

KINETYCZNY MODEL ABSORPCJI I ELIMINACJI INNOWACJI. ANALIZA DYNAMICZNA.

Ewa ROSZKOWSKA *

1. Wstęp

Celem mojej pracy jest dokonanie pełnej analizy ilościowo-jakościowej kinetycznego modelu absorpcji i eliminacji innowacji wprowadzonego przez S.M. Kota w pracy [4, s. 79-89]. Ponieważ rozpatrywany model matematyczny jest opisany przez liniowy układ równań różniczkowych, można go rozwiązać pod względem *ilościowym*, tzn. podać ścieżki czasowe rozwiązań¹. Przy czym znana analiza ilościowa zostanie wzbogacona o analizę jakościową rozwiązań. Często w całym szeregu zagadnień dokładność ilościowych obliczeń nie jest konieczna, wystarcza tylko jakościowy obraz zjawisk. Ważne jest przy tym przewidywanie charakteru przebiegu zjawiska w przypadku zmiany warunków, w jakich ono się odbywa. Odnosi się to zwłaszcza do zagadnień z dziedziny ekonomii, gdzie ani wartości parametrów, ani wartości początkowe z reguły nie są dokładnie znane, a od analizy matematycznej problemu żąda się przede wszystkim opisu jakościowego istotnych charakterystyk procesu. Ważnym wydaje się pytanie o istnienie stanów stacjonarnych (równowagi), o trwałość tych stanów i zmiany stabilności układu w wyniku zmiany parametrów. Dlatego też celem jakościowego badania układów dynamicznych jest wyznaczenie, dla wszystkich warunków początkowych, wszystkich możliwych typów rozwiązań bez ich jawnego podania. W prezentowanym modelu zostanie zbadana stabilność, asymptotyczna stabilność rozwiązań oraz sprawdzona strukturalna stabilność tego układu dynamicznego.

2. Metody analizy rozwiązań jednorodnego układu liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

Ponieważ badany w pracy model matematyczny jest opisany przez pewien układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu, zacznę od przypomnienia niezbędnych pojęć i terminów związanych tylko z układami równań tego typu².

2.1. Podstawowe pojęcia i określenia

Jednorodnym układem 2 liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach nazywa się układ postaci:

* dr Ewa Roszkowska, Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Ekonomiczny

¹ Warto przypomnieć, że w przypadku nieliniowych równań różniczkowych, w odróżnieniu od układów liniowych, dokładne analityczne rozwiązania można uzyskać tylko w pewnych szczególnych przypadkach.

² Prezentowane w pracy definicje i twierdzenia można znaleźć np. w pracach [1, 2, 3, 5, 6].

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}\quad (1.1)$$

w którym x, y są nieznanymi funkcjami zmiennej niezależnej t , a funkcje $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ są funkcjami danymi, określonymi w pewnym otwartym zbiorze $U \subset \mathbb{R}^2$ i przyjmującymi wartości w zbiorze \mathbb{R} , $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Rozwiązaniem układu (1.1) określonym w otwartym przedziale $I \subset \mathbb{R}$ nazywa się każdy 2-elementowy ciąg (φ_1, φ_2) różniczkowalnych funkcji

$$\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R} \quad i=1,2$$

takich, że dla każdego $t \in I$ zachodzi

$$\{(\varphi_1(t), \varphi_2(t)); t \in I\} \subset U$$

oraz dla każdego $t \in I$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_1(t)}{dt} &= a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t) \\ \frac{d\varphi_2(t)}{dt} &= c\varphi_1(t) + d\varphi_2(t)\end{aligned}\quad (1.2)$$

Najczęściej żąda się, aby rozwiązanie (φ_1, φ_2) spełniało dodatkowe warunki (warunki początkowe) w postaci

$$\varphi_1(t) = x_0, \quad \varphi_2(t) = y_0 \quad (1.3)$$

Zadanie polegające na wyznaczeniu rozwiązania równania (1.1) spełniającego warunki początkowe (1.3) nazywane jest problemem Cauchy'ego.

TWIERDZENIE 1. *Układ równań różniczkowych postaci (1.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ spełniające warunki początkowe $\varphi_1(t_0) = x_0, \varphi_2(t_0) = y_0$.*

Użytecznym sposobem wizualizacji rozwiązań układu (1.1) jest *przestrzeń fazowa* układu. Jest to dwuwymiarowa przestrzeń, której każdy z punktów reprezentuje stan układu w ustalonej chwili czasu. Rozwiązania układu (1.1) tworzą w przestrzeni fazowej pewne krzywe, które nazywamy *krzywymi fazowymi układu* lub *trajektoriami fazowymi układu*. W przypadku dwuwymiarowym możemy sobie wyobrazić punkt przestrzeni \mathbb{R}^2 jako cząsteczkę poruszającą się z wpływem czasu („płynącą”) po torze wyznaczonym przez przechodzącą przez ten punkt krzywą fazową. Ten ruch nazywa się *potokiem fazowym*. Wyznaczenie wszystkich trajektorii układu dla wszystkich dopuszczalnych warunków początkowych pozwala przedstawić dynamikę układu na *portrecie fazowym* układu, przedstawiającym zbiór krzywych fazowych.

Rozwiązania układu są wyznaczone przez warunki początkowe. Wśród rozwiązań układu istnieją tzw. *rozwiązania osobliwe* odpowiadające zerowaniu się prawych stron układu. W przestrzeni fazowej rozwiązania te są reprezentowane przez tzw. punkty stałe (stacjonarne). W rzeczywistości punkty te odpowiadają położeniom równowagi układu. Krzywe fazowe w otoczeniu punktu stacjonarnego mogą zachowywać się w różny sposób. Dla układów dynamicznych na płaszczyźnie możliwa jest pełna klasyfikacja zachowań układu w otoczeniu jego punktów stacjonarnych.

2.2. Analiza stabilności rozwiązań układu równań różniczkowych

Stabilność układu (różnie definiowana) jest jednym z najważniejszych pojęć teorii układów dynamicznych. Ma ona również duże znaczenie w ekonomii, wszędzie tam, gdzie modele są budowane w oparciu o równania różniczkowe.

Różne definicje stabilności otrzymamy w zależności od założenia, na jaką odległość dozwolone jest odejście od punktu stałego. I tak można wyróżnić następujące koncepcje stabilności:

- *Stabilność w sensie Laplace'a lub Lagrange'a* (wartości zmiennych, mimo iż stałe ulegają zmianom, przez cały czas mieszczą się w pewnym przedziale)
- *Stabilność w sensie Lapunowa* (wartości zmiennych zawsze będą znajdować się bliżej położenia równowagi, niż w pewnej chwili początkowej)
- *Stabilność asymptotyczna w sensie Lapunowa* (z upływem czasu wartości zmiennych coraz bardziej zbliżają się do punktu stałego i osiągają go po nieskończonym czasie)
- *Stabilność strukturalna układu* (odporność struktury przestrzeni fazowej układu na niewielkie zmiany prawych stron układu równań).

Z ekonomicznego punktu widzenia, wydaje się, że większe zastosowanie powinny posiadać dwie pierwsze koncepcje stabilności. W praktyce jednak, ze względu na istniejący odpowiedni aparat matematyczny, najczęściej używana jest koncepcja asymptotycznej stabilności.

W niniejszej pracy interesować mnie będzie stabilność i asymptotyczna stabilność w sensie Lapunowa rozwiązań układu równań różniczkowych opisującego kinetyczny model absorpcji i eliminacji innowacji oraz strukturalna stabilność tego układu.

Zacznę od podania określenia stabilności rozwiązania układu typu (1.1) w sensie Lapunowa.

DEFINICJA 1. Rozwiązanie $(\bar{\varphi}_1(t), \bar{\varphi}_2(t))$ układu równań (1.1) z warunkami początkowymi $\bar{\varphi}_1(t_0), \bar{\varphi}_2(t_0)$ jest *stabilne w sensie Lapunowa*, jeśli dla dowolnego innego rozwiązania $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ z warunkami początkowymi $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0)$ spełnione są warunki

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{\delta > 0} \left| \varphi_1(t_0) - \bar{\varphi}_1(t_0) \right| \leq \delta \Rightarrow \left| \varphi_1(t) - \bar{\varphi}_1(t) \right| \leq \varepsilon$$

oraz

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \left| \varphi_2(t_0) - \bar{\varphi}_2(t_0) \right| \leq \delta \Rightarrow \left| \varphi_2(t) - \bar{\varphi}_2(t) \right| \leq \varepsilon$$

Stabilność w sensie Lapunowa może być rozumiana następująco:

Należy wziąć pewne rozwiązanie układu (1.1) i porównać z wszystkimi innymi rozwiązaniami mającymi wartości początkowe bliskie wartości początkowych rozpatrywanego rozwiązania. Jeśli przy tym okaże się, że rozpatrywane rozwiązanie jest takie, że wszystkie inne rozwiązania mające wartości początkowe dostatecznie bliskie wartości początkowych rozpatrywanego rozwiązania będą dowolnie bliskie tego rozwiązania dla wszystkich $t \geq t_0$, to rozwiązanie jest *rozwiązaniem stabilnym w sensie Lapunowa*.

DEFINICJA 2. Rozwiązanie $(\bar{\varphi}_1(t), \bar{\varphi}_2(t))$ układu równań (1.1) jest *asymptotycznie stabilne*, jeśli jest stabilne w sensie Lapunowa oraz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \varphi_1(t) - \bar{\varphi}_1(t) \right| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \varphi_2(t) - \bar{\varphi}_2(t) \right| = 0.$$

Badanie stabilności rozwiązania niezerowego układu (1.1) można zastąpić badaniem stabilności tzw. punktu stałego (stacjonarnego) rozwiązania układu równań i w dalszym ciągu będą się zatem zajmować stabilnością tylko rozwiązań tego typu.

Przypomnę, że punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \in U \subset \mathbb{R}^2$, dla którego $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ -oznacza wektor zerowy przestrzeni \mathbb{R}^2), nazywa się punktem stałym lub punktem stacjonarnym układu równań (1.1), a rozwiązanie $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \equiv \text{const}$, czyli rozwiązanie, które nie zmienia się w czasie – rozwiązaniem stacjonarnym tego równania.

Analiza rozwiązań układu równań (1.1) doprowadzi nas do pełnej klasyfikacji punktów równowagi tego układu.

Punkt stały układu równań (1.1) tzn. punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ jest punktem równowagi tego układu. Ruch rozpoczynający się w tym punkcie sprowadza się do stanu spoczynku

$$x \equiv 0, y \equiv 0$$

W zależności od układu linii prądu wokół danego punktu równowagi, położenie równowagi może należeć do jednej z czterech kategorii³:

- węzła
- punktu siodłowego
- ogniska
- punktu wirowego.

Węzeł jest to takie położenie równowagi, w którym wszystkie linie prądu z nim związane albo zbliżają się bez cykli do tego punktu (*węzeł stabilny*), albo bez cykli oddalają się od tego punktu (*węzeł niestabilny*). Obrazem graficznym na wykresie zmienna-czas dla węzła stabilnego (niestabilnego) będą krzywe asymptotycznie zbliżające się (oddalające się) do punktu równowagi $(x=x_0, y=y_0)$.

³ Graficzną prezentację wymienionych punktów równowagi można znaleźć np. w pracach [2, 6].

Punkt siodłowy jest to położenie równowagi o podwójnym charakterze – jest stabilny w pewnych kierunkach, ale niestabilny w innych. Cztery trajektorie zwane *separatrydami*, są wyróżnione w otoczeniu tego punktu, dwie z nich zmierzają do punktu stałego i osiągają go w czasie $t = \infty$, a pozostałe dwie oddalają się od punktu stałego. Pozostałe trajektorie startują asymptotycznie z separatrysy wchodzącej i kończą się na separatrysie wychodzącej lub odwrotnie.

Ognisko charakteryzuje się spiralnymi trajektoriami, które albo dążą cyklicznie w jego stronę (*stabilne ognisko*), albo krążąc oddalają się od niego (*ognisko niestabilne*). Czasowe zależności zmiennych charakteryzują się zbieżnymi (ich amplituda maleje) lub rozbieżnymi (ich amplituda rośnie) oscylacjami wokół położenia równowagi.

Wir (czyli *środek, centrum*) jest to punkt równowagi o związających się liniach prądu, ale tym razem linie te tworzą rodzinę pętli (współśrodkowych okręgów lub owali) okrążających położenie równowagi i będących w niustającym ruchu. Obie zmienne jako funkcje czasu charakteryzują się oscylacjami wokół położenia równowagi. Są to funkcje okresowe o stałym okresie i amplitudzie zależnej od wartości początkowych.

Zajmę się zagadnieniem stabilności rozwiązania zerowego $x \equiv 0, y \equiv 0$ układu (1.1) przy założeniu, że $\det A = ad - cb \neq 0^4$. Rozwiązanie tego zagadnienia jest ściśle określone przez wartości własne macierzy **A**.

Wartości własne macierzy **A** wyznacza się rozwiązując równanie charakterystyczne

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

czyli równanie postaci

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0, \text{ gdzie} \tag{1.5}$$

- $a + d = \text{tr} A$ – ślad macierzy
- $ad - bc = \det A$ – wyznacznik macierzy **A**,
- $\Delta = (\text{tr} A)^2 - 4 \det A$ – wyróżnik równania charakterystycznego.

Pierwiastki równania charakterystycznego (wartości własne macierzy **A**) mają postać:

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr} A + \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr} A - \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2} \tag{1.6}$$

Określony typ zachowania zależy od śladu i wyznacznika macierzy **A**, oraz od tego, czy wartości własne tej macierzy są rzeczywiste, czy zespolone. Względne wielkości $(\text{tr} A)^2$ i $4 \det A$ decydują o tym, czy dwa pierwiastki będą rzeczywiste, czy zespolone, tzn. czy ścieżki czasowe dla $x(t)$ i $y(t)$ będą jednostajne, czy będą wykazywać wahania. Aby sprawdzić natomiast dynamiczną stabilność równowagi, należy stwierdzić, jakie są znaki obu pierwiastków. Najbardziej przydatne są w tym celu następujące dwa związki $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr} A$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$.

⁴ W przypadku gdy $\det A = ad - cb = 0$, co najmniej jedna z wartości własnych macierzy **A** jest równa zero. Wtedy zachowanie układu równań jest jakościowo równoważne zachowaniu jego głównej części liniowej.

Przypadek 1. $\Delta > 0$, czyli $(\text{tr}A)^2 > 4\det A$

W tym przypadku równanie charakterystyczne posiada dwa różne λ_1, λ_2 pierwiastki rzeczywiste i wahania nie są możliwe. Położenie równowagi może być węzłem, albo punktem siodłowym. Uwzględnienie znaków pierwiastków równania daje trzy możliwości:

- a) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$
- b) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$
- c) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

Sytuacja a) zachodzi, gdy $\det A > 0, \text{tr}A < 0$ i położenie równowagi jest asymptotycznie stabilnym węzłem.

Sytuacja b) zachodzi, gdy $\det A > 0, \text{tr}A > 0$ i położenie równowagi jest niestabilnym węzłem.

Sytuacja c) ma miejsce, gdy $\det A < 0, \text{tr}A$ – dowolny. Występuje wtedy niestabilny punkt siodłowy.

Przypadek 2. $\Delta = 0$, czyli $(\text{tr}A)^2 = 4\det A$

W tym przypadku równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek podwójny, a więc możliwe są dwie kombinacje znaków:

- d) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$
- e) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Sytuacja d) ma miejsce, gdy $\det A > 0, \text{tr}A < 0$, – a sytuacja e) gdy $\det A > 0, \text{tr}A > 0$. Możliwości te są powtórzeniem sytuacji a), b). Wskazują zatem na występowanie odpowiednio stabilnego węzła i niestabilnego węzła.

Przypadek 3. $\Delta < 0$, czyli $(\text{tr}A)^2 < 4\det A$

W tym przypadku równanie charakterystyczne ma dwa różne λ_1, λ_2 pierwiastki zespolone, występują wahania cykliczne, co prowadzi do ogniska albo wiru. Niech $\lambda_1 = h + vi, \lambda_2 = h - vi$, gdzie $i^2 = -1$. Wtedy $\text{tr}A$ ma taki sam znak jak h , $\det A$ jest zawsze dodatni. To daje trzy możliwości:

- f) $h < 0$
- g) $h > 0$
- h) $h = 0$

Sytuacja f) ma miejsce, gdy $\det A > 0, \text{tr}A < 0$ i punkt równowagi jest stabilnym ogniskiem. W sytuacji g) $\det A > 0, \text{tr}A > 0$ oraz punkt równowagi jest niestabilnym ogniskiem. Sytuacja h) zachodzi, gdy $\det A > 0, \text{tr}A = 0$. Punkt równowagi jest wtedy stabilnym wirrem.

Wyniki dyskusji zawarte są w tabeli 1.

Bezpośrednią konsekwencją wyników uzyskanych w tabeli 1 jest następujące, bardzo użyteczne przy badaniu stabilności rozwiązań układu równań, twierdzenie.

TABELA 1
 Analiza stabilności punktu równowagi liniowego układu równań różniczkowych dwóch zmiennych, przy założeniu $\det A \neq 0$.

Przypadek	Pierwiastki równania charakterystycznego	Znak $\det A$	Znak $\text{tr} A$	Typ położenia równowagi
1. $\Delta > 0$ $(\text{tr} A)^2 > 4 \det A$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	+	+	Węzeł stabilny asymptotycznie
	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	+	+,0,-	Niestabilny węzeł
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	-	-	Niestabilny punkt siodłowy
2. $\Delta = 0$ $(\text{tr} A)^2 = 4 \det A$	$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	+	-	Węzeł stabilny asymptotycznie
	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	+	+	Niestabilny węzeł
3. $\Delta < 0$ $(\text{tr} A)^2 < 4 \det A$	$\lambda_1 = h + vi, \lambda_2 = h - vi$ $v \neq 0, i^2 = -1, h < 0$	+	-	Ognisko stabilne asymptotycznie
	$\lambda_1 = h + vi, \lambda_2 = h - vi$ $v \neq 0, i^2 = -1, h > 0$	+	+	Niestabilne ognisko
	$\lambda_1 = h + vi, \lambda_2 = h - vi$ $v \neq 0, i^2 = -1, h = 0$	+	0	Stabilny wir (ale nie asymptotycznie)

Źródło: Opracowanie własne

TWIERDZENIE 2. Niech dany będzie układ równań różniczkowych postaci (1.1), gdzie

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Wówczas:}$$

- i) punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem stabilnym układu równań (1.1) wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy A mają niedodatnie części rzeczywiste;
- ii) punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \mathbf{0}$ jest rozwiązaniem asymptotycznie stabilnym układu równań (1.1) wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy A mają ujemne części rzeczywiste.

Obok stabilności układu w sensie Lapunowa możemy badać tzw. *strukturalną stabilność* układu równań różniczkowych typu (1.1). Stabilność w sensie Lapunowa odnosi się do pojedynczych punktów przestrzeni fazowej układu. Jest to swego rodzaju „odporność” trajektorii na niewielką zmianę punktu początkowego, natomiast stabilność strukturalną określa odporność struktury przestrzeni fazowej układu na niewielkie zmiany (zaburzenia) prawych stron układu równań.

Układ równań (1.1) nazywa się strukturalnie stabilnym, jeśli dla każdej dostatecznie małej zmiany pola wektorowego (tzn. prawych stron układu równań (1.1)), otrzymany układ jest równoważny wyjściowemu. Równoważność układów oznacza, że istnieje homeomorfizm f (f

jest ciągły i istnieje f' , który też jest ciągły), który przeprowadza z zachowaniem orientacji trajektorie jednego układu na trajektorie drugiego układu. Warto podkreślić, że pole wektorowe układu (1.1) nie może być strukturalnie stabilne, gdy macierz A ma zerową wartość własną lub wartość własną ma tylko część urojoną.

Badając strukturalną stabilność układu (1.1) można w szczególności postawić sobie pytanie: czy obraz jakościowy nie zmienia się, jeżeli do prawych stron układu dołączymy wyrazy wyższych stopni względem x i y ? Jest jasne, że należy spodziewać się w przypadku ogólnym, iż obraz ten ulegnie zmianie. W związku z tym nasuwa się drugie pytanie. W jakich przypadkach i jakie wyrazy wyższych stopni, lub ogólniej, jakie funkcje zmiennych x i y , które zerują się wraz z x i y , mogą dołączyć, aby obraz jakościowy nie uległ zmianie?

Okazuje się, że dla układu postaci:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by + \psi(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + \phi(x, y)\end{aligned}\quad (1.7)$$

gdzie ψ, ϕ mają w pewnym otoczeniu punktu $x=0, y=0$ ciągłe pochodne cząstkowe, przy czym $\psi(0,0) = \phi(0,0) = 0$ i

$$\lim_{|x|+|y|\rightarrow 0} \frac{|\psi'_x| + |\psi'_y| + |\phi'_x| + |\phi'_y|}{(|x| + |y|)^\alpha} = 0, \quad (\alpha > 0), \quad (1.8)$$

obraz jakościowy zachowania się krzywych całkowych w otoczeniu punktu równowagi jest w pełni określony przez pierwiastki równania charakterystycznego (1.5), gdy mają one części rzeczywiste różne od zera: jeżeli przy powyższych założeniach mamy dla układu skróconego, tzn. dla układu postaci (1.1) węzeł, siodło lub ognisko, to to samo mieć będziemy dla układu pełnego postaci (1.7). Podane wyżej założenia dotyczące ψ i ϕ są w szczególności spełnione, gdy ψ i ϕ mają rozwinięcia w szeregi względem potęg x i y , nie zawierające wyrazów wolnych i wyrazów liniowych. Gdy jednak pierwiastki równania charakterystycznego (1.5) są czysto urojone, to może zająć zmiana typu punktu stałego w układzie równań postaci (1.7).

2.1. Diagramy fazowe dla układu równań różniczkowych dwóch zmiennych

Można dokonać również tzw. graficznej analizy jakościowej rozwiązań układu równań. Należy przy tym pamiętać, że diagram fazowy dla dwóch zmiennych odpowiada jedynie na pytania jakościowe dotyczące położenia i dynamicznej stabilności położenia (lub położen) równowagi w przypadku, gdy układ równań jest układem autonomicznym.

Dla następującego autonomicznego układu równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\quad (1.9)$$

dwie krzywe podziału oznaczone odpowiednio $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=0$ – reprezentują wykresy dwóch równań:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Zbiór punktów na płaszczyźnie fazowej, dla których $\frac{dx}{dt}=0$ nazywa się *izokliną stycznych pionowych*. Jest to linia, wzdłuż której nie zmieniają się wartości zmiennej x . Podobnie definiuje *izoklinę stycznych poziomych* jako krzywą, wzdłuż której nie zmienia się wartość zmiennej y , tzn.: $\frac{dy}{dt}=0$.

Dwie linie podziału przecinające się w punkcie E, dzielą płaszczyznę na cztery rozłączne regiony oznaczone liczbami od I do IV. Punkt E, w którym x i y są stacjonarne, reprezentuje położenie równowagi dla naszego układu. We wszystkich pozostałych punktach x lub y albo oba zmieniają się w czasie, a kierunek zmian jest określony przez znaki pochodnych względem czasu funkcji $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ w tym punkcie. Na podstawie znaków plus i minus można teraz wykreślić strzałki kierunkowe ukazujące ruch x i y . W zależności od układu linii prądu wokół danego punktu równowagi, położenie równowagi może należeć do jednej z czterech wcześniej opisanych kategorii, tzn. węzła, punktu siodłowego, ogniska, punktu wirowego.

3. Kinetyczny model absorpcji i eliminacji innowacji

Istnieje bardzo szeroka literatura dotycząca zagadnień innowacji oraz ich wpływu na postęp techniczny, technologiczny, marketing. Zagadnienia te wyczerpująco przedstawiono m.in. w pracach: S.M. Kot i in. [4], J. Pocięcha [7]. Przytoczę tutaj podstawowe definicje z tego zakresu. Przyjmuję określenie innowacji jako „relatywnie nowe produkcyjne zastosowanie informacji naukowych lub technicznych” [4, s. 27]. Innowacje mogą polegać na zastosowaniu wynalazku technicznego, jak i pewnych informacji naukowych. Dyfuzję innowacji określam natomiast jako „proces kolejnych zastosowań produkcyjnych tego samego zbioru informacji technicznych lub naukowych” [4, s. 2]. Pełny cykl funkcjonowania danej innowacji obejmuje okres od wdrożenia do zastąpienia jej przez kolejną innowację. Zatem proces dyfuzji innowacji składa się z co najmniej dwóch faz: absorpcji innowacji przez dany system gospodarczy oraz eliminacji innowacji z systemu, czyli zastąpienia jej przez inną innowację. Większość budowanych modeli matematycznych uwzględnia tylko fazę absorpcji innowacji (tzw. modele jednofazowe). Można to częściowo wytłumaczyć tym, że empiryczne badania procesów innowacyjnych ograniczały się do innowacji „przełomowych”, które funkcjonują do dziś, co oznacza, że faza eliminacji jeszcze nie nastąpiła. Powyższemu ograniczeniu analizy sprzyjał też sposób gromadzenia danych statystycznych niezbędnych do zbadania obu faz.

Dwufazowy model dyfuzji innowacji prezentowany tutaj został zaproponowany przez S.M. Kota i in. w pracy [4, s. 79-87]. Zakładam, że proces dyfuzji innowacji składa się z dwóch faz: absorpcji innowacji przez dany system gospodarczy oraz eliminacji innowacji z systemu, czyli zastąpienia jej przez innowację następną. Przyjmuję, że prędkość absorpcji

innowacji i prędkość eliminacji innowacji przez dany układ gospodarczy opisana jest przez układ równań różniczkowych liniowych.

Zakładam, że w chwili $t=0$ powstał wynalazek, który jako innowacja zaczyna być absorbowany przez pewien system gospodarczy po okresie τ w danym układzie D_0 firm mogących wdrożyć tę innowację. Oznaczam przez $D(t)$ liczbę firm, które w chwili $t \geq \tau$ przez dany układ gospodarczy opisuje następujące równanie różniczkowe:

$$dD(t) = -\alpha D(t) dt \quad (1.11)$$

gdzie $\alpha > 0$ jest stałą prędkością upowszechniania innowacji.

Przy warunkach początkowych $D(t) = D_0$ dla $t \leq \tau$ ma:

$$D(t) = D_0 e^{-\alpha(t-\tau)} \quad (1.12)$$

Równanie (1.11) oznacza, że w miarę upływu czasu maleje liczba firm, które nie wdrożyły jeszcze danej innowacji. Stała D_0 w tym równaniu oznacza łączną liczbę firm, które w chwili $t \leq \tau$

nie wdrożyły tej innowacji jest równy przyrostowi liczby firm, które zdecydowały się na jej wdrożenie.

Przyjmuję, że innowacja jest eliminowana z produkcji w tempie wykładniczym ze stałą prędkością równą β . Zatem liczba przedsiębiorstw, które w chwili t wykorzystują daną innowację jest równa różnicy między przyrostem firm, które przyjmują daną innowację a liczbą przedsiębiorstw, które z niej zrezygnowały i wynosi:

$$dG(t) = \alpha D(t) - \beta G(t) dt \quad (1.13)$$

Przyjmując następujące warunki początkowe $D(t) = D_0$ oraz $G(t) = 0$ dla $t < \tau$ daje rozwiązanie równania:

$$G(t) = D_0 \delta(t - \tau) e^{-\delta(t-\tau)} \quad \text{dla } \alpha = \beta = \delta \quad (1.14)$$

oraz

$$G(t) = \frac{\alpha D_0}{\alpha - \beta} [e^{-\beta(t-\tau)} - e^{-\alpha(t-\tau)}] \quad \text{dla } \alpha \neq \beta \quad (1.15)$$

W praktyce stała absorpcji α jest zwykle większa od stałej eliminacji β .

Wprowadzę oznaczenie:

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} e^{\alpha\tau}, \quad B = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} e^{\beta\tau} \quad (1.16)$$

Korzystając z tych oznaczeń mogę wyrazić równanie (1.15) w następującej formie:

$$G(t) = B e^{-\beta t} - A e^{-\alpha t}.$$

Stałe α , β prędkości absorpcji i eliminacji mają wymiar $[1/t]$. Można jednak utworzyć parametry mające wymiar czasu $[t]$. Dokonując odpowiednich przekształceń otrzymam tzw. półokres absorpcji T_a oraz półokres eliminacji T_b .

Parametr T_a dany jest wzorem :

$$T_a = \frac{\ln 2}{\alpha} + \tau \quad (1.17)$$

Natomiast parametr T_b dany jest wzorem:

$$T_b = \frac{\ln 2}{\beta} + \tau \quad (1.18)$$

Parametr T_a mówi nam, po jakim czasie liczba firm wprowadzających daną innowację osiągnie połowę wartości D_0 . Parametr T_b interpretujemy jako czas, po którym połowa firm zrezygnuje z danej innowacji.

Z równań (1.12, 1.15) można obliczyć wielkość opóźnienia τ , z jakim wynalazek powstały w chwili $t=0$ zaczyna być absorbowany jako innowacja przez system:

$$\tau = \frac{\ln A - \ln B}{\alpha - \beta} \quad (1.19)$$

Dodatkowo całkując równanie (1.14) w przedziale od τ do ∞ otrzymam łączną liczbę firm, które kiedykolwiek korzystały z danej innowacji:

$$H = \int_{\tau}^{\infty} G(t) dt = \frac{B}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{A}{\alpha} e^{-\alpha t} = \frac{D_0}{\alpha - \beta} \left[\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right] \quad (1.20)$$

Równanie (1.20) może służyć do szacowania łącznej liczby firm, które korzystały z danej innowacji, jeśli dysponujemy obserwacjami funkcji $G(t)$ w krótkim przedziale czasu.

Zbadam teraz stabilność układu równań:

$$\begin{aligned} \frac{dD(t)}{dt} &= -\alpha D(t) \\ \frac{dG(t)}{dt} &= \alpha D(t) - \beta G(t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Zacznę od wyznaczenia punktów stacjonarnych.

Punkt stacjonarny układu równań (1.21) ma postać:

$$\begin{aligned} D(t) &= 0 \\ G(t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Macierz układu (1.21.) określona jest następująco $A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix}$.

Ponieważ

- $\det A = (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta > 0$
- $\text{tr} A = -(\alpha + \beta) < 0$,

- $\Delta = (\text{tr}A)^2 - 4\det A = [-(\alpha + \beta)]^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, więc

na mocy wcześniej poczynionych uwag (patrz tabela 1 lub twierdzenie 2) położenie równowagi układu równań (1.22) jest asymptotycznie stabilnym węzłem.

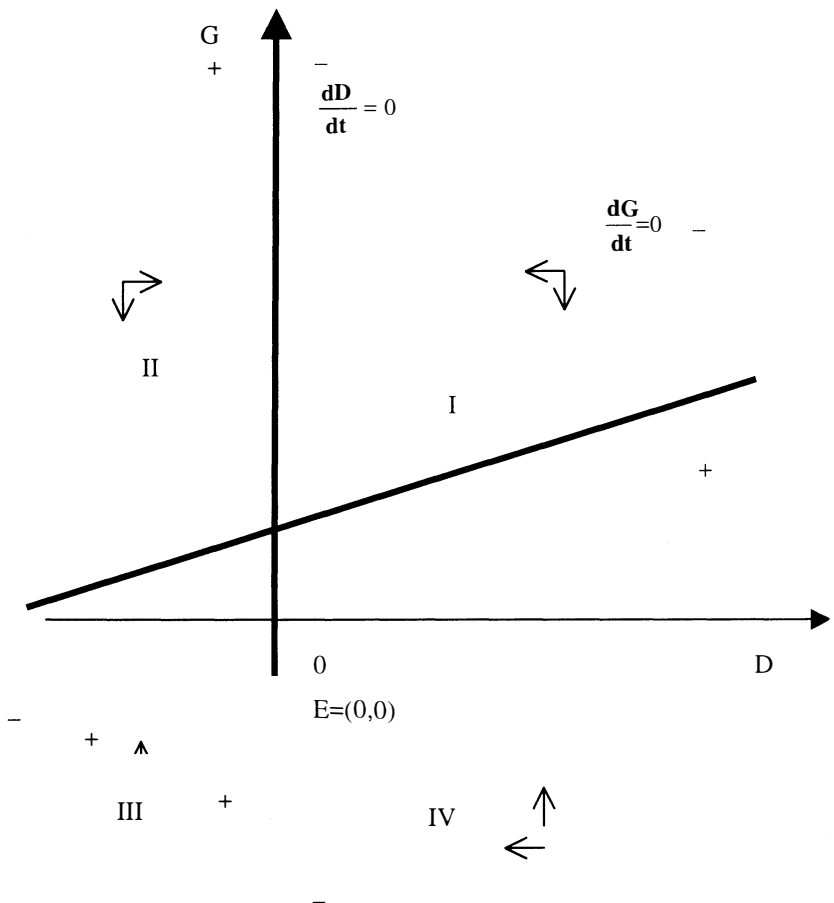
Wartości własne α, β macierzy A są rzeczywiste i niezerowe, zatem układ (1.21) jest również strukturalnie stabilny.

Co więcej, jeśli nastąpi zaburzenie układu równań (1.21) postaci (1.17), które będzie spełniało warunki (1.18) to zaburzenie tego typu nie spowoduje zmiany charakteru punktu stałego.

Diagram fazowy dla układu równań różniczkowych (1.21.) ma postać:

RYSUNEK 1

Diagram fazowy układu równań różniczkowych (1.21).



Analiza diagramu fazowego:

Dwie linie podziału $\frac{dD}{dt} = 0$, $\frac{dG}{dt} = 0$ przecinające się w punkcie $E=(0,0)$, dzielą płaszczyznę na cztery rozłączne regiony oznaczone liczbami od I do IV. Punkt $E=(0,0)$, w którym D , G są stacjonarne, ($\frac{dD}{dt} = 0$, $\frac{dG}{dt} = 0$), reprezentuje położenie równowagi dla naszego układu (1.21). We wszystkich pozostałych punktach D lub G albo oba zmieniają się w czasie, a kierunek zmian jest określony przez znaki pochodnych względem czasu $\frac{dD}{dt}$ i $\frac{dG}{dt}$ w tym punkcie.

Łatwo sprawdzić, że punktem równowagi jest punkt $D=0$, $G=0$. Ponadto:

- $\frac{dD}{dt} > 0$ gdy $D < 0$;
- $\frac{dD}{dt} < 0$ gdy $D > 0$;
- $\frac{dG}{dt} > 0$ gdy $G < \frac{\alpha}{\beta} D$;
- $\frac{dG}{dt} < 0$ gdy $G > \frac{\alpha}{\beta} D$.

Oznacza to, że w rozpatrywanym modelu na lewo od krzywej $\frac{dD}{dt} = 0$ mamy $\frac{dD}{dt} > 0$, a na prawo od niej mamy $\frac{dD}{dt} < 0$; dlatego napisano znak plus na lewo, a minus na prawo od krzywej. Znaki te wynikają stąd, że w miarę jak przesuwamy się z zachodu na wschód w przestrzeni fazowej (w miarę jak D rośnie), $\frac{dD}{dt}$ stopniowo maleje, tak iż znak $\frac{dD}{dt}$ musi przechodzić przez trzy stadia w następującej kolejności: +, 0, -.

Dalej, w górę od krzywej $\frac{dG}{dt} = 0$ mamy $\frac{dG}{dt} > 0$, a w dół od niej mamy $\frac{dG}{dt} < 0$; dlatego napisano znak plus w górę, a minus w dół od krzywej. Znaki te wynikają stąd, że w miarę jak przesuwamy się stopniowo z południa na północ (w miarę jak G wzrasta) wówczas $\frac{dG}{dt}$ stopniowo maleje, tak, że znak $\frac{dG}{dt}$ musi przechodzić przez trzy stadia w następującej kolejności: +, 0, -. Na rysunku zaznaczamy zatem znak plus poniżej, a znak minus powyżej krzywej $\frac{dG}{dt} = 0$.

Na podstawie znaków plus i minus można teraz wykreślić strzałki kierunkowe ukazujące ruch D i G . Dla każdego punktu w obszarze I pochodne $\frac{dD}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$ są ujemne. A zatem obie zmienne D, G muszą zmniejszać się w miarę upływu czasu, co oznacza ruch w kierunku zachodnim dla D i ruch w kierunku południowym dla G . Jak pokazują dwie strzałki dla obszaru I, jeśli dany punkt początkowy znajduje się w tym obszarze, to ruch

musi mieć ogólnie kierunek południowo-zachodni. Dokładnie odwrotnie jest dla obszaru III, gdzie pochodne $\frac{dD}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$ są dodatnie, tak więc obie zmienne D, G muszą rosnąć raz z upływem czasu. W przeciwieństwie do tego $\frac{dD}{dt}$, $\frac{dG}{dt}$ mają różne znaki w obszarze II. Ponieważ $\frac{dD}{dt}$ jest dodatnie, a $\frac{dG}{dt}$ jest ujemne, więc D powinno przesuwać się na wschód, a G na południe. Obszar IV wykazuje tendencję dokładnie przeciwną do występującej w obszarze II.

Warto zwrócić uwagę, że wszystkie strzałki są skierowane w stronę punktu E, czyni to punkt $E=(0,0)$ stabilnym położeniem równowagi. Charakter trajektorii fazowych wskazuje na to, że tym punktem równowagi jest węzeł.

4. Uwagi końcowe

1. Przeprowadzona w pracy tak dokładna analiza dynamiczna rozważanego układu (1.1) była możliwa, gdyż model dynamiczny był opisany za pomocą układu równań liniowych jednorodnych. Należy pamiętać, że chociaż można w ten sposób zyskać większą prostotę, to jednak założenie o liniowości jest pewnym uproszczeniem rzeczywistości.
2. Z drugiej strony przypomnijmy, że badanie punktów równowagi układu (1.1) ma zasadnicze znaczenie dla badania punktów równowagi ogólniejszych układów typu:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, t).$$

Jakościowa technika analizowania nieliniowego układu równań różniczkowych polega na wnioskowaniu na podstawie liniowego przybliżenia dokonanego za pomocą rozwinięcia Taylora tego układu wokół położenia równowagi. W punkcie rozwinięcia – którym w tym przypadku jest położenie równowagi – liniowe przybliżenie może „uchwycić” dokładnie taką samą równowagę jak pierwotny układ nieliniowy. W dostatecznie małym otoczeniu punktu równowagi liniowe przybliżenie powinno mieć taki sam ogólny układ linii prądu, jaki miał pierwotny układ nieliniowy. Analiza taka, zwana analizą lokalnej stabilności, może być stosowana samodzielnie lub jako uzupełnienie analizy diagramu fazowego.

3. W pracy [8, s. 123-135] zostały poddane podobnej ilościowo-jakościowej analizie dynamicznej deterministyczne modele przestrzennej dyfuzji innowacji. Były to modele jednofazowe opisane przez równania różniczkowe pierwszego rzędu (tzw. model typu źródłowego, typu kontaktowego, typu źródłowo-kontaktowego). We wszystkich rozważanych w pracy [8] modelach jednofazowych jak również w rozważanym w niniejszej pracy modelu dwufazowym punkty stałe (punkty równowagi) modelu są punktami stabilnymi. Zatem mimo różnego podejścia i różnych założeń wyjściowych stosowanych w konstrukcji modelu matematycznego analiza jakościowa odpowiednich układów dynamicznych (równania różniczkowego – w

przypadku modelu jednofazowego, układu równań różniczkowych – w przypadku modelu dwufazowego) daje podobny obraz jakościowy układu dynamicznego w otoczeniu jego punktu stałego.

4. Przedstawiony przez S.M. Kota w pracy [4] kinetyczny model absorpcji i eliminacji innowacji został zilustrowany przez tegoż autora przykładem empirycznym. Jako ilustrację innowacji, której dyfuzja zachodziła z wyraźnie widoczną fazą eliminacji, autor wybrał technologię produkcji prętów ciągnionych szlifowanych, polerowanych i łuszczonych. Miarą dyfuzji był udział produkcji tych prętów w ogólnej produkcji wyrobów przetwórstwa hutniczego. Na podstawie zaobserwowanych wartości $G(t)$ oszacowano parametry modelu. Błędy standardowe ocen były odpowiednio równe: $D(B)=0,00434$, $D(\beta)=0,00992$; $D(A)=0,002529$; $D(\alpha)=0,000002$, współczynnik determinacji $R^2=0,911161$, co może świadczyć, że upowszechnianie uszlachetnionego wyrobu hutniczego, jakim są pręty ciągnione szlifowane, przebiegało zgodnie z dwufazowym procesem dyfuzyjnym. Dodatkowo wyznaczone zostały inne charakterystyki analizowanego procesu dyfuzji tj.: półokres trwania absorpcji (T_a), półokres trwania eliminacji (T_b), opóźnienie czasowe (τ), moment maksimum (t_{max}), maksymalna wartość $G(t)$ (G_{max}). Przykład ten może świadczyć o dużych możliwościach stosowania prezentowanego dwufazowego modelu dyfuzji innowacji w praktyce.

Literatura

1. Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A.: *Chaos. An Introduction to Dynamical System*, Springer-Verlag New York, Inc, 1997.
2. Chiang A.C.: *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWE, Warszawa 1994.
3. Gandolfo G.: *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, North-Holland Publishing Company, 1971.
4. Kot S.M.: *Matematyczne modele procesów dyfuzji innowacji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1993.
5. Lorenz H.W.: *Nonlinear Dynamical Systems and Chaotic Motion, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, N^o 334.
6. Matwiejew N.M.: *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1970.
7. Pociecha J.: *Metody statystyczne w badaniach marketingowych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
8. Roszkowska E.: *Deterministyczne modele dyfuzji innowacji. Analiza dynamiczna*. [w:] *Rozwój regionalny. Problemy i ujęcia ilościowe*, [red.] Bocian A.F., Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 1999.