestrzeni V. Z założenia indukcyjnego wynika, że $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k) \geq n - k$, a z wniosku 11.3 otrzymujemy $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k \cap V_{k+1}) \geq \dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k) + n - 1 - n$. Zatem $\dim(V_1 \cap \ldots \cap V_k \cap V_{k+1}) \geq n - k + n - 1 - n = n - (k+1)$. Z zasady indukcji wynika zatem, że nasze twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej l. □

Z twierdzeń 12.4 i 12.5 wynika od razu następujący

Wniosek 12.2. *Każda k-wymiarowa podprzestrzeń W n-wymiarowej przestrzeni liniowej V daje się przedstawić jako przecięcie $n-k$, ale nie mniejszej liczby hiperpłaszczyzn liniowych.* □

12.4 Podprzestrzenie przestrzeni współrzędnych

Twierdzenie 12.6. *Podprzestrzeń W przestrzeni K^n wyznaczona przez równanie $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$, gdzie $a_1, \ldots, a_n \in K$ i co najmniej jeden ze współczynników $a_1, \ldots, a_n$ jest różny od zera, jest hiperpłaszczyzną liniową.*

Dowód. Załóżmy, że współczynnik $a_i \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$. Podprzestrzeń W jest różna od K^n, gdyż wektor ε_i nie jest rozwiązaniem rozpatrywanego równania, a stąd $\dim W \leq n-1$. Dla dowodu równości $\dim W = n-1$ wystarczy więc wskazać $n-1$ liniowo nie-

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

zależnych rozwiązań równania $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$. Łatwo sprawdzić, że wektory $\varepsilon_1-\frac{a_1}{a_i}\circ\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_{i-1}-\frac{a_{i-1}}{a_i}\circ\varepsilon_i,\varepsilon_{i+1}-\frac{a_{i+1}}{a_i}\circ\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_n-\frac{a_n}{a_i}\circ\varepsilon_i$ czynią zadość temu żądaniu. □

Z twierdzeń 12.5 i 12.6 wynika od razu następujący

Wniosek 12.3. *Podprzestrzeń przestrzeni K^n wyznaczona przez układ m równań jednorodnych liniowych ma wymiar nie mniejszy niż $n-m$.* □

Twierdzenie 12.7. *Każda hiperpłaszczyzna liniowa W przestrzeni liniowej K^n jest wyznaczona przez pewne równanie $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=0$, gdzie $a_1,\ldots,a_n\in K$.*

Dowód. Niech wektory $\alpha_i=[a_{i1},\ldots,a_{in}]$ dla $i=1,\ldots,n-1$ tworzą bazę hiperpłaszczyzny W i niech V będzie podprzestrzenią opisaną przez układ równań

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0\\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n-1\,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n-1\,n}x_n & = & 0 \end{array}\right. . \qquad (12.2)$$

Z wniosku 12.3 wynika, że $\dim V\geq n-(n-1)=1$, a więc podprzestrzeń V zawiera niezerowy wektor. Niech $[b_1,\ldots,b_n]$ będzie niezerowym wektorem podprzestrzeni V. Przestrzeń V_1 wyznaczona przez równanie $b_1x_1+\ldots+b_nx_n=0$ jest na mocy twierdzenia 12.6 hiperpłaszczyzną liniową. Ponadto z określenia wektora $[b_1,\ldots,b_n]$ wynika, że wektory α_j dla $j=1,\ldots,n-1$ należą do hiperpłaszczyzny V_1, a zatem $W=lin(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\subseteq V_1$. Ponieważ $\dim W=\dim V_1=n-1$, więc z twierdzenia 11.12, $W=V_1$. □

Z twierdzenia 12.7 i z wniosku 12.2 mamy natychmiast następujący

Wniosek 12.4. *Każda k-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni liniowej K^n jest wyznaczona przez układ złożony z $n-k$, ale nie mniej, równań liniowych jednorodnych.* □

Rozdział 13

Rząd macierzy

13.1 Określenie rzędu macierzy

Niech A będzie $m \times n$ - macierzą nad ciałem K. Wówczas wiersze macierzy A możemy w naturalny sposób traktować jako wektory przestrzeni K^n, zaś kolumny macierzy A możemy traktować jako wektory przestrzeni K^m. *Rzędem wierszowym* macierzy A nazywamy maksymalną ilość jej liniowo niezależnych wierszy. Natomiast *rzędem kolumnowym* macierzy A nazywamy maksymalną ilość jej liniowo niezależnych kolumn. Rząd wierszowy i rząd kolumnowy macierzy A oznaczamy odpowiednio symbolami: $r_w(A)$ i $r_k(A)$.

Z tego określenia wynika od razu, że dla dowolnej macierzy A:

$$r_w(A) = r_k(A^T) \text{ oraz } r_k(A) = r_w(A^T). \tag{13.1}$$

Ponadto z określenia rzędu macierzy mamy natychmiast, że

$$r_w(0_{m \times n}) = r_k(0_{m \times n}) = 0. \tag{13.2}$$

Z twierdzenia 11.8 wynika od razu, że **rząd wierszowy macierzy A jest równy wymiarowi podprzestrzeni generowanej przez jej wektory wierszowe, zaś rząd kolumnowy macierzy A jest równy wymiarowi podprzestrzeni generowanej przez wektory kolumnowe macierzy A.**

Ponadto z własności operacji elementarnych **rząd wierszowy macierzy A nie zmienia się przy stosowaniu operacji elementarnych na wierszach tej macierzy oraz rząd kolumnowy macierzy A nie zmienia się przy stosowaniu operacji elementarnych na kolumnach tej macierzy.**

Lemat 13.1. *Jeżeli do pewnego wiersza macierzy dodamy inny jej wiersz pomnożony przez dowolny skalar, to rząd kolumnowy tej macierzy nie ulegnie zmianie.*

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie $m \times n$-macierzą nad ciałem K. Dla uproszczenia znakowania założymy, że do pierwszego wiersza macierzy A dodano drugi jej wiersz pomnożony przez skalar $a \in K$ i oznaczmy przez $B = [b_{ij}]$ macierz uzyskaną w wyniku tej operacji. Niech $r = r_k(A)$. Oznacza to, że pewne r-kolumn macierzy A są liniowo niezależne. Dla uproszczenia znakowania załóżmy, że pierwsze r-kolumny macierzy A są liniowo niezależne. Udowodnimy, że wówczas pierwsze r-kolumny macierzy B też są liniowo niezależne. Niech A_j oraz B_j oznaczają j-tą kolumnę macierzy A i B odpowiednio. Weźmy dowolne $x_1, \dots, x_r \in K$ takie, że $x_1 \circ B_1 + \ldots + x_r \circ B_r = \Theta$. Wtedy

$$x_1 \circ \begin{bmatrix} a_{11} + aa_{21} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_r \circ \begin{bmatrix} a_{1r} + aa_{2r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix} = 0_{m\times 1},$$

więc

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (a_{11} + aa_{12})x_1 & + & \ldots & + & (a_{1r} + aa_{2r})x_r & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2r}x_r & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mr}x_r & = & 0 \end{array} \right.,$$

skąd po odjęciu od pierwszej równości równości drugiej pomnożonej przez a uzyskamy, że $x_1 \circ A_1 + \ldots + x_r \circ A_r = \Theta$. Zatem z liniowej niezależności kolumn $A_1, \dots, A_r$ wynika, że $x_1 = \ldots = x_r = 0$ i kolumny $B_1, \dots, B_r$ są liniowo niezależne. Zatem $r_k(B) \geq r_k(A)$. Ale

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

macierz A powstaje z macierzy B przez dodanie do pierwszego wiersza drugiego wiersza pomnożonego przez skalar $(-a)$, więc z pierwszej części dowodu $r_k(A) \geq r_k(B)$ i ostatecznie $r_k(A) = r_k(B)$. □

Z (13.1) i z lematu 13.1 wynika od razu, że prawdziwy jest też następujący

Lemat 13.2. *Jeżeli do pewnej kolumny macierzy dodamy inną jej kolumnę pomnożoną przez dowolny skalar, to rząd wierszowy tej macierzy nie ulegnie zmianie.* □

Lemat 13.3. *Niech $m, n \geq 2$ i niech $A = [a_{ij}]$ będzie $m \times n$-macierzą nad ciałem K taką, że dla pewnych s, t jest $a_{st} \neq 0$ oraz $a_{it} = 0$ dla wszystkich $i \neq s$ i $a_{sj} = 0$ dla wszystkich $j \neq t$. Wówczas oraz $r_k(A) = 1 + r_k(A_{st})$ oraz $r_w(A) = 1 + r_w(A_{st})$.*

Dowód. Niech $r = r_k(A_{st})$. Istnieją wówczas kolumny $B_1, \ldots, B_r$ macierzy A_{st}, które są liniowo niezależne i takie, że każda kolumna macierzy A_{st} jest ich kombinacją liniową. Oznaczmy przez A_j kolumnę macierzy A powstającą przez dopisanie 0 w s-tym wierszu macierzy B_j dla $j = 1, \ldots, r$. Niech A_{r+1} oznacza t-tą kolumnę macierzy A. Weźmy dowolne $x_1, \ldots, x_{r+1} \in K$ takie, że $x_1 \circ A_1 + \ldots + x_{r+1} \circ A_{r+1} = \Theta$. Wtedy $x_{r+1}a_{st} = 0$, skąd $x_{r+1} = 0$ oraz $x_1 \circ B_1 + \ldots + x_r \circ B_r = \Theta$. Zatem z liniowej niezależności $B_1, \ldots, B_r$ jest $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Stąd kolumny $A_1, \ldots, A_{r+1}$ są liniowo niezależne. Niech X będzie dowolną kolumną macierzy A o numerze różnym od t. Niech Y będzie kolumną macierzy A_{st} powstającą z X przez wykreślenie s-tego wiersza (który składa się z jednego zera!). Wtedy istnieją $a_1, \ldots, a_r \in K$ takie, że $Y = a_1 \circ B_1 + \ldots + a_r \circ B_r$, skąd $X = a_1 \circ A_1 + \ldots + a_r \circ A_r$. Wynika stąd, że wszystkie kolumny macierzy A są kombinacjami liniowymi kolumn $A_1, \ldots, A_r, A_{r+1}$. Oznacza to, że $r_k(A) = r + 1 = 1 + r_k(A_{st})$.

Dowód drugiej części lematu wynika natychmiast z (13.1) i z pierwszej jego części.□

Twierdzenie 13.1. *Rząd kolumnowy dowolnej macierzy równy jest jej rzędowi wierszowemu.*

Dowód. Indukcja względem liczby m wierszy macierzy. Jeżeli $m = 1$, to $A = [a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]$ dla pewnych skalarów $a_1, \ldots, a_n$.

Jeżeli $a_1 = \ldots = a_n = 0$, to $r_w(A) = 0 = r_k(A)$. Jeżeli zaś $a_j \neq 0$ dla pewnego $j = 1, \ldots, n$, to $r_w(A) = 1 = r_k(A)$. Zatem teza zachodzi dla $m = 1$.

Niech teraz m będzie liczbą naturalną większą od 1 i taką, że teza zachodzi dla wszystkich macierzy nad ciałem K, które mają mniej niż m wierszy. Weźmy dowolną $m \times n$-macierz $A = [a_{ij}]$ nad ciałem K. Jeśli $A = 0_{m \times n}$, to $r_w(A) = 0 = r_k(A)$. Niech zatem $A \neq 0_{m \times n}$. Wtedy istnieją k, l takie, że $a_{kl} \neq 0$. Jeśli $n = 1$, to $r_w(A) = r_k(A^T)$, więc z założenia indukcyjnego $r_k(A^T) = r_w(A^T) = r_k(A)$, czyli $r_w(A) = r_k(A)$. Niech dalej $n > 1$. Niech $B = [b_{ij}]$ będzie macierzą powstającą z macierzy A przez wykonanie operacji elementarnych: $w_i - \frac{a_{il}}{a_{kl}} \cdot w_k$ dla wszystkich $i \neq k$. Wtedy $r_w(B) = r_w(A)$ oraz z lematu 13.1, $r_k(B) = r_k(A)$. Niech dalej C będzie macierzą powstającą z macierzy B przez wykonanie operacji elementarnych: $k_j - \frac{b_{kj}}{a_{kl}} \cdot k_l$ dla wszystkich $j \neq l$. Wtedy $r_k(C) = r_k(B)$ oraz z lematu 13.2, $r_w(C) = r_w(B)$. Ale z lematu 13.3 mamy, że $r_w(C) = 1 + r_w(C_{kl})$ oraz $r_k(C) = 1 + r_k(C_{kl})$. Z założenia indukcyjnego $r_w(C_{kl}) = r_k(C_{kl})$. Zatem $r_w(A) = 1 + r_k(C_{kl}) = r_k(A)$. $\square$

13.2 Metody obliczania rzędu macierzy

Wspólną wartość rzędu kolumnowego i wierszowego macierzy A nazywamy *rzędem macierzy* A i oznaczamy przez $r(A)$. Z twierdzenia 13.1 oraz z początkowej części tego rozdziału mamy od razu następujące

Twierdzenie 13.2. *Operacje elementarne wykonywane na wierszach lub kolumnach macierzy nie zmieniają jej rzędu.* $\square$

Z twierdzenia 13.1 oraz ze wzoru (13.1) wynika od razu następujące

Twierdzenie 13.3. *Dla dowolnej macierzy A: $r(A) = r(A^T)$.* $\square$

Twierdzenie 13.4. *Niech $A = [a_{ij}]$ będzie taką $m \times n$-macierzą nad ciałem K, że $a_{kl} \neq 0$ dla pewnych k, l oraz $a_{il} = 0$ dla wszystkich*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$i \neq k$. *Wtedy* $r(A) = 1 + r(A_{kl})$.

Dowód. Oznaczmy przez B macierz powstającą z macierzy A przez wykonanie operacji elementarnych: $k_j - \frac{a_{kj}}{a_{kl}} \cdot k_l$ dla wszystkich $j \neq l$. Wtedy $B_{kl} = A_{kl}$ oraz na mocy twierdzenia 13.2, $r(A) = r(B)$. Ponadto z twierdzenia 13.1 i z lematu 13.3, $r(B) = 1 + r(B_{kl})$. Zatem $r(A) = 1 + r(A_{kl})$. □

Twierdzenie 13.5. *Niech* $A = [a_{ij}]$ *będzie macierzą kwadratową stopnia* n *nad ciałem* K. *Wówczas równoważne są warunki:*

(i) $r(A) = n$,

(ii) $\det(A) \neq 0$.

Dowód. (i)⇒(ii). Ponieważ wszystkie kolumny $A_1, \ldots, A_n$ macierzy A są liniowo niezależne i jest ich n, więc tworzą one bazę przestrzeni K^n. Wynika stąd, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$ istnieją skalary $x_{i1}, \ldots, x_{in} \in K$ takie, że $x_{i1} \circ A_1 + \ldots + x_{in} \circ A_n = \varepsilon_i$. Niech $X = [x_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$. Wtedy $A \cdot X = I_n$, skąd z twierdzenia Cauchy'ego $\det(A) \neq 0$.

(ii)⇒(i). Ponieważ $\det(A) \neq 0$, więc istnieje macierz $X = [x_{ij}] \in M_n(K)$ taka, że $A \cdot X = I_n$. Wtedy dla każdego $i = 1, \ldots, n$ mamy, że $\varepsilon_i = x_{i1} \circ A_1 + \ldots + x_{in} \circ A_n$, więc kolumny macierzy A generują przestrzeń K^n. Stąd na mocy twierdzenia 11.14 te kolumny są liniowo niezależne, czyli $r(A) = n$. □

Definicja 13.1. Niech A będzie $m \times n$-macierzą nad ciałem K oraz niech k będzie liczbą naturalną taką, że $k \leq \min\{m, n\}$. *Minorem* stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia k, która powstaje z macierzy A przez wykreślenie $m-k$ wierszy oraz $n - k$ kolumn.

Twierdzenie 13.6. *Rząd niezerowej macierzy jest równy maksymalnemu stopniowi jej niezerowego minora.*

Dowód. Niech A będzie niezerową $m \times n$-macierzą nad ciałem K. Oznaczmy przez k maksymalny stopień niezerowego minora macierzy A oraz przez r rząd tej macierzy. Wtedy pewne r wierszy macierzy A jest liniowo niezależnych. Wykreślając pozostałe wiersze uzyskamy $k \times n$-macierz B o rzędzie r. Zatem z twierdzenia 13.1 pewne r kolumn macierzy B są liniowo niezależne. Wykreślając w macierzy B pozostałe kolumny uzyskamy macierz kwadratową C stopnia r o rzędzie r. Zatem z twierdzenia 13.4, $\det(C) \neq 0$. Ale $\det(C)$ jest minorem stopnia r macierzy A, więc $r \leq k$.

Niech teraz D będzie macierzą kwadratową stopnia k powstającą z macierzy A przez wykreślenie pewnych $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn taką, że $\det(D) \neq 0$. Wtedy z twierdzenia 13.4 mamy, że $r(D) = k$. Niech X będzie macierzą powstającą z macierzy A przez wykreślenie tych samych wierszy, co dla macierzy D. Wtedy $r(X) \leq k$ oraz wszystkie kolumny macierzy D są liniowo niezależne, więc $r(X) \geq k$ i ostatecznie $r(X) = k$. Stąd z definicji rzędu wierszowego macierzy $k \leq r$ i ostatecznie $r = k$. $\square$

13.3 Twierdzenie Kroneckera-Capellie'go

Niech dany będzie teraz dowolny układ m-równań liniowych z n-niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ nad ciałem K:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. , \tag{13.3}$$

Macierzą współczynników układu (13.3) nazywamy macierz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{13.4}$$

zaś *macierzą uzupełnioną* układu (13.3) nazywamy macierz:

$$A_u = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{13.5}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Twierdzenie 13.7 (Kroneckera-Capellie'go). *Układ (13.3) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $r(A) = r(A_u)$. *Ponadto układ (13.3) ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $r(A) = r(A_u) = n$.

Dowód. Oznaczmy przez α_j j-tą kolumnę macierzy A i niech $\beta = [b_1, \dots, b_m]$. Układ (13.3) można wtedy zapisać jako równanie wektorowe:

$$x_1 \circ \alpha_1 + \ldots + x_n \circ \alpha_n = \beta. \tag{13.6}$$

Jeżeli $(a_1, \dots, a_n)$ jest rozwiązaniem układu (13.3), to $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \beta$, skąd na mocy twierdzenia 10.4 i twierdzenia 10.6 mamy, że $lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, czyli $r(A_u) = r(A)$. Na odwrót, załóżmy, że $r(A_u) = r(A)$. Wtedy

$$\dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta),$$

więc z twierdzenia 11.12 mamy, że $lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta) = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, skąd $\beta \in lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, czyli istnieją $a_1, \dots, a_n \in K$ takie, żc $\beta = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ i wówczas $(a_1, \dots, a_n)$ jest rozwiązaniem układu (13.3).

Pozostaje udowodnić drugą część twierdzenia. Załóżmy najpierw, że $r(A_u) = r(A) = n$. Wówczas kolumny $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne, więc tworzą bazę podprzestrzeni $lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Ale wtedy $\dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \dim lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$, skąd $lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$, czyli $\beta \in lin(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Zatem z twierdzenia 11.9 istnieje dokładnie jeden ciąg $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ taki, że $\beta = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, więc układ (13.3) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Na odwrót, załóżmy, że układ (13.3) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $(a_1, \dots, a_n)$. Wówczas z pierwszej części dowodu $r(A_u) = r(A)$. Wystarczy zatem wykazać, że wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne. Ale jeżeli $b_1, \dots, b_n \in K$ są takie, że $b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n = \Theta$, to $(a_1 + b_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_n + b_n) \circ \alpha_n = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n + \Theta = \beta$, więc $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ jest rozwiązaniem układu (13.3), skąd $a_i + b_i = a_i$, czyli $b_i = 0$ dla $i = 1, \dots, n$, a więc wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liniowo niezależne. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Z rezultatów uzyskanych dotychczas wynika, że można stosować następujący schemat postępowania dla znalezienia wszystkich rozwiązań układu (13.3). Najpierw obliczamy $r(A)$ i $r(A_u)$. Jeżeli $r(A) \neq r(A_u)$, to układ (13.3) nie ma rozwiązania. Jeśli zaś $r = r(A) = r(A_u)$, to układ posiada rozwiązanie. Wyznaczamy wówczas r liniowo niezależnych wierszy w macierzy A_u i wykreślamy wszystkie pozostałe jej wiersze. W otrzymanej macierzy znajdujemy k liniowo niezależnych kolumn. Następnie w przekształconym układzie równań przenosimy na prawą stronę wszystkie niewiadome o numerach pozostałych $n - k$ kolumn i stosujemy wzory Cramera dla obliczenia pozostałych niewiadomych (natomiast niewiadome przenoszone na drugie strony są dowolnymi elementami ciała K).

Rozdział 14

Przestrzenie ilorazowe

14.1 Konstrukcja przestrzeni ilorazowej

Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K. W zbiorze V określamy relację $\sim$ przyjmując, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W \tag{14.1}$$

Ponieważ $\Theta \in W$, więc dla każdego $\alpha \in V$, jest $\alpha - \alpha \in W$, skąd $\alpha \sim \alpha$ i relacja $\sim$ jest zwrotna.

Weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ takie, że $\alpha \sim \beta$. Wtedy $\alpha - \beta \in W$, skąd $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta) \in W$, czyli $\beta \sim \alpha$ i relacja $\sim$ jest symetryczna.

Weźmy dowolne $\alpha, \beta, \gamma \in V$ takie, że $\alpha \sim \beta$ i $\beta \sim \gamma$. Wtedy $\alpha - \beta, \beta - \gamma \in W$, skąd $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$, czyli $\alpha \sim \gamma$ i relacja $\sim$ jest przechodnia.

W ten sposób pokazaliśmy, że $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze V. Dla $\alpha \in V$ przez $\alpha + W$ oznaczmy klasę abstrakcji relacji $\sim$ o reprezentancie α. Pokażemy, że

$$\alpha + W = \{\alpha + \beta : \beta \in W\} \tag{14.2}$$

Rzeczywiście, jeżeli $\gamma \in \alpha + W$, to $\gamma \sim \alpha$, skąd $\gamma - \alpha = \beta \in W$ oraz $\gamma = \alpha + \beta$. Na odwrót, jeżeli $\gamma = \alpha + \beta$ dla pewnego $\beta \in W$, to

$\gamma - \alpha = \beta \in W$, skąd $\gamma \sim \alpha$ i $\gamma \in \alpha + W$.

Dla $\alpha \in V$ zbiór $\alpha + W$ będziemy dalej nazywali *warstwą o reprezentancie α względem podprzestrzeni W*. Z własności klas abstrakcji relacji równoważności wynika, że *dowolne dwie warstwy względem podprzestrzeni W są albo równe albo rozłączne oraz przestrzeń V jest sumą rozłączną pewnych swoich warstw względem W.*

Zauważmy, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$:

$$\alpha + W = \beta + W \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W. \tag{14.3}$$

Rzeczywiście, $\alpha + W = \beta + W \Leftrightarrow \alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta \in W$.

Ponadto

$$\Theta + W = W, \tag{14.4}$$

bo $\Theta + W = \{\Theta + \beta : \beta \in W\} = \{\beta : \beta \in W\} = W$.

Ze wzorów (14.3) i (14.4) wynika od razu, że dla każdego $\alpha \in V$:

$$\alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W. \tag{14.5}$$

Zatem jedna warstwa może mieć wiele reprezentantów! Warstwę W będziemy nazywali *warstwą zerową*. Zbiór wszystkich warstw przestrzeni V względem podprzestrzeni W będziemy oznaczali przez V/W. Zatem

$$V/W = \{\alpha + W : \alpha \in V\}. \tag{14.6}$$

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ określamy sumę warstw $\alpha + W$ i $\beta + W$ przy pomocy wzoru:

$$(\alpha + W) + (\beta + W) = (\alpha + \beta) + W. \tag{14.7}$$

Sprawdzimy, że wzór (14.7) nie zależy od wyboru reprezentantów warstw. W tym celu weźmy dowolne $\alpha_1, \beta_1 \in V$ takie, że $\alpha_1 \sim \alpha$ i $\beta_1 \sim \beta$. Wtedy $\alpha_1 - \alpha, \beta_1 - \beta \in W$, skąd $(\alpha_1 + \beta_1) - (\alpha + \beta) = (\alpha_1 - \alpha) + (\beta_1 - \beta) \in$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

W, czyli $(\alpha_1 + \beta_1) + W = (\alpha + \beta) + W$ na mocy wzoru (14.3).

Teraz określimy iloczyn warstwy $\alpha + W$ przez skalar $a \in K$:

$$a \circ (\alpha + W) = a \circ \alpha + W. \tag{14.8}$$

Sprawdzimy, że to określenie nie zależy od wyboru reprezentantów warstw. W tym celu weźmy dowolne $\alpha_1 \in V$ takie, że $\alpha_1 \sim \alpha$. Wtedy $\alpha_1 - \alpha \in W$, skąd $a \circ (\alpha_1 - \alpha) \in W$, czyli $a \circ \alpha_1 - a \circ \alpha \in W$, więc $a \circ \alpha_1 + W = a \circ \alpha + W$ na mocy (14.3).

Twierdzenie 14.1. *Dla dowolnej podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V nad ciałem K zbiór V/W z dodawaniem warstw określonym wzorem (14.7) i mnożeniem warstw przez skalary określonym wzorem (14.8) oraz z warstwą zerową W tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K (nazywamy ją* przestrzenią ilorazową przestrzeni V względem podprzestrzeni W*).*

Dowód. Weźmy dowolne $\alpha, \beta, \gamma \in V$. **A1**. Ponieważ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, więc $(\beta + W) + (\alpha + W) = (\beta + \alpha) + W = (\alpha + \beta) + W = (\alpha + W) + (\beta + W)$. **A2**. Ponieważ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, więc $[(\alpha + W) + (\beta + W)] + (\gamma + W) = [(\alpha + \beta) + W] + (\gamma + W) = [(\alpha + \beta) + \gamma] + W = [\alpha + (\beta + \gamma)] + W = (\alpha + W) + [(\beta + \gamma) + W] = (\alpha + W) + [(\beta + W) + (\gamma + W)]$. **A3**. Ponieważ $\alpha + \Theta = \alpha$, więc $(\alpha + W) + W = (\alpha + W) + (\Theta + W) = (\alpha + \Theta) + W = \alpha + W$. **A4**. Ponieważ $\alpha + (-\alpha) = \Theta$, więc $(\alpha + W) + ((-\alpha) + W) = [\alpha + (-\alpha)] + W = \Theta + W = W$. Stąd dla $\alpha \in V$ mamy wzór:

$$-(\alpha + W) = (-\alpha) + W. \tag{14.9}$$

A5. Ponieważ dla $a \in K$ jest $a \circ (\alpha + \beta) = a \circ \alpha + a \circ \beta$, więc $a \circ [(\alpha + W) + (\beta + W)] = a \circ [(\alpha + \beta) + W] = a \circ (\alpha + \beta) + W = (a \circ \alpha + a \circ \beta) + W = (a \circ \alpha + W) + (a \circ \beta + W) = a \circ (\alpha + W) + a \circ (\beta + W)$. **A6**. Ponieważ dla $a, b \in K$ jest $(a + b) \circ \alpha = a \circ \alpha + b \circ \alpha$, więc $(a + b) \circ (\alpha + W) = (a + b) \circ \alpha + W = (a \circ \alpha + b \circ \alpha) + W = (a \circ \alpha + W) + (b \circ \alpha + W) = a \circ (\alpha + W) + b \circ (\alpha + W)$. **A7**. Ponieważ dla dowolnych $a, b \in K$ jest $(ab) \circ \alpha = a \circ (b \circ \alpha)$, więc $(ab) \circ (\alpha + W) = (ab) \circ \alpha + W = a \circ (b \circ \alpha) + W = a \circ (b \circ \alpha + W) = a \circ [b \circ (\alpha + W)]$. **A8**. Ponieważ $1 \circ \alpha = \alpha$, więc $1 \circ (\alpha + W) = 1 \circ \alpha + W = \alpha + W$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

14.2 Baza i wymiar przestrzeni ilorazowej

Twierdzenie 14.2. *Niech W i U będą podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V nad ciałem K takimi, że $V = W \oplus U$. Wówczas przekształcenie $f : U \longrightarrow V/W$ dane wzorem $f(\alpha) = \alpha + W$ dla $\alpha \in U$ jest izomorfizmem liniowym. W szczególności*

$$V/W \cong U.$$

Dowód. Z określenia f mamy, że dla dowolnych $\alpha, \beta \in U$, $a \in K$ jest $f(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) + W = (\alpha + W) + (\beta + W) = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a \circ \alpha) = a \circ \alpha + W = a \circ (\alpha + W) = a \circ f(\alpha)$. Jeżeli zaś $f(\alpha) = f(\beta)$, to $\alpha + W = \beta + W$, skąd $\alpha - \beta \in W$. Ale $\alpha, \beta \in U$, więc $\alpha - \beta \in W \cap U = \{\Theta\}$, czyli $\alpha - \beta = \Theta$ i $\alpha = \beta$. Zatem f jest różnowartościowe. Dowolna warstwa przestrzeni V/W ma postać $\alpha + W$ dla pewnego $\alpha \in V$. Ale $V = W + U$, więc istnieją $\beta \in W$ i $\gamma \in U$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$. Stąd $\alpha - \gamma \in W$, więc $\alpha + W = \gamma + W = f(\gamma)$. Zatem f jest "na" i ostatecznie f jest izomorfizmem liniowym. □

Ponieważ izomorfizm liniowy przekształca bazę na bazę, więc z twierdzenia 14.2 oraz z dowodu twierdzenia 12.3 mamy natychmiast następujące

Twierdzenie 14.3. *Niech X będzie bazą podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V i niech $Y \subseteq V$ będzie zbiorem liniowo niezależnym rozłącznym z X takim, że $X \cup Y$ jest bazą przestrzeni V. Wtedy dla dowolnych $\alpha, \beta \in Y$ mamy, że $\alpha + W = \beta + W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta$ oraz zbiór $\{\alpha + W : \alpha \in Y\}$ jest bazą przestrzeni ilorazowej V/W.* □

Twierdzenie 14.4. *Niech W będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Wówczas zachodzi wzór:*

$$\dim(V/W) = \dim V - \dim W.$$

Dowód. Z twierdzenia 12.3 istnieje podprzestrzeń przestrzeni V taka, że $V = W \oplus U$. Zatem $W \cap U = \{\Theta\}$, więc na mocy twierdzenia 11.15 mamy, że $\dim V = \dim W + \dim U$. Ale na mocy twierdzenia 14.2 jest $V/W \cong U$, więc $\dim(V/W) = \dim U = \dim V - \dim W$. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Przykład 14.1. Wyznaczymy bazę i wymiar przestrzeni ilorazowej $\mathbb{R}^4/W$ dla $W = lin([1,1,1,1],[1,2,3,4])$. W tym celu najpierw za pomocą operacji elementarnych wyznaczamy bazę podprzestrzeni W. Po wykonaniu operacji $w_2 - w_1$ uzyskamy, że $W = lin([1,1,1,1],[0,1,2,3])$ oraz wektory $[1,1,1,1]$, $[0,1,2,3]$ tworzą bazę podprzestrzeni W, gdyż wektory $[1,1,1,1]$, $[0,1,2,3]$, $[0,0,1,0]$, $[0,0,0,1]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Zatem z twierdzenia 14.3 wektory $[0,0,1,0]+W$, $[0,0,0,1]+W$ tworzą bazę przestrzeni ilorazowej $\mathbb{R}^4$, skąd $\dim(\mathbb{R}^4/W) = 2$. □

Przykład 14.2. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{Q}^3$ generowaną przez wektory $[1,2,3]$ i $[0,1,0]$. Sprawdzimy, czy zachodzi równość warstw $[1,0,1]+W$ oraz $[2,4,5]+W$. Na mocy (14.3) mamy, że $[2,4,5]+W = [1,0,1]+W \Leftrightarrow [2,4,5]-[1,0,1] \in W \Leftrightarrow [1,4,4] \in W$. Ale wektory $[1,2,3]$ i $[0,1,0]$ tworzą bazę podprzestrzeni W, więc $[1,4,4] \in W \Leftrightarrow$ (wektory $[1,2,3],[0,1,0],[1,4,4]$ są liniowo zależne). Lecz po wykonaniu operacji $w_3 - w_1$, $w_3 - 2w_2$ uzyskamy z tych wektorów bazę $\{[1,2,3],[0,1,0],[0,0,1]\}$ przestrzeni $\mathbb{Q}^3$, więc wektory $[1,2,3]$, $[01,0]$, $[1,4,4]$ są liniowo niezależne i wobec tego $[1,0,1]+W \neq [2,4,5]+W$. □

Przykład 14.3. Niech $K = \mathbb{Z}_2$, $V = K^4$ oraz W będzie podprzestrzenią przestrzeni V generowaną przez wektory $[1,0,1,1]$, $[1,1,0,1]$, $[0,1,1,0]$. Wypiszemy wszystkie elementy przestrzeni ilorazowej V/W. Po wykonaniu operacji $w_2 - w_1$ uzyskamy, że
$W = lin([1,0,1,1],[0,1,1,0])$ oraz wektory $[1,0,1,1]$, $[0,1,1,0]$ tworzą bazę podprzestrzeni W, gdyż wektory $[1,0,1,1]$, $[0,1,1,0]$, $[0,0,1,0]$, $[0,0,0,1]$ tworzą bazę przestrzeni V. Zatem z twierdzenia 14.3 wektory $[0,0,1,0]+W$ i $[0,0,0,1]+W$ tworzą bazę przestrzeni ilorazowej V/W. Ponieważ $K = \{0,1\}$, więc stąd przestrzeń ilorazowa V/W ma dokładnie 4 elementy: W, $[0,0,1,0]+W$, $[0,0,0,1]+W$ oraz $([0,0,1,0]+W)+([0,0,0,1]+W) = [0,0,1,1]+W$.

Ponadto $W = \{[0,0,0,0],[1,0,1,1],[0,1,1.0],[1,1,0,1]\}$, więc na przykład $[0,0,1,0]+W = \{[0,0,1,0],[1,0,0,1],[[0,1,0,0],[1,1,1,1]\}$.
□

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Rozdział 15

Przekształcenia liniowe i ich zastosowania

15.1 Przekształcenia liniowe i ich własności

Definicja 15.1. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Przekształcenie $f : V \longrightarrow W$ spełniające warunki: (I) $\forall_{\alpha,\beta\in V}\ f(\alpha+\beta) = f(\alpha)+f(\beta)$ oraz (II) $\forall_{\alpha\in V}\forall_{a\in K}\ f(a\circ\alpha) = a\circ f(\alpha)$ nazywamy *przekształceniem liniowym* przestrzeni V w przestrzeń W.

Stwierdzenie 15.1. *Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.*

Dowód. Niech $f : V \longrightarrow W$ i $g : W \longrightarrow U$ będą przekształceniami liniowymi. Wówczas dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$ jest $(g \circ f)(\alpha + \beta) = g(f(\alpha + \beta)) = g(f(\alpha) + f(\beta)) = g(f(\alpha)) + g(f(\beta)) = (g \circ f)(\alpha) + (g \circ f)(\beta)$ oraz dla dowolnych $\alpha \in V$, $a \in K$ jest: $(g \circ f)(a \circ \alpha) = g(f(a \circ \alpha)) = g(a \circ f(\alpha)) = a \circ g(f(\alpha)) = a \circ (g \circ f)(\alpha)$. Zatem $g \circ f$ jest przekształceniem liniowym. □

Stwierdzenie 15.2. *Niech $f : V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V nad ciałem K w przestrzeń liniową W nad ciałem K. Wówczas:*

(i) $f(\Theta) = \Theta$,
(ii) $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ *dla każdego* $\alpha \in V$,
(iii) $f(\alpha - \beta) = f(\alpha) - f(\beta)$ *dla dowolnych* $\alpha, \beta \in V$,
(iv) $f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n)$ *dla dowolnych* $a_1, \ldots, a_n \in K$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ *i dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. (i). Na mocy (II) jest $f(\Theta) = f(0 \circ \Theta) = 0 \circ f(\Theta) = \Theta$.
(ii). Na mocy (I) i (i) mamy, że $f(\alpha) + f(-\alpha) = f(\alpha + (-\alpha)) = f(\Theta) = \Theta$, więc $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.
(iii). Na mocy (I) i (ii) jest $f(\alpha - \beta) = f(\alpha + (-\beta)) = f(\alpha) + f(-\beta) = f(\alpha) + (-f(\beta)) = f(\alpha) - f(\beta)$.
(iv). Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza wynika z (II). Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n i niech $a_1, \ldots, a_{n+1} \in K$ oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in V$. Wtedy na mocy (I), (II) i założenia indukcyjnego mamy, że $f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_{n+1} \circ \alpha_{n+1}) = f((a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) + a_{n+1} \circ \alpha_{n+1}) = f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) + f(a_{n+1} \circ \alpha_{n+1}) = a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n) + a_{n+1} \circ f(\alpha_{n+1})$. Zatem teza zachodzi dla liczby $n + 1$. □

Stwierdzenie 15.3. *Niech* $f : V \longrightarrow W$ *będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K *w przestrzeń liniową* W *nad ciałem* K. *Wówczas zbiór* $Ker(f) = \{\alpha \in V : f(\alpha) = \Theta\}$ *zwany* jądrem f *jest podprzestrzenią przestrzeni* V. *Ponadto* f *jest różnowartościowe (tzn.* f *jest* monomorfizmem liniowym*) wtedy i tylko wtedy, gdy* $Ker(f) = \{\Theta\}$.

Dowód. Na mocy stwierdzenia 15.2(i) mamy, że $\Theta \in Ker(f)$. Niech $a \in K$, $\alpha, \beta \in Ker(f)$. Wtedy na mocy (I) $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) = \Theta + \Theta = \Theta$, więc $\alpha + \beta \in Ker(f)$ oraz na mocy (II) $f(a \circ \alpha) = a \circ f(\alpha) = a \circ \Theta = \Theta$, skąd $a \circ \alpha \in Ker(f)$. Zatem $Ker(f)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Załóżmy, że f jest różnowartościowe i niech $\alpha \in Ker(f)$. Wtedy $f(\alpha) = \Theta$. Ale na mocy stwierdzenia 15.2(i) jest $\Theta = f(\Theta)$, więc $f(\alpha) = f(\Theta)$, skąd $\alpha = \Theta$. Zatem $Ker(f) = \{\Theta\}$. Na odwrót, załóżmy, że $Ker(f) = \{\Theta\}$ i weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ takie, że $f(\alpha) = f(\beta)$. Wtedy na mocy stwierdzenia 15.2(iii) jest $\Theta = f(\alpha) - f(\beta) = f(\alpha - \beta)$, czyli $\alpha - \beta \in Ker(f)$. Zatem $\alpha - \beta = \Theta$, skąd $\alpha = \beta$ i f jest monomorfizmem. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Uwaga 15.1. Każda podprzestrzeń W przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest jądrem pewnego przekształcenia liniowego określonego na V. Rzeczywiście, niech $f : V \longrightarrow V/W$ będzie przekształceniem danym wzorem $f(\alpha) = \alpha + W$ dla $\alpha \in V$. Wtedy dla $\alpha, \beta \in V$, $a \in K$ mamy, że $f(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)+W = (\alpha+W)+(\beta+W) = f(\alpha)+f(\beta)$ oraz $f(a \circ \alpha) = a \circ \alpha + W = a \circ (\alpha + W) = a \circ f(\alpha)$. Zatem f jest przekształceniem liniowym. Ponadto dowolna warstwa z przestrzeni V/W jest postaci $\alpha + W = f(\alpha)$ dla pewnego $\alpha \in V$, więc f jest "na". Dla $\alpha \in V$ mamy, że $\alpha \in Ker(f) \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$. Zatem $Ker(f) = W$. Oznacza to, że podprzestrzenie przestrzeni liniowej V są to dokładnie jądra pewnych przekształceń liniowych określonych na V. $\square$

Przykład 15.1. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wtedy z twierdzenia 12.3 istnieje podprzestrzeń U przestrzeni V taka, że $W \oplus U = V$. Stąd każde $\alpha \in V$ można zapisać w postaci $\alpha = \beta + \gamma$ dla pewnych $\beta \in W$ oraz $\gamma \in U$. Jeśli $\beta_1, \beta_2 \in W$ i $\gamma_1, \gamma_2 \in U$ są takie, że $\beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2$, to $\beta_1 - \beta_2 = \gamma_2 - \gamma_1 \in W \cap U = \{\Theta\}$, skąd $\beta_1 = \beta_2$ i $\gamma_1 = \gamma_2$. Oznacza to, że przekształcenie $f : V \to U$ dane wzorem $f(\alpha) = \gamma$ dla $\alpha \in V$ takiego, że $\alpha = \beta+\gamma$ i $\beta \in W$ oraz $\gamma \in U$, jest dobrze określone. Niech $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, $a \in K$. Wtedy istnieją $\beta_1, \beta_2 \in W$, $\gamma_1, \gamma_2 \in U$ takie, że $\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1$ i $\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2$, skąd $\alpha_1 + \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)$ oraz $\beta_1+\beta_2 \in W$ i $\gamma_1+\gamma_2 \in U$. Zatem $f(\alpha_1+\alpha_2) = \gamma_1+\gamma_2 = f(\alpha_1)+f(\alpha_2)$. Ponadto $a \circ \alpha_1 = a \circ \beta_1 + a \circ \gamma_1$ oraz $a \circ \beta_1 \in W$ i $a \circ \gamma_1 \in U$, więc $f(a \circ \alpha_1) = a \circ \gamma_1 = a \circ f(\alpha_1)$. Stąd f jest przekształceniem liniowym. Nazywamy je *rzutem przestrzeni V na podprzestrzeń U wzdłuż podprzestrzeni W*. Ponieważ dla $\gamma \in U$ jest $\gamma = \Theta + \gamma$ i $\Theta \in W$, więc $f(\gamma) = \gamma$. Zatem f jest "na". Dla $\beta \in W$ mamy, że $\beta = \beta+\Theta$ i $\Theta \in U$, więc $f(\beta) = \Theta$, skąd $W \subseteq Ker(f)$. Jeśli zaś $\alpha \in Ker(f)$, to istnieją $\beta \in W$ i $\gamma \in U$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$ i $\Theta = f(\alpha) = \gamma$, skąd $\alpha = \beta \in W$. Zatem ostatecznie $W = Ker(f)$. $\square$

Stwierdzenie 15.4. *Niech $f : V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V nad ciałem K w przestrzeń liniową W nad ciałem K. Wówczas zbiór $Im(f) = f(V) = \{f(\alpha) : \alpha \in V\}$ zwany*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

obrazem f *jest podprzestrzenią przestrzeni* W.

Dowód. Ze stwierdzenia 15.2(i) mamy, że $\Theta = f(\Theta) \in f(V)$. Niech $\alpha, \beta \in f(V)$. Wtedy istnieją $\alpha_1, \beta_1 \in V$ takie, że $\alpha = f(\alpha_1)$ i $\beta = f(\beta_1)$. Zatem $\alpha + \beta = f(\alpha_1) + f(\beta_1) = f(\alpha_1 + \beta_1) \in f(V)$ oraz dla $a \in K$: $a \circ \alpha = a \circ f(\alpha_1) = f(a \circ \alpha_1) \in f(V)$. Zatem $f(V)$ jest podprzestrzenią przestrzeni W. □

Stwierdzenie 15.5. *Niech* $f : V \longrightarrow W$ *będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K *w przestrzeń liniową* W *nad ciałem* K. *Wówczas dla dowolnych wektorów* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$: *jeżeli wektory* $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ *są liniowo niezależne, to wektory* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *też są liniowo niezależne. Jeżeli dodatkowo* f *jest monomorfizmem, to wektory* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ *są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory* $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ *są liniowo niezależne.*

Dowód. Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$. Załóżmy, że wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Wtedy na mocy stwierdzenia 15.2 mamy, że $a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n) = \Theta$, skąd z lnz wektorów $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ jest $a_1 = \ldots = a_n = 0$, czyli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ też są liniowo niezależne.

Niech teraz dodatkowo f będzie monomorfizmem. Załóżmy, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są lnz i weźmy dowolne $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n) = \Theta$. Wtedy ze stwierdzenia 15.2 mamy, że $f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = f(\Theta)$, skąd $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \Theta$. Zatem z lnz wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynika, że $a_1 = \ldots = a_n = 0$, czyli wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. □

Definicja 15.2. Przekształcenie liniowe $f : V \longrightarrow W$ nazywamy *epimorfizmem*, jeżeli $f(V) = W$ (tzn. f jest "na"). Przekształcenie liniowe $f : V \longrightarrow V$ przestrzeni V w siebie nazywamy *endomorfizmem* przestrzeni V.

Uwaga 15.2. Z tych określeń wynika od razu, że izomorfizm liniowy jest to taki monomorfizm, który jest jednocześnie epimorfizmem.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Stwierdzenie 15.6. *Niech $f : V \longrightarrow W$ będzie izomorfizmem przestrzeni liniowych V i W nad tym samym ciałem K. Jeżeli wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni V, to wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ tworzą bazę przestrzeni W.*

Dowód. Ze stwierdzenia 15.5 wynika od razu, że wektory $f(\alpha_1), \ldots,$ $f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$. Zatem istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$, skąd na mocy stwierdzenia 15.2 jest, że $\beta = a_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ f(\alpha_n)$. Zatem wektory $f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)$ generują przestrzeń W i są liniowo niezależne, czyli tworzą bazę przestrzeni W. $\square$

15.2 Twierdzenie o izomorfizmie

Twierdzenie 15.1 (o izomorfizmie). *Niech $f : V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

$$V/Ker(f) \cong Im(f).$$

Dowód. Niech $F : V/Ker(f) \longrightarrow Im(f)$ będzie przekształceniem danym wzorem: $F(\alpha + Ker(f)) = f(\alpha)$ dla $\alpha \in V$. Jeśli $\alpha, \beta \in V$ są takie, że $\alpha + Ker(f) = \beta + Ker(f)$, to $\alpha - \beta \in Ker(f)$, czyli $\Theta = f(\alpha - \beta) = f(\alpha) - f(\beta)$, skąd $f(\alpha) = f(\beta)$. Wynika stąd, że przekształcenie F jest dobrze określone (nie zależy od wyboru reprezentantów warstw). Dalej, dla $\alpha, \beta \in V$ i $a \in K$ mamy, że $F((\alpha + Ker(f)) + (\beta + Ker(f))) = F((\alpha + \beta) + Ker(f)) = f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) = F(\alpha + Ker(f)) + F(\beta + Ker(f))$ oraz $F(a \circ (\alpha + Ker(f))) = F(a \circ \alpha + Ker(f)) = f(a \circ \alpha) = a \circ f(\alpha) = a \circ F(\alpha + Ker(f))$. Zatem F jest przekształceniem liniowym. Weźmy dowolne $\beta \in Im(f)$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha) = F(\alpha + Ker(f))$. Zatem F jest epimorfizmem. W końcu dla $\alpha \in V$ mamy, że $\alpha + Ker(f) \in Ker(F) \Leftrightarrow f(\alpha) = \Theta \Leftrightarrow \alpha \in Ker(f) \Leftrightarrow \alpha + Ker(f) = Ker(f)$. Stąd na mocy stwierdzenia 15.3 F jest monomorfizmem i ostatecznie F jest izomorfizmem liniowym. $\square$

Twierdzenie 15.2. *Niech $f : V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Jeżeli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa, to przestrzeń $Im(f)$ też jest skończenie wymiarowa i zachodzi wzór:*

$$\dim V = \dim Ker(f) + \dim Im(f).$$

Dowód. Z twierdzenia o izomorfizmie $V/Ker(f) \cong Im(f)$. Z twierdzenia 14.4 mamy, że $\dim(V/Ker(f)) = \dim V - \dim Ker(f)$. Zatem na mocy stwierdzenia 15.6 mamy, że $\dim Im(f) = \dim V - \dim Ker(f)$, skąd $\dim Im(f) + \dim Ker(f) = \dim V$. □

Twierdzenie 15.3. *Niech wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $\beta_1, \dots, \beta_n$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni liniowej W nad ciałem K. Wówczas istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f : V \longrightarrow W$ takie, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Ponadto takie f jest dane wzorem:*

$$f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n \tag{15.1}$$

dla $a_1, \dots, a_n \in K$. Przekształcenie f jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ są liniowo niezależne. Ponadto f jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ generują przestrzeń W oraz f jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ tworzą bazę przestrzeni W.

Dowód. Dla przekształcenia f danego wzorem (15.1) mamy, że $f(\alpha_i) = \beta_i$ przy $i = 1, \dots, n$. Weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ i dowolne $a \in K$. Wtedy istnieją $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ oraz $\beta = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$. Zatem $f(\alpha + \beta) = f((a_1 + b_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_n + b_n) \circ \alpha_n) = (a_1 + b_1) \circ \beta_1 + \ldots + (a_n + b_n) \circ \beta_n = (a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n) + (b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_n \circ \beta_n) = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a \circ \alpha) = f((aa_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (aa_n) \circ \alpha_n) = (aa_1) \circ \beta_1 + \ldots + (aa_n) \circ \beta_n = a \circ (a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n) = a \circ f(\alpha)$. Zatem f jest szukanym przekształceniem liniowym. Jeżeli $g : V \longrightarrow W$ jest przekształceniem liniowym takim, że $g(\alpha_i) = \beta_i$ dla $i = 1, \dots, n$, to ze stwierdzenia 15.2 mamy, że $g(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = a_1 \circ g(\alpha_1) + \ldots + a_n \circ g(\alpha_n) = a_1 \circ \beta_1 + \ldots + a_n \circ \beta_n = f(a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n)$ dla dowolnych $a_1, \dots, a_n \in K$. Ponieważ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ jest bazą przestrzeni V, więc stąd $g = f$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Jeżeli f jest różnowartościowe, to na mocy stwierdzenia 15.5 wektory $\beta_1 = f(\alpha_1), \dots, \beta_n = f(\alpha_n)$ są liniowo niezależne. Na odwrót, załóżmy, że wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ są liniowo niezależne. Niech $\alpha \in Ker(f)$. Wtedy istnieją $a_1, \dots, a_n \in K$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n$, skąd $\Theta = f(\alpha) = a_1 \circ \beta_1 + \dots + a_n \circ \beta_n$, czyli $a_1 = \dots = a_n = 0$ i $\alpha = \Theta$. Zatem na mocy stwierdzenia 15.3 f jest monomorfizmem.

Jeżeli f jest epimorfizmem, to dla każdego $\beta \in W$ istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$. Ale $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n$ dla pewnych $a_1, \dots, a_n \in K$, więc ze wzoru (15.1) $\beta = a_1 \circ \beta_1 + \dots + a_n \circ \beta_n$, czyli wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ generują przestrzeń W. Na odwrót, załóżmy, że wektory $\beta_1, \dots, \beta_n$ generują przestrzeń W. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieją $a_1, \dots, a_n \in K$ takie, że $\beta = a_1 \circ \beta_1 + \dots + a_n \circ \beta_n = f(a_1 \circ \alpha_1 + \dots + a_n \circ \alpha_n)$, czyli f jest epimorfizmem.

Ostatnia część twierdzenia wynika z jego pierwszej części. $\square$

15.3 Przykłady i zastosowania przekształceń liniowych

Przykład 15.2. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem K. Wówczas przekształcenie $f : V \longrightarrow W$ dane wzorem $f(\alpha) = \Theta$ dla $\alpha \in V$ jest przekształceniem liniowym, bo dla $\alpha, \beta \in V$, $a \in K$: $f(\alpha + \beta) = \Theta = \Theta + \Theta = f(\alpha) + f(\beta)$ oraz $f(a \circ \alpha) = \Theta = a \circ \Theta = a \circ f(\alpha)$. Przekształcenie to nazywamy *zerowym* lub *trywialnym*. $\square$

Przykład 15.3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $a \in K$ będzie dowolnym ustalonym elementem ciała K. Wtedy przekształcenie $\phi_a : V \longrightarrow V$ dane wzorem $\phi_a(\alpha) = a \circ \alpha$ dla $\alpha \in V$, jest liniowe, gdyż dla $\alpha, \beta \in V$, $b \in K$ mamy, że $\phi_a(\alpha + \beta) = a \circ (\alpha + \beta) = a \circ \alpha + a \circ \beta = \phi_a(\alpha) + \phi_a(\beta)$ oraz $\phi_a(b \circ \alpha) = a \circ (b \circ \alpha) = (ab) \circ \alpha = (ba) \circ \alpha = b \circ (a \circ \alpha) = b \circ \phi_a(\alpha)$. To przekształcenie nazywamy *homotetią* o współczynniku a.$\square$

Przykład 15.4. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas przekształcenie $f : W \longrightarrow V$ dane wzorem $f(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in W$ jest oczywiście liniowe. Jest ono ponadto monomorfizmem podprzestrzeni W w przestrzeń V. W szczególności przekształcenie identycznościowe $id_V : V \longrightarrow V$ dane wzorem $id_V(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in V$, jest przekształceniem liniowym. □

Przykład 15.5. Opiszemy wszystkie przekształcenia liniowe $f : K^n \rightarrow K^m$ dla ustalonego ciała K i dla dowolnych ustalonych liczb naturalnych m, n. Ponieważ wektory $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tworzą bazę przestrzeni K^n oraz dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in K$ jest $[x_1, \ldots, x_n] = x_1 \circ \varepsilon_1 + \ldots + x_n \circ \varepsilon_n$, więc na mocy twierdzenia 15.3 wszystkimi przekształceniami liniowymi $f : K^n \rightarrow K^m$ są jedynie przekształcenia f postaci:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = x_1 \circ \beta_1 + \ldots + x_n \circ \beta_n,$$

dla dowolnych ustalonych $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K^m$. Ale dla $j = 1, \ldots, n$ istnieją $a_{ij} \in K$ $(i = 1, \ldots, m)$ takie, że $\beta_j = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}]$, więc stąd otrzymujemy tzw. *wzór analityczny* na dowolne przekształcenie liniowe $f : K^n \longrightarrow K^m$:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = [a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n]. \tag{15.2}$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli $a'_{ij} \in K$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ są takie, że przekształcenie f dane wzorem (15.2) spełnia wzór $f([x_1, \ldots, x_n]) = [a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1n}x_n, \ldots, a'_{m1}x_1 + \ldots + a'_{mn}x_n]$, to dla $\beta'_j = [a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}]$, $j = 1, \ldots, n$, będziemy mieli, że $\beta'_j = f(\varepsilon_j) = \beta_j$, czyli $a'_{ij} = a_{ij}$ dla wszystkich i, j. Wynika stąd, że przekształcenie liniowe $f : K^n \longrightarrow K^m$ jest jednoznacznie wyznaczone przez $m \times n$ macierz $A = [a_{ij}]$. Ponadto z definicji mnożenia macierzy mamy, że dla przekształcenia f danego wzorem (15.2) zachodzi wzór:

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{15.3}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Przy tych oznaczeniach mamy też, że $f(K^n) = lin(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ oraz wektory $\beta_1, \ldots, \beta_n$ możemy traktować jako kolumny macierzy A, więc stąd dla przekształcenia f mamy wzór:

$$\dim Im(f) = r(A). \tag{15.4}$$

Zatem z twierdzenia 15.2 mamy, że $n = \dim K^n = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$, więc na mocy wzoru (15.4):

$$\dim Ker(f) = n - r(A). \tag{15.5}$$

Zauważmy też, że $[a_1, \ldots, a_n] \in Ker(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[a_1, \ldots, a_n]$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots + & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots + & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots + & a_{mn}x_n = 0 \end{cases} . \tag{15.6}$$

Wynika stąd następujące

Twierdzenie 15.4. *Zbiór rozwiązań układu jednorodnego (15.6) o macierzy współczynników A jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej K^n wymiaru $n - r(A)$.* $\square$

Podamy teraz drugi sposób wyznaczania jednorodnego układu równań liniowych o zadanej podprzestrzeni rozwiązań. Niech K będzie ustalonym ciałem i niech V będzie dowolną podprzestrzenią przestrzeni liniowej K^n. Wyznaczamy najpierw bazę i wymiar podprzestrzeni V. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ tworzą bazę podprzestrzeni V. Wtedy $\dim V = s$. W praktyce wyznaczamy bazę V w takiej postaci, aby można było ją uzupełnić w prosty sposób do bazy przestrzeni K^n pewnymi wektorami bazy kanonicznej przestrzeni K^n. Niech wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_{n-s}$ tworzą bazę przestrzeni K^n. Na mocy twierdzenia 15.3 istnieje dokładnie jeden epimorfizm $f : K^n \longrightarrow K^{n-s}$ taki, że $f(\alpha_i) = \Theta$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, s$ oraz $f(\beta_j) = \varepsilon_j$ dla $j = 1, \ldots, n - s$. Z określenia f mamy, że $V \subseteq Ker(f)$. Ponadto

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

$\dim Im(f) = \dim K^{n-s} = n - s$, więc z twierdzenia 15.2 mamy, że $n = \dim K^n = \dim Ker(f) + \dim Im(f)$, skąd $\dim Ker(f) = s$. Ale $\dim V = s$ oraz $V \subseteq Ker(f)$, więc stąd $V = Ker(f)$. Pozostaje zatem wyznaczyć wzór analityczny na przekształcenie f i w ten sposób uzyskamy natychmiast żądany układ jednorodny.

Przykład 15.6. Znajdziemy układ jednorodny równań liniowych nad ciałem $\mathbb{R}$, którego przestrzenią rozwiązań jest
$V = lin([1,-1,1],[1,1,-1])$. Najpierw znajdujemy bazę przestrzeni V: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{w_2-w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}\cdot w_2}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Zatem bazą przestrzeni V jest $\{[1,-1,1],[0,1,-1]\}$.
Następnie uzupełniamy znalezioną bazę przestrzeni V do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przy pomocy wektora $[0,0,1]$. Istnieje przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f([1,-1,1]) = 0$, $f([0,1,-1]) = 0$, $f([0,0,1]) = 1$. Wtedy $f([0,1,0]) = f([0,1,-1]) + f([0,0,1]) = 0+1 = 1$ oraz $f([1,0,0]) = f([1,-1,1]) - f([0,1,-1]) = 0-0 = 0$. Zatem dla dowolnych $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mamy, że $f([x_1,x_2,x_3]) = x_1 \cdot f([1,0,0]) + x_2 \cdot f([0,1,0]) + x_3 \cdot f([0,0,1]) = x_2 + x_3$. Ale $\dim(Im\ f) = 1$, więc $\dim(Ker\ f) = 3-1 = 2$. Ponadto $V \subseteq Ker\ f$ oraz $\dim(V) = 2$, więc $V = Ker\ f$. Stąd szukanym układem równań jest:

$$x_2 + x_3 = 0. \ \square$$

Przykład 15.7. Znajdziemy układ jednorodny równań liniowych nad ciałem $\mathbb{R}$, którego przestrzeń rozwiązań jest generowana przez wektory: $[1,-1,1,-1,1]$, $[1,1,0,0,3]$, $[3,1,1,-1,7]$, $[0,2,-1,1,2]$.

Znajdujemy najpierw bazę podprzestrzeni V generowanej przez wektory: $[1,-1,1,-1,1]$, $[1,1,0,0,3]$, $[3,1,1,-1,7]$, $[0,2,-1,1,2]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{w_2-w_1,\ w_3-3w_1}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{w_2+w_4,\ w_3+w_4}{\equiv} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$ Zatem bazą

V jest $\{[1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2]\}$ oraz $\dim V = 2$. Ponieważ nasze wektory mają 5 współrzędnych, więc szukany układ równań będzie się składał z $5-2=3$ równań.
Ponadto bazą przestrzeni $\mathbb{R}^5$ jest $\{[1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2],$ $[0,0,1,0,0],[0,0,0,1,0],[0,0,0,0,1]\}$, więc istnieje przekształcenie liniowe $f:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że

$$f([1,1,0,0,3]) = [0,0,0], \tag{15.7}$$

$$f([0,2,-1,1,2]) = [0,0,0], \tag{15.8}$$

$$f([0,0,1,0,0]) = [1,0,0], \tag{15.9}$$

$$f([0,0,0,1,0]) = [0,1,0], \tag{15.10}$$

$$f([0,0,0,0,1]) = [0,0,1]. \tag{15.11}$$

Ponieważ wektory $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz należą do $f(\mathbb{R}^5)$, więc $f(\mathbb{R}^5)=\mathbb{R}^3$, czyli $\dim f(\mathbb{R}^5)=3$. Ale $5 = \dim\mathbb{R}^5 = \dim Ker(f) + \dim f(\mathbb{R}^5)$, więc $\dim Ker(f) = 5-3=2$. Ponadto z (15.7) i (15.8) mamy, że $V = lin([1,1,0,0,3],[0,2,-1,1,2]) \subseteq Ker(f)$ oraz $\dim V = 2$, więc $V = Ker(f)$. Pozostaje zatem wyznaczyć wzór analityczny na takie przekształcenie f. Niech $\varepsilon_1 = [1,0,0,0,0]$, $\varepsilon_2 = [0,1,0,0,0]$, $\varepsilon_3 = [0,0,1,0,0]$, $\varepsilon_4 = [0,0,0,1,0]$, $\varepsilon_5 = [0,0,0,0,1]$. Wtedy dla dowolnych $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \in \mathbb{R}$:

$$[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = x_1\circ\varepsilon_1 + x_2\circ\varepsilon_2 + x_3\circ\varepsilon_3 + x_4\circ\varepsilon_4 + x_5\circ\varepsilon_5.$$

Zatem z liniowości przekształcenia f mamy, że $f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1\circ f(\varepsilon_1) + x_2\circ f(\varepsilon_2) + x_3\circ f(\varepsilon_3) + x_4\circ f(\varepsilon_4) + x_5\circ f(\varepsilon_5)$.

Ze wzoru (15.8) mamy, że $2\circ f(\varepsilon_2) - f(\varepsilon_3) + f(\varepsilon_4) + 2\circ f(\varepsilon_5) = [0,0,0]$, więc $2\circ f(\varepsilon_2) - [1,0,0] + [0,1,0] + 2\circ[0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\varepsilon_2) = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1]$.

Ze wzoru (15.7) mamy, że $f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) + 3\circ f(\varepsilon_5) = [0,0,0]$, czyli $f(\varepsilon_1) + [\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1] + 3\circ[0,0,1] = [0,0,0]$, skąd $f(\varepsilon_1) = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-2]$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku – kontynuacja,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki
na podstawie umowy BIBL/SP/0040/2023/01

Stąd
$f([x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]) = x_1\circ[-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-2]+x_2\circ[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1]+x_3\circ[1,0,0]+x_4\circ[0,1,0]+x_5\circ[0,0,1] = [-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+x_3, \frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+x_4, -2x_1-x_2+x_5]$.
Zatem $V = Ker(f)$ jest zbiorem rozwiązań układu równań:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -\frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & & & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 0 \end{array}\right. . \square$$

Literatura

[1] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1976.
[2] A. Białynicki-Birula, *Algebra*, PWN, Warszawa 1971.
[3] L. Jeśmianowicz, J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1976.
[4] A. I. Kostrykin, *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa 1984.
[5] A. I. Kostrykin, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1995.
[6] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1972.