UNIWERSYTET w BIAŁYMSTOKU

Instytut Matematyki

Ryszard R. Andruszkiewicz

WYKŁADY Z ALGEBRY

LINIOWEJ

II

Białystok 2007

ISBN 978-83-7431-133-5

Korekta
Marcin Łuba

Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku
15-097 Białystok, ul. M. Skłodowskiej-Curie 14,
tel. (085) 745 70 58, 745 70 59

Druk i oprawa:
Mazowieckie Zakłady Graficzne s.c.
tel. (086) 275 41 31

Spis treści

Wstęp

Niniejsza książka jest podręcznikiem do przedmiotu **Algebra liniowa II** wykładanego w Instytucie Matematyki Uniwersytetu w Białymstoku w oparciu o następujący program:

Macierz przekształcenia liniowego. Macierz złożenia przekształceń liniowych. Macierz izomorfizmu liniowego. Macierz przekształcenia odwrotnego a macierz odwrotna do macierzy. Algebra macierzy kwadratowych i algebra endomorfizmów liniowych. Zmiana bazy przekształcenia liniowego. Wektory własne i wartości własne przekształcenia liniowego. Podprzestrzenie niezmiennicze. Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego. Postać Jordana przekształcenia liniowego. Formy liniowe. Przestrzeń sprzężona i baza sprzężona. Przekształcenia sprzężone. Formy dwuliniowe i kwadratowe. Równoważność form. Sprowadzanie form dwuliniowych do postaci kanonicznej. Przestrzenie euklidesowe i ortogonalne. Bazy ortogonalne. Metody wyznaczania baz ortogonalnych - ortogonalizacja Schmidta.

Wieloletnie doświadczenia autora związane z wykładaniem algebry liniowej pokazały, że przedmiot ten sprawia spore trudności studentom. Okazało się, że powyższy program nie jest łatwo zrealizować w trakcie piętnastu wykładów w sposób przystępny dla słuchaczy bez dysponowania dobrymi materiałami dydaktycznymi. Okazało się też, że odsyłanie studentów do literatury nie jest (z wielu powodów) skutecznym rozwiązaniem problemu. Właśnie dlatego powstał ten skrypt. W oparciu o materiał tu umieszczony można sprawnie prowadzić wykłady wzbogacając je dodatkowymi przykładami, uwagami dydaktycznymi, informacjami historycznymi, ciekawostkami, zadaniami, problemami, itp.

Wskazane jest aby Czytelnik był obeznany z podstawowym kursem elementarnej teorii liczb oraz z podstawowym kursem algebry liniowej.

W podręczniku liczbami naturalnymi będziemy nazywali dodatnie liczby całkowite, zaś sam zbiór wszystkich liczb naturalnych będziemy oznaczali przez $\mathbb{N}$. Zatem $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Koniec dowodu i przykładów oznaczamy symbolem $\square$.

Autor dziękuje mgr Marcinowi Łubie za pomoc w składzie komputerowym tego podręcznika.

Autor

Rozdział 1

Przestrzeń przekształceń liniowych

1.1 Określenie przestrzeni przekształceń liniowych

Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Oznaczmy przez $L(V;W)$ zbiór wszystkich przekształceń liniowych $f\colon V \to W$. Dla $f, g \in L(V;W)$ i $a \in K$ określamy przekształcenia $f+g\colon V \to W$ i $a \cdot f\colon V \to W$ przyjmując, że dla każdego $\alpha \in V$

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) \text{ i } (a \cdot f)(\alpha) = a \circ f(\alpha). \tag{1.1}$$

Wykażemy, że wówczas $f+g, a \cdot f \in L(V;W)$. W tym celu weźmy dowolne $\alpha, \beta \in V$ i dowolne $b \in K$. Z definicji przekształcenia liniowego i ze wzoru (1.1) mamy

$$(f+g)(\alpha+\beta) = f(\alpha+\beta) + g(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta) + g(\alpha) + g(\beta) =$$

$$= [f(\alpha) + g(\alpha)] + [f(\beta) + g(\beta)] = (f+g)(\alpha) + (f+g)(\beta)$$

oraz

$$(f+g)(b \circ \alpha) = f(b \circ \alpha) + g(b \circ \alpha) = b \circ f(\alpha) + b \circ g(\alpha) =$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$$= b \circ [f(\alpha) + g(\alpha)] = b \circ [(f + g)(\alpha)],$$

więc $f + g \in L(V; W)$. Podobnie

$$(a \cdot f)(\alpha + \beta) = a \circ f(\alpha + \beta) = a \circ [f(\alpha) + f(\beta)] =$$

$$= a \circ f(\alpha) + a \circ f(\beta) = (a \cdot f)(\alpha) + (a \cdot f)(\beta)$$

i

$$(a \cdot f)(b \circ \alpha) = a \circ f(b \circ \alpha) = a \circ [b \circ f(\alpha)] = (ab) \circ f(\alpha) =$$

$$= (ba) \circ f(\alpha) = b \circ [a \circ f(\alpha)] = b \circ [(a \cdot f)(\alpha)],$$

zatem także $a \cdot f \in L(V; W)$.

Oznaczmy przez Θ przekształcenie trywialne przestrzeni V w przestrzeń W. Zatem

$$\Theta(\alpha) = \theta \text{ dla każdego } \alpha \in V. \tag{1.2}$$

Jest jasne, że $\Theta \in L(V; W)$.

Twierdzenie 1.1. *Dla dowolnych przestrzeni liniowych V i W nad ciałem K zbiór $L(V; W)$ z działaniami $+$ i $\cdot$ określonymi wzorami (1.1) tworzy przestrzeń liniową nad ciałem K.*

Dowód. Sprawdzamy po kolei wszystkie aksjomaty przestrzeni liniowej. Weźmy dowolne $f, g, h \in L(V; W)$ i dowolne $\alpha \in V$, $a, b \in K$. Wtedy:

A1. $[(f + g) + h](\alpha) = (f + g)(\alpha) + h(\alpha) = [f(\alpha) + g(\alpha)] + h(\alpha) = f(\alpha) + [g(\alpha) + h(\alpha)] = f(\alpha) + (g + h)(\alpha) = [f + (g + h)](\alpha)$, więc $(f + g) + h = f + (g + h)$;

A2. $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) = g(\alpha) + f(\alpha) = (g + f)(\alpha)$, więc $f + g = g + f$;

A3. $(f + \Theta)(\alpha) = f(\alpha) + \Theta(\alpha) = f(\alpha) + \theta = f(\alpha)$, więc $f + \Theta = f$;

A4. $(f + (-1) \cdot f)(\alpha) = f(\alpha) + [(-1) \cdot f](\alpha) = f(\alpha) + (-1) \circ f(\alpha) = \theta = \Theta(\alpha)$, więc $(-1) \circ f = -f$ oraz $(-f)(\alpha) = -f(\alpha)$;

A5. $[a \cdot (f + g)](\alpha) = a \circ [(f + g)(\alpha)] = a \circ [f(\alpha) + g(\alpha)] = a \circ f(\alpha) + a \circ g(\alpha) = (a \cdot f)(\alpha) + (a \cdot g)(\alpha) = (a \cdot f + a \cdot g)(\alpha)$, więc $a \cdot (f + g) = a \cdot f + a \cdot g$;

A6. $[(a + b) \cdot f](\alpha) = (a + b) \circ f(\alpha) = a \circ f(\alpha) + b \circ f(\alpha) =$

$= (a \cdot f)(\alpha) + (b \cdot f)(\alpha) = (a \cdot f + b \cdot f)(\alpha)$, więc $(a+b) \cdot f = a \cdot f + b \cdot f$;
A7. $[(ab) \cdot f](\alpha) = (ab) \circ f(\alpha) = a \circ [b \circ f(\alpha)] = a \circ [(b \cdot f)(\alpha)] = [a \cdot (b \cdot f)](\alpha)$, więc $(ab) \cdot f = a \cdot (b \cdot f)$;
A8. $(1 \cdot f)(\alpha) = 1 \circ f(\alpha) = f(\alpha)$, więc $1 \cdot f = f$. $\square$

1.2 Baza przestrzeni przekształceń liniowych

Twierdzenie 1.2. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o bazach uporządkowanych $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ odpowiednio. Niech dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $\varphi_{ij}\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym wyznaczonym jednoznacznie przez warunki*

$$\varphi_{ij}(\alpha_k) = \begin{cases} \theta, & \text{gdy} \quad k \neq j, \\ \beta_i, & \text{gdy} \quad k = j. \end{cases} \tag{1.3}$$

Wówczas układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ jest bazą przestrzeni $L(V;W)$.

Dowód. Wykażemy najpierw, że układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ jest liniowo niezależny. W tym celu weźmy dowolny układ $(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ elementów ciała K taki, że $\sum\limits_{i,j} a_{ij} \cdot \varphi_{ij} = \Theta$. Wtedy dla dowolnego $k = 1, \ldots, n$ mamy $\theta = \left(\sum\limits_{i,j} a_{ij} \cdot \varphi_{ij} \right)(\alpha_k) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} \circ \varphi_{ij}(\alpha_k) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik} \circ \beta_i$. Ale wektory $\beta_1, \ldots, \beta_m$ są liniowo niezależne, więc $a_{ik} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$ i dla wszystkich $k = 1, \ldots, n$. Zatem układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ jest liniowo niezależny.

Pozostaje jeszcze wykazać, że układ $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ generuje przestrzeń $L(V;W)$. W tym celu weźmy dowolne $f \in L(V;W)$. Wtedy dla każdego $k = 1, \ldots, n$ istnieją skalary $a_{1k}, \ldots, a_{mk}$ takie, że $f(\alpha_k) = a_{1k} \circ \beta_1 + \ldots + a_{mk} \circ \beta_m$. Stąd dla $k = 1, \ldots, n$ mamy

$$\left(\sum_{i,j} a_{ij} \cdot \varphi_{ij} \right)(\alpha_k) = \sum_{i,j} a_{ij} \circ \varphi_{ij}(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \circ \beta_i = f(\alpha_k).$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Zatem z jednoznaczności określenia przekształcenia liniowego na bazie $f = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \varphi_{ij}$. $\square$

Uwaga 1.3. Bazę $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ przestrzeni $L(V;W)$ podaną w twierdzeniu 1.2 będziemy nazywali *bazą wyznaczoną przez bazy* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ przestrzeni V i W odpowiednio.

Wniosek 1.4. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Wówczas zachodzi równość*

$$\dim L(V;W) = \dim V \cdot \dim W. \tag{1.4}$$

1.3 Macierz przekształcenia liniowego

Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będą uporządkowanymi bazami nad ciałem K przestrzeni liniowych V i W odpowiednio. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas dla $k = 1, \ldots, n$ jest $f(\alpha_k) \in W$, więc istnieją $a_{1k}, \ldots, a_{mk} \in K$ takie, że

$$f(\alpha_k) = a_{1k} \circ \beta_1 + \ldots + a_{mk} \circ \beta_m. \tag{1.5}$$

Otrzymaną w ten sposób $m \times n$ macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

nazywamy *macierzą przekształcenia liniowego f w bazach* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ przestrzeni V i W odpowiednio. Zatem kolejne kolumny macierzy (1.6) są wektorami współrzędnych wektora $f(\alpha_k)$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ przestrzeni W dla $k = 1, \ldots, n$.

Przykład 1.5. Znajdziemy macierz A przekształcenia liniowego $f\colon \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ danego wzorem $f(\alpha) = i \cdot \alpha$ dla $\alpha \in \mathbb{C}$ w bazach $(1, i)$ i $(1, i)$. Ponieważ $f(1) = i \cdot 1 = i = 0 \cdot 1 + 1 \cdot i$, $f(i) = i \cdot i = -1 = (-1) \cdot 1 +$

$+0 \cdot i$, więc $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Znajdziemy macierz B przekształcenia f w bazach $(1, i)$ i $(1+i, 1-i)$. Podobnie jak wyżej mamy $f(1) = = i = \frac{1}{2} \cdot (1+i) + (-\frac{1}{2}) \cdot (1-i)$, $f(i) = -1 = (-\frac{1}{2}) \cdot (1+i) + (-\frac{1}{2}) \cdot (1-i)$, więc $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. □

Przykład 1.6. Niech K będzie ciałem, $m, n \in \mathbb{N}$ i niech $A = = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$. Wówczas A jest macierzą przekształcenia liniowego $f \colon K^n \to K^m$ danego wzorem analitycznym

$$f([x_1, \ldots, x_n]) = [a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n]$$

w bazach kanonicznych tych przestrzeni. □

Twierdzenie 1.7. *Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $f \colon V \to W$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Jeżeli $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha) \in W$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.*

Dowód. Ponieważ $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \circ \alpha_i$, więc z własności przekształceń liniowych i ze wzoru (1.5) mamy

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} a_i \circ f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \circ \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \circ \beta_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i \cdot a_{ji}) \circ \beta_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot a_{ji}) \circ \beta_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot a_{ji}) \right) \circ \beta_j.$$

Zatem $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{ji}$ jest j-tą współrzędną wektora $f(\alpha)$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Ponadto z definicji mnożenia macierzy j-tym wyrazem macierzy $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m\times 1}(K)$ jest $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot a_{ji}$. $\Box$

Przykład 1.8. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ w bazach (α_1, α_2), (β_1, β_2). Obliczymy $f(\alpha)$ dla $\alpha = \alpha_1 - 3 \circ \alpha_2$. Wektorem współrzędnych wektora α w bazie (α_1, α_2) jest $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, zatem z twierdzenia 1.7, wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha)$ w bazie (β_1, β_2) jest $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \end{bmatrix}$. Otrzymaliśmy więc, że $f(\alpha) = -7 \circ \beta_1 - 14 \circ \beta_2$. $\Box$

Twierdzenie 1.9. *Niech A będzie macierzą przekształcenia liniowego $f\colon V \to W$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wówczas*

$$\dim Im\, f = r(A).$$

Dowód. Zauważmy, że $Im\, f = lin(f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n)) = lin(\sum\limits_{j=1}^{m} a_{j1} \circ \beta_j, \ldots, \sum\limits_{j=1}^{m} a_{jn} \circ \beta_j)$. Z algebry liniowej I wiemy, że istnieje izomorfizm liniowy $\varphi\colon W \to K^m$ taki, że $\varphi(\beta_j) = \varepsilon_j$ dla $j = 1, \ldots, m$. Stąd $Im\, f \cong \varphi(Im\, f)$, więc w szczególności $\dim Im\, f = \dim \varphi(Im\, f)$. Ale $\varphi(Im\, f) = lin([a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}], \ldots, [a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}])$, więc $\dim \varphi(Im\, f) = r(A)$, czyli $\dim Im\, f = r(A)$. $\Box$

Lemat 1.10. *Niech $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Jeżeli dla dowolnych skalarów $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi równość*

$$A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

to $A = B$.

Dowód. Niech $A = [a_{ij}]$ oraz niech $B = [b_{ij}]$. Weźmy dowolne ustalone $j = 1, \ldots, n$ i niech $a_j = 1$ oraz $a_k = 0$ dla wszystkich

$k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Wtedy z definicji mnożenia macierzy i-tym elementem macierzy $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}(K)$ jest a_{ij} dla $i = 1, \ldots, m$. Podobnie i-tym elementem macierzy $B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in M_{m \times 1}(K)$ jest b_{ij} dla $i = 1, \ldots, m$. Ale $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$, więc $a_{ij} = b_{ij}$ dla dowolnych $i = 1, \ldots, m$ oraz $j = 1, \ldots, n$. Ponadto $A, B \in M_{m \times n}(K)$, więc $A = B$. $\square$

Twierdzenie 1.11. *Niech V, W, U będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o bazach uporządkowanych $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ odpowiednio. Niech A będzie macierzą przekształcenia $f \in L(V; W)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ oraz niech B będzie macierzą przekształcenia $g \in L(W; U)$ w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ i $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$. Wówczas $B \cdot A$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f \in$ $\in L(V; U)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$.*

Dowód. Niech $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ będzie wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Wtedy z twierdzenia 1.7 mamy, że $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $f(\alpha)$ w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Ponownie z twierdzenia 1.7 otrzymujemy, że $B \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right)$ jest wektorem współrzędnych wektora $g(f(\alpha))$ w ba-

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

zie $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$. Ale

$$B \cdot \left(A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right) = (B \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

więc jeśli $C \in M_{s\times n}(K)$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f \in L(V; U)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$, to na mocy twierdzenia 1.7 $C \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (B \cdot A) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in K$. Ponieważ $B \in M_{s\times m}(K)$ i $A \in M_{m\times n}(K)$, więc $B \cdot A \in M_{s\times n}(K)$. Z lematu 1.10 otrzymujemy równość $C = B \cdot A$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 2

Przekształcenia liniowe a macierze

2.1 Izomorfizm przestrzeni $L(V;W)$ i $M_{m\times n}(K)$

Twierdzenie 2.1. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o bazach uporządkowanych $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ i $(\beta_1,\ldots,\beta_m)$ odpowiednio. Niech $\varphi\colon L(V;W)\to M_{m\times n}(K)$ będzie przekształceniem, które każdemu $f\in L(V;W)$ przyporządkowuje macierz f w podanych bazach przestrzeni V i W. Wówczas φ jest izomorfizmem liniowym.*

Dowód. Niech $f,g\in L(V;W)$ i niech $A=[a_{ij}]$ oraz $B=[b_{ij}]$ będą macierzami f i g odpowiednio, w rozpatrywanych bazach przestrzeni V i W. Wtedy dla $k=1,\ldots,n$ mamy, że

$$(f+g)(\alpha_k)=f(\alpha_k)+g(\alpha_k)=\sum_{i=1}^{m}a_{ik}\circ\beta_i+\sum_{i=1}^{m}b_{ik}\circ\beta_i=\sum_{i=1}^{m}(a_{ik}+b_{ik})\circ\beta_i,$$

więc, ze wzorów (1.5) i (1.6), $A+B$ jest macierzą przekształcenia liniowego $f+g$ w zadanych bazach przestrzeni V i W, czyli $\varphi(f+g)=$ $=\varphi(f)+\varphi(g)$. Dalej, dla dowolnego $a\in K$ oraz dla dowolnego $k=$

$= 1, \ldots, n$

$$(a \cdot f)(\alpha_k) = a \circ f(\alpha_k) = a \circ \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \circ \beta_i = \sum_{i=1}^{m} (a \cdot a_{ik}) \circ \beta_i,$$

skąd macierzą przekształcenia $a \cdot f$ w rozpatrywanych bazach jest $a \cdot A$, czyli $\varphi(a \cdot f) = a \cdot \varphi(f)$. Zatem φ jest przekształceniem liniowym. Jeżeli $\varphi(f) = \varphi(g)$, to na mocy twierdzenia 1.7, $f(\alpha) = g(\alpha)$ dla dowolnego $\alpha \in V$, skąd $f = g$. Zatem przekształcenie φ jest różnowartościowe.

Weźmy dowolne $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$ i niech $f = \sum_{i,j} a_{ij} \circ \varphi_{ij}$, gdzie $(\varphi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ jest bazą przestrzeni $L(V;W)$ zdefiniowaną w twierdzeniu 1.2. Wtedy $f \in L(V;W)$ oraz z dowodu twierdzenia 1.2 $f(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \circ \beta_i$ dla każdego $k = 1, \ldots, n$. Zatem $\varphi(f) = A$ i przekształcenie φ jest „na". Stąd ostatecznie φ jest izomorfizmem liniowym. $\square$

Twierdzenie 2.2. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o bazach uporządkowanych $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, odpowiednio. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą przekształcenia $f \in L(V;W)$ w tych bazach. Wówczas f jest izomorfizmem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest odwracalna. Jeżeli f jest izomorfizmem liniowym, to A^{-1} jest macierzą przekształcenia $f^{-1} \in L(W;V)$ w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni W i V.*

Dowód. Załóżmy, że f jest izomorfizmem liniowym. Istnieje wówczas przekształcenie odwrotne $f^{-1} \colon W \to V$, które jest izomorfizmem liniowym. Niech B będzie macierzą przekształcenia liniowego f^{-1} w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni W i V. Oczywiście $f^{-1} \circ f = id_V$ oraz macierzą przekształcenia tożsamościowego id_V w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V jest macierz jednostkowa I_n. Zatem, na mocy twierdzenia 1.11, $B \cdot A = I_n$, skąd $B = A^{-1}$.

Na odwrót, załóżmy, że macierz A jest odwracalna. Istnieje wtedy macierz $B \in M_n(K)$ taka, że $B \cdot A = A \cdot B = I_n$. Z twierdzenia 2.1 istnieje przekształcenie $g \in L(W;V)$, którego macierzą w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni W i V jest B. Z twierdzenia 1.11 otrzymujemy zatem, że $I_n = B \cdot A$ jest macierzą przekształcenia $g \circ f$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V, skąd $g \circ f = id_V$. Ponadto z twierdzenia 1.11, $I_n = A \cdot B$ jest macierzą przekształcenia $f \circ g$ w bazach $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ przestrzeni W. Stąd $f \circ g = id_W$. Zatem $g = f^{-1}$ i f jest izomorfizmem liniowym. □

2.2 Macierz przejścia

Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Niech dla $i = 1, \ldots, n$, $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ będzie wektorem współrzędnych wektora α'_i w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tzn. $\alpha'_i = a_{1i} \circ \alpha_1 + \ldots + a_{ni} \circ \alpha_i$. Wówczas macierz kwadratową

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(K) \tag{2.1}$$

nazywamy *macierzą przejścia od bazy* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *do bazy* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Równoważnie, A jest macierzą przekształcenia tożsamościowego $id_V : V \to V$ w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V.

Ponieważ id_V jest izomorfizmem liniowym, więc z twierdzeń 2.2 i 1.7 uzyskujemy od razu następujące

Twierdzenie 2.3. *Macierz przejścia A od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ przestrzeni liniowej V jest macierzą odwracalną i A^{-1} jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ do bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Jeżeli $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ jest wektorem współrzędnych wektora $\alpha \in V$ w bazie*

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *to* $A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ *jest wektorem współrzędnych wektora* α *w bazie* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. $\square$

Przykład 2.4. Załóżmy, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni K^n oraz $\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ dla $i = 1, \ldots, n$. Wówczas macierzą przejścia od bazy kanonicznej $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ do bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Np. dla $n = 3$, macierzą przejścia od bazy $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ do bazy $([1, 1, 1], [0, 1, 2], [0, 0, 1])$ jest $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. $\square$

Twierdzenie 2.5. Załóżmy, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ są bazami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Jeżeli A jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ oraz B jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$, to $A \cdot B$ jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$.

Dowód. Niech $f \colon V \to V$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem $f(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in V$. Wtedy A jest macierzą f w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Niech $g \colon V \to V$ będzie przekształceniem liniowym danym wzorem $g(\alpha) = \alpha$ dla $\alpha \in V$. Wtedy B jest macierzą g w bazach $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ i $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Wówczas z twierdzenia 1.11, $A \cdot B$ jest macierzą przekształcenia $f \circ g$ w bazach $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Ale $f \circ g = id_V$, więc $A \cdot B$ jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$. $\square$

Z twierdzeń 2.3 i 2.5 wynika od razu następujący

Wniosek 2.6. *Niech* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ *będą bazami przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K. *Jeżeli* A *jest macierzą przejścia od bazy* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *do bazy* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *oraz* B *jest macie-*

rzą przejścia od bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *do bazy* $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$*, to macierzą przejścia od bazy* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *do bazy* $(\alpha_1", \ldots, \alpha_n")$ *jest* $A^{-1} \cdot B$.

Przykład 2.7. Znajdziemy macierz przejścia od bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ do bazy $([2,7,3],[3,9,4],[1,5,3])$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Z przykładu 2.4 mamy, że macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ jest $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $([2,7,3],[3,9,4],[1,5,3])$ jest $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczamy (np. przy pomocy operacji elementarnych) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Z wniosku 2.6 macierzą przejścia od bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ do bazy $([2,7,3],[3,9,4],[1,5,3])$ jest $A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. $\square$

2.3 Zmiana baz

Twierdzenie 2.8. *Niech* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *i* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej* V *i niech* $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *i* $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$ *będą dwiema uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej* W *nad ciałem* K*. Niech* C *będzie macierzą przekształcenia* $f \in L(V;W)$ *w bazach* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *i* $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *i niech* D *będzie macierzą* f *w bazach* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *i* $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$*. Niech* A *będzie macierzą przejścia od bazy* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *do bazy* $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *oraz niech* B *będzie macierzą przejścia od bazy* $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *do bazy* $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$*. Wtedy*

$$D = B^{-1} \cdot C \cdot A.$$

Dowód. Ponieważ $f = f \circ id_V$, więc z twierdzenia 1.11, $C \cdot A$ jest macierzą f w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Ponadto $f =$

$= id_W \circ f$, więc na mocy twierdzenia 1.11, $B \cdot D$ jest macierzą f w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Stąd $B \cdot D = C \cdot A$. Ale z twierdzenia 2.2 macierz B jest odwracalna, więc $D = B^{-1} \cdot C \cdot A$. $\square$

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Każde przekształcenie liniowe $f \colon V \to V$ nazywamy *endomorfizmem liniowym przestrzeni* V. Przez macierz takiego endomorfizmu f w bazie uporządkowanej $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V rozumiemy macierz f w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Z twierdzenia 2.8 i z twierdzenia Cauchy'ego mamy od razu następujący

Wniosek 2.9. *Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ będą uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej V. Niech A będzie macierzą endomorfizmu $f \in L(V;V)$ w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i niech B będzie macierzą f w bazie $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Niech P będzie macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Wtedy $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. W szczególności* $\det(B) = \det(A)$. $\square$

Definicja 2.10. Powiemy, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są *podobne*, jeżeli istnieje odwracalna macierz $C \in M_n(K)$ taka, że $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Piszemy wtedy $A \sim B$.

Stwierdzenie 2.11. *Dla dowolnych macierzy $A, B, C \in M_n(K)$:*
(i) $A \sim A$,
(ii) jeżeli $A \sim B$, to $B \sim A$,
(iii) jeżeli $A \sim B$ i $B \sim C$, to $A \sim C$.

Dowód. (i) Ponieważ $A = I_n^{-1} \cdot A \cdot I_n$, więc $A \sim A$.

(ii) Niech $A \sim B$. Wtedy istnieje $X \in M_n(K)$ takie, że $B = X^{-1} \cdot A \cdot X$, skąd $A = X \cdot B \cdot X^{-1} = (X^{-1})^{-1} \cdot B \cdot X^{-1}$, czyli $B \sim A$.

(iii) Niech $A \sim B$ i $B \sim C$. Wtedy istnieją macierze odwracalne $X, Y \in M_n(K)$ takie, że $B = X^{-1} \cdot A \cdot X$ i $C = Y^{-1} \cdot B \cdot Y$, skąd $C = Y^{-1} \cdot X^{-1} \cdot A \cdot X \cdot Y = (X \cdot Y)^{-1} \cdot A \cdot (X \cdot Y)$, czyli $A \sim C$. $\square$

Uwaga 2.12. Dla dowolnego ciała K macierze $A, B \in M_n(K)$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami pewnego endomorfizmu f przestrzeni K^n w pewnych bazach tej przestrzeni. Rzeczywiście, jeśli macierze A i B są podobne, to istnieje macierz odwracalna $C = [c_{ij}] \in M_n(K)$ taka, że $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Niech $f \in L(K^n; K^n)$ będzie przekształceniem liniowym, które w bazie kanonicznej przestrzeni K^n ma macierz A. Niech $\alpha_i = [c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{ni}]$ dla $i = 1, \dots, n$. Wówczas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni K^n złożoną z kolumn macierzy C. Wtedy C jest macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Wówczas z wniosku 2.9 macierzą f w bazie $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jest $C^{-1} \cdot A \cdot C = B$. Natomiast implikacja odwrotna wynika od razu z wniosku 2.9. $\square$

Z twierdzenia 1.9, wniosku 2.9 oraz z uwagi 2.12
następujący

Wniosek 2.13. *Dla dowolnego ciała K, jeżeli macierze $A, B \in \in M_n(K)$ są podobne, to $r(A) = r(B)$ oraz* $\det A = \det B$.

Przykład 2.14. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ danym wzorem analitycznym

$$f([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 + 3x_2 + x_3, 7x_1 + 9x_2 + 5x_3, 3x_1 + 4x_2 + 3x_3].$$

Znajdziemy macierz f w bazie $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$. Macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$ jest $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ponadto $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ jest macierzą f w bazie kanonicznej. Zatem z wniosku 2.9, macierz $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ jest macierzą f w bazie $([1,3,1],[2,2,1],[3,4,2])$. Z przykładu 2.7 wynika, że $P^{-1} = = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Stąd uzyskujemy, że $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -27 & -26 & -48 \\ 21 & 20 & 37 \end{bmatrix}$. $\square$

Stwierdzenie 2.15. *Jeżeli macierze $P \in M_m(K)$ i $Q \in M_m(K)$ są odwracalne, to dla dowolnej macierzy $A \in M_{m \times n}(K)$*

$$r(P \cdot A \cdot Q) = r(A).$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Dowód. Niech $f\colon K^n \to K^m$, $g\colon K^n \to K^n$ i $h\colon K^m \to K^m$ będą przekształceniami liniowymi posiadającymi w bazach kanonicznych odpowiednio macierze: A, Q, P. Wówczas, z twierdzenia 2.2, g i h są automorfizmami. Zatem $(f \circ g)(K^n) = f(g(K^n)) = f(K^n) = Im\, f$ i $h(f(K^n)) \cong f(K^n)$, skąd $\dim\, Im(h \circ f \circ g) = \dim\, Im\, f$. Z twierdzenia 1.11 macierzą $h \circ f \circ g$ w bazach kanonicznych jest $P \cdot A \cdot Q$. Ponadto z twierdzenia 1.9, $r(P \cdot A \cdot Q) = \dim\, Im(h \circ f \circ g)$ i $r(A) = \dim\, Im\, f$. Stąd $r(P \cdot A \cdot Q) = r(A)$. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 3

Algebry

3.1 Określenie algebry. Przykłady algebr

Definicja 3.1. Niech $(A, +, 0)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Powiemy, że A jest K-*algebrą*, jeżeli istnieje odwzorowanie $\cdot \colon A \times A \to A$ spełniające następujące warunki:

A1. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ dla dowolnych $\alpha, \beta, \gamma \in A$,

A2. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ oraz $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$ dla dowolnych $\alpha, \beta, \gamma \in A$,

A3. $a \circ (\alpha \cdot \beta) = (a \circ \alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (a \circ \beta)$ dla dowolnych $a \in K$, $\alpha, \beta \in A$.

Mówimy, że $e \in A$ jest jedynką K-algebry A, jeżeli $a \cdot e = e \cdot a = a$ dla każdego $a \in A$.

Przykład 3.2. Z algebry liniowej I wynika, że dla dowolnego ciała K i dla dowolnej liczby naturalnej n przestrzeń liniowa macierzy kwadratowych $M_n(K)$ ze zwykłymi działaniami macierzowymi tworzy K-algebrę z jedynką I_n. $\square$

Przykład 3.3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przestrzeń liniowa $L(V; V)$ endomorfizmów przestrzeni V jest K- algebrą z jedynką, jeśli mnożenie w $L(V; V)$ określimy jako składanie przekształceń. Rzeczywiście, jeśli $f, g \in L(V; V)$, to z algebry liniowej I $f \circ g \in L(V;V)$. Ponadto składanie przekształceń jest łączne oraz dla dowolnych $f, g, h \in L(V;V)$ i dla dowolnych $a \in K$, $\alpha \in V$ mamy

$$(f \cdot (g+h))(\alpha) = f((g+h)(\alpha)) = f(g(\alpha) + h(\alpha)) =$$

$$= f(g(\alpha)) + f(h(\alpha)) = (f \cdot g)(\alpha) + (f \cdot h)(\alpha) = (f \cdot g + f \cdot h)(\alpha),$$

a stąd $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$. Ponadto

$$((g+h) \cdot f)(\alpha) = (g+h)(f(\alpha)) = g(f(\alpha)) + h(f(\alpha)) =$$

$$= (g \cdot f)(\alpha) + (h \cdot f)(\alpha) = (g \cdot f + h \cdot f)(\alpha),$$

więc $(g+h) \cdot f = g \cdot f + h \cdot f$. W końcu

$$(a \cdot (f \cdot g))(\alpha) = a \circ ((f \cdot g)(\alpha)) =$$

$$= a \circ (f(g(\alpha))) = f(a \circ g(\alpha)) = (f \cdot (a \cdot g))(\alpha),$$

czyli $a \cdot (f \cdot g) = f \cdot (a \cdot g)$ oraz

$$((a \cdot f) \cdot g)(\alpha) = (a \cdot f)(g(\alpha)) = a \circ (f(g(\alpha))),$$

więc $a \cdot (f \cdot g) = (a \cdot f) \cdot g$. Jedynką tej K-algebry jest przekształcenie tożsamościowe $id_V \colon V \to V$. $\square$

Niech A będzie K-algebrą. Dla dowolnego $\alpha \in A$ możemy indukcyjnie określić α^n dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ kładąc: $\alpha^1 = \alpha$ oraz $\alpha^{n+1} = \alpha^n \cdot \alpha$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem: $\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n}$. Jeżeli dodatkowo algebra A ma jedynkę e, to przyjmujemy, że $\alpha^0 = e$ dla dowolnego $\alpha \in A$. Nietrudno jest wykazać, że dla dowolnego $\alpha \in A$ i dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$

$$\alpha^n \cdot \alpha^m = \alpha^{n+m} \text{ oraz } (\alpha^n)^m = \alpha^{nm}.$$

Definicja 3.4. Podalgebrą K-algebry A nazywamy taką podprzestrzeń B przestrzeni liniowej A, że $\alpha \cdot \beta \in B$ dla wszystkich $\alpha, \beta \in B$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Uwaga 3.5. Podalgebry K-algebry A są też w naturalny sposób K-algebrami. Dla dowolnego $\alpha \in A$ podprzestrzeń $lin(\alpha, \alpha^2, \ldots)$ jest podalgebrą algebry A, przy czym dla dowolnych $\beta, \gamma \in lin(\alpha, \alpha^2, \ldots)$ mamy, że $\beta \cdot \gamma = \gamma \cdot \beta$.

Definicja 3.6. Niech A i B będą algebrami nad tym samym ciałem K. Powiemy, że algebry A i B są izomorficzne i piszemy $A \cong B$, jeżeli istnieje izomorfizm liniowy $f\colon A \to B$ taki, że $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ dla dowolnych $x, y \in A$.

Twierdzenie 3.7. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas K-algebry $L(V;V)$ i $M_n(K)$ są izomorficzne. Dokładniej, jeśli $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest uporządkowaną bazą przestrzeni V oraz dla $f \in L(V;V)$, A_f jest macierzą przekształcenia f w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to odwzorowanie $\varphi\colon L(V;V) \to M_n(K)$ dane wzorem $\varphi(f) = A_f$ dla $f \in L(V;V)$ jest izomorfizmem algebr.*

Dowód. Z twierdzenia 2.1, φ jest izomorfizmem liniowym. Ponadto, z twierdzenia 1.11, dla dowolnych $f, g \in L(V;V)$ zachodzą równości $\varphi(f \circ g) = A_{f \circ g} = A_f \cdot A_g = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$. Zatem ostatecznie φ jest izomorfizmem K-algebr i $L(V;V) \cong M_n(K)$. $\square$

3.2 Algebra wielomianów

Niech K będzie dowolnym ciałem. *Wielomianem* zmiennej x o współczynnikach z ciała K nazywamy wyrażenie algebraiczne f postaci

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{3.1}$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są ustalonymi elementami ciała K zwanymi współczynnikami wielomianu f oraz $n \in \mathbb{N}_0$. Jeżeli $a_n \neq 0$, to mówimy, że wielomian f ma stopień równy n i piszemy $st(f) = n$, a a_n nazywamy *najstarszym współczynnikiem* wielomianu f. Wielomianem zerowym nazywamy taki wielomian, którego wszystkie współczynniki są równe 0. Zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach z ciała K będziemy oznaczali przez $K[x]$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Dodawanie i mnożenie wielomianów z $K[x]$ jest analogiczne do dodawania i mnożenia wielomianów o współczynnikach rzeczywistych. Ponadto w naturalny sposób $K[x]$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K oraz $\{1, x, x^2, \ldots\}$ jest bazą $K[x]$ nad K. Można wykazać, że $K[x]$ jest nawet K-algebrą. Ponadto dla dowolnych wielomianów $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ zachodzi równość

$$st(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) = st(f_1) + st(f_2) + \ldots + st(f_n).$$

Ponadto dla dowolnych niezerowych wielomianów $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$ najstarszy współczynnik wielomianu $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ jest równy iloczynowi najstarszych współczynników wielomianów $f_1, \ldots, f_n$.

Jeżeli $f \in K[x]$, $f \neq 0$, to dla dowolnego wielomianu $g \in K[x]$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów $(q, r) \in K[x] \times K[x]$ taka, że $g = q \cdot f + r$ i $st(r) < st(f)$.

Wartością wielomianu f postaci (3.1) w punkcie $a \in K$ nazywamy element $f(a) = a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0$. Powiemy, że element $a \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu $f \in K[x]$, jeżeli $f(a) = 0$.

Można wykazać, że dla dowolnego ciała K istnieje ciało $K(x)$ takie, że $K[x] \subseteq K(x)$ oraz $K(x) = \{\frac{f}{g} : f, g \in K[x]\}$. Ponadto dodawanie i mnożenie w $K[x]$ jest zgodne z dodawaniem i mnożeniem w $K(x)$, tzn. $K[x]$ jest podalgebrą K-algebry $K(x)$.

Definicja 3.8. Powiemy, że wielomiany $w_1, w_2, \ldots, w_n \in K[x]$ $(n \geqslant 2)$ są *względnie pierwsze*, jeżeli istnieją $u_1, u_2, \ldots, u_n \in K[x]$ takie, że $w_1u_1 + w_2u_2 + \ldots + w_nu_n = 1$.

Mówimy, że wielomiany $w_1, w_2, \ldots, w_n \in K[x]$ $(n \geqslant 2)$ są *parami względnie pierwsze*, jeżeli każde dwa spośród nich są względnie pierwsze.

Lemat 3.9. *Jeżeli dla każdego $i = 1, \ldots, n$ wielomiany $w \in K[x]$ i $w_i \in K[x]$ są względnie pierwsze, to wielomiany w i $w_1w_2\ldots w_n$ też są względnie pierwsze.*

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n i niech wielomiany w i w_i będą względnie pierwsze dla każdego $i = 1, \ldots, n, n+1$. Z założenia indukcyjnego istnieją wielomiany u, v takie, że $1 = wu +$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$+w_1 \dots w_n v$, skąd $w_{n+1} = wuw_{n+1} + w_1 \dots w_n w_{n+1} v$. Ponadto istnieją wielomiany u_1, u_2 takie, że $1 = wu_1 + w_{n+1}u_2$, więc $1 = wu_1 + (wuw_{n+1} + w_1 \dots w_n w_{n+1} v)u_2 = w(u_1 + uw_{n+1}u_2) + w_1 \dots w_{n+1}(vu_2)$, czyli wielomiany w i $w_1 \dots w_{n+1}$ są względnie pierwsze. □

Lemat 3.10. *Jeżeli wielomiany $w_1, \dots, w_n \in K[x]$ ($n \geqslant 2$) są parami względnie pierwsze, to wielomiany*

$$g_1 = w_2 w_3 \dots w_n, g_2 = w_1 w_3 \dots w_n, \dots, g_n = w_1 w_2 \dots w_{n-1}$$

są względnie pierwsze.

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 2$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i niech wielomiany $w_1, \dots, w_n, w_{n+1}$ będą parami względnie pierwsze. Z lematu 3.9 istnieją wielomiany u, v takie, że $1 = w_{n+1}u + w_1 \dots w_n v$. Ponadto z założenia indukcyjnego istnieją wielomiany $u_1, \dots, u_n$ takie, że $1 = g_1 u_1 + g_2 u_2 + \dots + g_n u_n$, skąd $w_{n+1} = g_1 w_{n+1} u_1 + g_2 w_{n+1} u_2 + \dots + g_n w_{n+1} u_n$. Zatem $1 = (g_1 w_{n+1})(u_1 u) + (g_2 w_{n+1})(u_2 u) + \dots + (g_n w_{n+1})(u_n u) + w_1 \dots w_n v$, więc wielomiany $h_1 = w_2 w_3 \dots w_n w_{n+1}$, $h_2 = w_1 w_3 \dots w_n w_{n+1}, \dots, h_n = w_1 w_2 \dots w_{n-1} w_n, h_{n+1} = w_1 w_2 \dots w_n$ są względnie pierwsze. □

Lemat 3.11. *Jeżeli a, b są różnymi elementami ciała K, to dla dowolnych liczb naturalnych k i l wielomiany $(x-a)^k$ i $(x-b)^l$ są względnie pierwsze.*

Dowód. Ponieważ $(x-a) \cdot \frac{1}{b-a} + (x-b) \cdot \frac{-1}{b-a} = 1$, więc wielomiany $x-a$ i $x-b$ są względnie pierwsze. Zatem z lematu 3.9 wielomiany $x-a$ i $(x-b)^l$ są względnie pierwsze. Korzystając ponownie z lematu 3.9 otrzymujemy ostatecznie, że względnie pierwsze są także wielomiany $(x-b)^l$ i $(x-a)^k$. □

3.3 Wartość wielomianu w punkcie algebry

Niech A będzie K-algebrą z jedynką e i niech $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in K[x]$. *Wartością wielomianu f w punkcie $\alpha \in A$* nazywamy

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

element $f(\alpha)$ algebry A określony wzorem

$$f(\alpha) = a_0 \circ e + a_1 \circ \alpha + \ldots + a_n \circ \alpha^n.$$

Można wykazać, że dla dowolnych $w_1, w_2 \in K[x]$ zachodzą równości

$$w_1(\alpha) \cdot w_2(\alpha) = w_2(\alpha) \cdot w_1(\alpha) = (w_1 w_2)(\alpha).$$

Przykład 3.12. Dla dowolnego ciała K wyznaczymy wartość wielomianu $w = x^2 - (a+d)x + ad - bc \in K[x]$ w punkcie $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ K-algebry $M_2(K)$. Mamy

$$w(A) = A^2 - (a+d) \cdot A + (ad - bc) \cdot I_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

czyli $w(A) = 0_2$. $\square$

Uwaga 3.13. Niech $\varphi\colon A \to B$ będzie izomorfizmem K-algebry A na K-algebrę B. Przez prostą indukcję można wykazać, że $\varphi(\alpha^n) = [\varphi(\alpha)]^n$ dla dowolnego $\alpha \in A$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli dodatkowo A i B mają jedynki, to dla dowolnego wielomianu $w \in K[x]$ $\varphi(w(\alpha)) = w(\varphi(\alpha))$. W szczególności, jeśli $w(\alpha) = \theta$, to $w(\varphi(\alpha)) = \theta$. Z twierdzenia 3.7 wynika zatem, że jeśli A jest macierzą endomorfizmu f przestrzeni liniowej V nad ciałem K w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, to dla dowolnego wielomianu $w \in K[x]$ $w(A)$ jest macierzą endomorfizmu $w(f)$ w tej bazie. W szczególności A^n jest macierzą endomorfizmu f^n w podanej bazie dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Lemat 3.14. *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Dla dowolnych $u, w \in K[x]$ zachodzi $Ker\, w(f) \subseteq Ker\,(uw)(f)$.*

Dowód. Jeśli $\alpha \in Ker\, w(f)$, to $[w(f)](\alpha) = \theta$. Zatem $[(uw)(f)](\alpha) = [u(f)]([w(f)](\alpha)) = [u(f)](\theta) = \theta$, czyli $\alpha \in$ $\in Ker\,(wu)(f)$. $\square$

Lemat 3.15. *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Jeżeli wielomiany $w, u \in K[x]$ są względnie pierwsze, to $Ker\ w(f) \cap Ker\ u(f) = \{\theta\}$.*

Dowód. Istnieją wielomiany $v_1, v_2 \in K[x]$ takie, że $wv_1 + uv_2 = 1$, skąd $(wv_1)(f) + (uv_2)(f) = id_V$. Niech $\alpha \in Ker\ w(f) \cap Ker\ u(f)$. Wtedy z lematu 3.14, $\alpha \in Ker\ (wv_1)(f)$ i $\alpha \in Ker\ (uv_2)(f)$, skąd $\alpha \in Ker[(wv_1)(f) + (uv_2)(f)] = Ker\ id_V = \{\theta\}$, czyli $\alpha = \theta$. $\square$

Lemat 3.16. *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Jeżeli wielomiany $w_1, \ldots, w_r \in K[x]$ są względnie pierwsze, to $Im\ w_1(f) + \ldots + Im\ w_r(f) = V$.*

Dowód. Istnieją wielomiany $u_1, \ldots, u_r \in K[x]$ takie, że $w_1u_1 +$ $+ \ldots + w_ru_r = 1$, więc $(w_1u_1)(f) + \ldots + (w_ru_r)(f) = id_V$. Stąd dla $\alpha \in V$, $\alpha = [w_1(f)]([u_1(f)](\alpha)) + \ldots + [w_r(f)]([u_r(f)](\alpha))$. Ale $[w_i(f)]([u_i(f)](\alpha)) \in Im\ w_i(f)$ dla $i = 1, \ldots, r$, więc $\alpha \in Im\ w_1(f) +$ $+ \ldots + Im\ w_r(f)$. $\square$

3.4 Wielomiany wielu zmiennych

Niech K będzie dowolnym ciałem i niech $x_1, \ldots, x_n$ będą zmiennymi. Dla dowolnych $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ wyrażenie algebraiczne $ax_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ nazywamy *jednomianem* o współczynniku $a \in K$. Jeżeli dodatkowo $a \neq 0$, to liczbę $k_1 + \ldots + k_n$ nazywamy *stopniem* jednomianu $ax_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$. Natomiast *wielomianem n-zmiennych* $x_1, \ldots, x_n$ nazywamy skończoną sumę jednomianów, przy czym *stopniem* takiego wielomianu nazywamy maksymalny stopień niezerowego jednomianu występującego w jego zapisie. Zbiór wszystkich wielomianów n-zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ nad ciałem K będziemy oznaczali przez $K[x_1, \ldots, x_n]$. Można wykazać, że $K[x_1, \ldots, x_n]$ z naturalnymi działaniami mnożenia i dodawania wielomianów oraz mnożeniem wielomianów przez skalar jest K-algebrą.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 4

Wektory i wartości własne

4.1 Wielomian charakterystyczny

Niech K będzie dowolnym ciałem. *Wielomianem charakterystycznym macierzy* $A \in M_n(K)$ nazywamy wyznacznik macierzy $A - x \cdot I_n$. Zatem jeżeli $A = [a_{ij}]$, to

$$\det(A - x \cdot I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

Oznaczmy $A - x \cdot I_n = B = [b_{ij}]$. Wtedy $b_{ij} \in K[x]$ oraz $st(b_{ii}) = 1$ i $st(b_{ij}) < 1$ dla $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Ponadto z określenia wyznacznika mamy, że

$$\det(A - x \cdot I_n) = \det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)}.$$

Wynika stąd, że $\det(A - x \cdot I_n) \in K[x]$. Ponadto $st(b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)}) =$ $= st(b_{1\sigma(1)}) + \ldots + st(b_{n\sigma(n)}) \leqslant n$ oraz

$$st(b_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot b_{n\sigma(n)}) = n \iff st(b_{i\sigma(i)}) = 1 \text{ dla każdego } i = 1, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$\iff \sigma(i) = i \text{ dla każdego } i = 1, \dots, n \iff \sigma = id.$$

Wynika stąd, że $\det(A - x \cdot I_n) = (a_{11} - x) \cdot (a_{22} - x) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - x) + G$ dla pewnego wielomianu $G \in K[x]$ takiego, że $st(G) < n$. Zatem $st(\det(A - x \cdot I_n)) = n$ oraz

$$\det(A - x \cdot I_n) = (-1)^n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \tag{4.2}$$

dla pewnych $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$. Podstawiając $x = 0$ uzyskamy dodatkowo, że $c_0 = \det(A)$.

Przykład 4.1. Wyznaczymy wielomian charakterystyczny W macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 24 & 12 \\ -18 & -23 & -12 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Mamy

$$W = \begin{vmatrix} 19-x & 24 & 12 \\ -18 & -23-x & -12 \\ 6 & 8 & 5-x \end{vmatrix} \overset{\substack{w_1+w_2 \\ w_2+3w_3}}{=} \begin{vmatrix} 1-x & 1-x & 0 \\ 0 & 1-x & 3-3x \\ 6 & 8 & 5-x \end{vmatrix} \overset{k_2-k_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 3-3x \\ 6 & 2 & 5-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 5-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 \cdot [(5-x) - 6] = -(x-1)^2 \cdot (x+1). \ \square$$

Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $f \colon V \to V$ będzie endomorfizmem liniowym przestrzeni V. Niech A będzie macierzą przekształcenia f w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Wówczas wielomian charakterystyczny macierzy A nazywamy *wielomianem charakterystycznym przekształcenia* f.

Twierdzenie 4.2. *Wielomian charakterystyczny endomorfizmu skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nie zależy od wyboru bazy uporządkowanej tej przestrzeni.*

Dowód. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ będą uporządkowanymi bazami przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Oznaczmy przez P macierz przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Weźmy dowolne $f \in L(V; V)$. Niech A będzie macierzą przekształcenia f w bazie

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i niech B będzie macierzą przekształcenia f w bazie $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. Wówczas, jak wiemy, $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Ponadto $B - x \cdot I_n = P^{-1} \cdot A \cdot P - x \cdot I_n = P^{-1} \cdot (A - x \cdot I_n) \cdot P$, więc z twierdzenia Cauchy'ego, $\det(B - x \cdot I_n) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - x \cdot I_n) \cdot \det(P) = \det(P^{-1} \cdot P) \cdot \det(A - x \cdot I_n) = \det(A - x \cdot I_n)$. $\square$

4.2 Wektory i wartości własne endomorfizmu liniowego

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $f \in L(V;V)$. Powiemy, że $a \in K$ jest *wartością własną* endomorfizmu f, jeżeli istnieje niezerowy wektor $\alpha \in V$ taki, że $f(\alpha) = a \circ \alpha$. Mówimy wówczas, że α jest *wektorem własnym* endomorfizmu f odpowiadającym wartości własnej a.

Uwaga 4.3. Wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym $a, b \in K$ endomorfizmu liniowego f są różne. Rzeczywiście, mamy, że $a \neq b$ oraz istnieją niezerowe wektory α i β takie, że $f(\alpha) = a \circ \alpha$ i $f(\beta) = b \circ \beta$. Gdyby $\alpha = \beta$, to $a \circ \alpha = b \circ \alpha$, czyli $(a - b) \circ \alpha = \theta$. Ale $\alpha \neq \theta$, więc $a - b = 0$, skąd $a = b$ i mamy sprzeczność.

Stwierdzenie 4.4. *Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą parami różnymi wektorami własnymi endomorfizmu f przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Jeżeli $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są odpowiadającymi im wektorami własnymi, to wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależne.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza wynika stąd, że $\alpha_1 \neq \theta$. Niech teraz n będzie taką liczbą naturalną, dla której teza zachodzi. Niech $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu f i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ będą odpowiadającymi im wektorami własnymi. Wówczas $f(\alpha_i) = a_i \circ \alpha_i$ dla $i = 1, \ldots, n+1$. Weźmy dowolne $c_1, \ldots, c_{n+1} \in K$ takie, że $c_1 \circ \alpha_1 + \ldots + c_n \circ \alpha_n + c_{n+1} \circ \alpha_{n+1} = \theta$. Wtedy $\theta = f(c_1 \circ \alpha_1 + \ldots + c_{n+1} \circ \alpha_{n+1}) = c_1 \circ f(\alpha_1) + \ldots + c_{n+1} \circ f(\alpha_{n+1}) = (c_1 a_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (c_n a_n) \circ \alpha_n + (c_{n+1} a_{n+1}) \circ \alpha_{n+1}$ oraz $(a_{n+1} c_1) \circ \alpha_1 + \ldots + (a_{n+1} c_n) \circ \alpha_n + (a_{n+1} c_{n+1}) \circ \alpha_{n+1} = \theta$. Stąd po odjęciu stronami tych równości uzyskamy, że $c_1(a_{n+1}-a_1)\circ\alpha_1+\ldots+c_n(a_{n+1}-a_n)\circ\alpha_n = \theta$. Zatem z założenia indukcyjnego $c_i(a_{n+1}-a_i)=0$, skąd $c_i=0$ dla $i=1,\ldots,n$, gdyż $a_{n+1}\neq a_i$ dla $i=1,\ldots,n$. Zatem $c_{n+1}\circ\alpha_{n+1}=\theta$, a stąd $c_{n+1}=0$, bo $\alpha_{n+1}\neq\theta$. Zatem $c_i=0$ dla $i=1,\ldots,n,n+1$ i wektory $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ są liniowo niezależne. □

Twierdzenie 4.5. *Niech f będzie endomorfizmem liniowym skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas $a\in K$ jest wartością własną endomorfizmu f wtedy i tylko wtedy, gdy a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego tego endomorfizmu.*

Dowód. Załóżmy, że a jest wartością własną endomorfizmu f. Wtedy istnieje niezerowy wektor $\alpha\in V$ taki, że $f(\alpha)=a\circ\alpha$. Niech $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni V i niech $A=[a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ będzie macierzą endomorfizmu f w tej bazie. Istnieją $a_1,\ldots,a_n\in K$ takie, że $\alpha=a_1\circ\alpha_1+\ldots+a_n\alpha_n$. Ponadto $f(\alpha)=b_1\circ\alpha_1+\ldots+b_n\circ\alpha_n$ dla pewnych $b_1,\ldots,b_n\in K$. Wtedy, jak wiemy, $\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$. Ale $f(\alpha)=a\circ\alpha=(aa_1)\circ\alpha_1+\ldots+(aa_n)\circ\alpha_n$, więc $A\cdot\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa_1\\ \vdots\\ aa_n\end{bmatrix}$, czyli $A\cdot\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=a\circ\begin{bmatrix} a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$. Zatem wektor $[a_1,\ldots,a_n]$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11}-a)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0\\
a_{21}x_1 & + & (a_{22}-a)x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & (a_{nn}-a)x_n & = & 0
\end{array}\right. . \tag{4.3}$$

Ponadto $[a_1,\ldots,a_n]\neq[0,\ldots,0]$, bo inaczej $\alpha=\theta$. Stąd z twierdzenia Cramera otrzymujemy, że $\det(A-aI_n)=0$, czyli a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego endomorfizmu f.

Na odwrót. Załóżmy, że a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego endomorfizmu f. Wtedy $\det(A-a\cdot I_n)=0$, skąd $r(A-a\cdot I_n)\neq n$. Istnieją zatem $a_1,\ldots,a_n\in K$ nie wszystkie rów-

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

ne 0 takie, że $a_1 \circ \begin{bmatrix} a_{11} - a \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \ldots + a_n \circ \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, a więc $[a_1, \ldots, a_n]$ jest niezerowym rozwiązaniem układu (4.3), skąd $(A - a \cdot I_n) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, a więc $A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Wtedy $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n \neq \theta$ oraz $f(\alpha) = b_1 \circ \alpha_1 + \ldots + b_n \circ \alpha_n$, gdzie $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \circ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$. Stąd $f(\alpha) = a \circ \alpha$, czyli a jest wartością własną endomorfizmu f i α jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej a. $\square$

Definicja 4.6. Wektorem własnym macierzy $A \in M_n(K)$ nazywamy wektor własny przekształcenia liniowego $f\colon K^n \to K^n$, które w bazie kanonicznej ma macierz A, tzn. $f([x_1, \ldots, x_n]) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Przykład 4.7. Znajdziemy wartości i wektory własne macierzy A z przykładu 4.1. Z obliczeń wykonanych w przykładzie 4.1 i z twierdzenia 4.5 wynika, że wartościami własnymi macierzy A są jedynie $a_1 = 1$ i $a_2 = -1$.

1. Wyznaczamy wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_1 = 1$. W tym celu rozwiązujemy układ (4.3):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 18x_1 & + & 24x_2 & + & 12x_3 & = & 0 \\ -18x_1 & - & 24x_2 & - & 12x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{\frac{1}{6}r_1,\ (-\frac{1}{6})r_2,\ \frac{1}{2}r_3}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. \equiv 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0.$$

Zatem $x_1 = 2t$, $x_2 = s$, $x_3 = -3t - 2s$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$. Ale wektory własne muszą być niezerowe, więc ostatecznie wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_1 = 1$ są postaci: $[2t, s, -3t - 2s]$, gdzie

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$t, s \in \mathbb{R}$ oraz $t \neq 0$ lub $s \neq 0$.

2. Wyznaczamy wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_2 = -1$. Układ (4.3) ma postać:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 20x_1 & + & 24x_2 & + & 12x_3 & = & 0 \\ -18x_1 & - & 22x_2 & - & 12x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{\frac{1}{4}r_1,\,(-\frac{1}{2})r_2,\,\frac{1}{2}r_3}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 9x_1 & + & 11x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{r_2-2r_1}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{(-1)r_2,\,r_1\leftrightarrow r_2}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{r_2-5r_1,\,r_3-3r_1}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right. \overset{r_1-r_2}{\equiv}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & - & 3x_3 & = 0 \\ & x_2 & + & 3x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$

Zatem $x_3 = t$, $x_1 = 3t$, $x_2 = -3t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Ale wektor własny musi być niezerowy, więc ostatecznie wszystkie wektory własne odpowiadające wartości własnej $a_2 = -1$ są postaci $[3t, -3t, t]$, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

Definicja 4.8. Powiemy, że ciało K jest algebraicznie domknięte, jeżeli każdy wielomian $f \in K[x]$ dodatniego stopnia posiada pierwiastek w ciele K.

Podstawowym przykładem ciała algebraicznie domkniętego jest ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Z twierdzenia 4.5 wynika zatem od razu następujący

Wniosek 4.9. *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem algebraicznie domkniętym K. Wówczas f posiada wartość własną i wektor własny.*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Z zasadniczego twierdzenia algebry można wyprowadzić, że każdy wielomian nieparzystego stopnia o współczynnikach rzeczywistych posiada pierwiastek rzeczywisty. Zatem z twierdzenia 4.5 mamy

Wniosek 4.10. *Niech f będzie endomorfizmem rzeczywistej przestrzeni liniowej V wymiaru nieparzystego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas f posiada wartość własną i wektor własny.*

Przykład 4.11. Pokażemy, że jeżeli ciało K nie jest algebraicznie domknięte, to pewna macierz kwadratowa nad K nie posiada wartości własnej. Najpierw zauważmy, że jeśli ciało K nie jest algebraicznie domknięte, to istnieją $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ takie, że wielomian $w = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0$ nie posiada pierwiastka w ciele K. Przez prostą indukcję można wykazać, że $(-1)^n \cdot w$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Zatem z twierdzenia 4.5, macierz A nie posiada wartości własnej. W szczególności macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ nie posiada rzeczywistej wartości własnej. □

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 5

Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

5.1 Podprzestrzenie niezmiennicze

Definicja 5.1. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Powiemy, że podprzestrzeń $V_1 \subseteq V$ przestrzeni V jest f-niezmiennicza, jeżeli $f(V_1) \subseteq V_1$ (czyli $f(\alpha) \in V_1$ dla każdego $\alpha \in V_1$).

Jeżeli V_1 jest podprzestrzenią f-niezmienniczą endomorfizmu f przestrzeni liniowej V, to $f_{|V_1}$ jest endomorfizmem przestrzeni V_1.

Przykład 5.2. Niech f i g będą endomorfizmami przestrzeni liniowej V nad ciałem K takimi, że $f \circ g = g \circ f$. Udowodnimy, że wówczas $Ker\, g$ jest podprzestrzenią f-niezmienniczą. Rzeczywiście, dla dowolnego $\alpha \in Ker(g)$ mamy, że $g(\alpha) = \theta$, więc $g(f(\alpha)) = (g \circ f)(\alpha) = (f \circ g)(\alpha) = f(g(\alpha)) = f(\theta) = \theta$, czyli $f(\alpha) \in Ker\, g$.

Niech $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ oraz niech $g = a_0 id_V + a_1 f + \ldots + a_n f^n$. Wtedy $f \circ g = g \circ f$, więc $Ker\,(a_0 id_V + a_1 f + \ldots + a_n f^n)$ jest podprzestrzenią f-niezmienniczą przestrzeni V. W szczególności $Ker\, f$ jest podprzestrzenią f-niezmienniczą przestrzeni V. $\square$

Przykład 5.3. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $a \in K$. Niech $W_a = \{\alpha \in V : f(\alpha) = a \circ \alpha\}$. Wtedy $W_a = Ker\,(f - a \cdot id_V)$, więc z przykładu 5.2, W_a jest podprzestrzenią f-niezmienniczą przestrzeni V. Zauważmy, że $W_a \neq \{\theta\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest wartością własną endomorfizmu f. Jeżeli a jest wartością własną endomorfizmu f, to podprzestrzeń W_a będziemy nazywali *podprzestrzenią niezmienniczą wektorów własnych endomorfizmu f odpowiadających wartości własnej a.* □

Przykład 5.4. Opiszemy wszystkie jednowymiarowe f-niezmiennicze podprzestrzenie przestrzeni liniowej V nad ciałem K dla ustalonego jej endomorfizmu f. Szukane podprzestrzenie są postaci $W = lin(\alpha)$ dla $\alpha \in V \setminus \{\theta\}$. Ale $\alpha \in W$, więc $f(\alpha) = a \circ \alpha$ dla pewnego $a \in K$. Ponieważ $\alpha \neq \theta$, więc a jest wartością własną endomorfizmu f, zaś α jest odpowiadającym jej wektorem własnym. Na odwrót, niech α będzie wektorem własnym endomorfizmu f. Wtedy $\alpha \neq \theta$, więc $W = lin(\alpha)$ jest podprzestrzenią wymiaru 1 przestrzeni V oraz istnieje $a \in K$ takie, że $f(\alpha) = a \circ \alpha$. Zatem dla $b \in K$ $f(b \circ \alpha) = b \circ f(\alpha) = b \circ (a \circ \alpha) = (ab) \circ \alpha \in W$. Stąd W jest podprzestrzenią f-niezmienniczą przestrzeni V. W ten sposób wykazaliśmy, że podprzestrzeń W przestrzeni V wymiaru 1 jest podprzestrzenią f-niezmienniczą wtedy i tylko wtedy, gdy W jest generowana przez pewien wektor własny tego endomorfizmu. □

Stwierdzenie 5.5. *Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu f przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $\alpha_i \in W_{a_i}$ dla $i = 1, \ldots, n$. Jeżeli $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = \theta$, to $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \theta$.*

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej n i niech $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu f i niech $\alpha_i \in W_{a_i}$ dla $i = 1, \ldots, n, n+1$ będą takie, że $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} = \theta$. Jeżeli $\alpha_i \neq \theta$ dla $i = 1, \ldots, n+1$, to α_i jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej a_i dla $i = 1, \ldots, n+1$. Zatem ze stwierdzenia 4.4, wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ są liniowo niezależne i mamy sprzeczność. Stąd $\alpha_k = \theta$ dla pewnego $k = 1, \ldots, n+1$ i wówczas z założenia indukcyjnego $\alpha_i = \theta$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{k\}$. Zatem $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n+1} = \theta$. □

Ze stwierdzenia 5.5 w prosty sposób można wyprowadzić następujący wniosek.

Wniosek 5.6. *Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu f przestrzeni liniowej V nad ciałem K i niech $X_i \subseteq W_{a_i}$ będzie zbiorem wektorów liniowo niezależnym dla $i = 1, \ldots, n$. Wtedy zbiory $X_1, \ldots, X_n$ są parami rozłączne oraz zbiór $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ jest liniowo niezależny.* □

5.2 Potęgowanie macierzy

Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K i załóżmy, że f posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Wtedy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą V oraz istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $f(\alpha_i) = a_i \circ \alpha_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Zatem macierzą endomorfizmu f w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest macierz diagonalna

$$D(a_1, \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Łatwo sprawdzić, że $D(b_1, \ldots, b_n) \cdot D(c_1, \ldots, c_n) = D(b_1c_1, \ldots, b_nc_n)$, skąd przez prostą indukcję uzyskujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej k

$$D(a_1, \ldots, a_n)^k = D(a_1^k, \ldots, a_n^k). \tag{5.2}$$

Niech teraz K będzie ciałem i $A \in M_n(K)$. Wtedy A jest macierzą endomorfizmu f przestrzeni K^n w bazie kanonicznej, przy czym $f([x_1, \ldots, x_n]) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Załóżmy, że macierz A ma n liniowo niezależnych wektorów własnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Wtedy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni K^n oraz istnieją $a_1, \ldots, a_n \in K$ takie, że $f(\alpha_i) = a_i \circ \alpha_i$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

dla $i = 1, \ldots, n$. Ponadto w tej bazie macierzą endomorfizmu f jest $D(a_1, \ldots, a_n)$.

Jeżeli $\alpha_i = [p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni}]$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $P = [p_{ij}] \in M_n(K)$ jest macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz $D(a_1, \ldots, a_n) = P^{-1} \cdot A \cdot P$, skąd $A = P \cdot D(a_1, \ldots, a_n) \cdot P^{-1}$. Zatem przez prostą indukcję uzyskamy stąd, że $A^k = P \cdot D(a_1, \ldots, a_n)^k \cdot P^{-1}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, czyli

$$A^k = P \cdot D(a_1^k, \ldots, a_n^k) \cdot P^{-1} \text{ dla wszystkich } k \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Przykład 5.7. Znajdziemy wzór na A^k dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Wyznaczamy najpierw wielomian charakterystyczny W macierzy A.

$$W = \begin{vmatrix} 4-x & 3 & -3 \\ 2 & 3-x & -2 \\ 4 & 4 & -3-x \end{vmatrix} \overset{\substack{k_2+k_3 \\ k_1+k_3}}{=} \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -3 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 1-x & 1-x & -3-x \end{vmatrix} \overset{w_3-w_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -3 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 1-x & 0 & -1-x \end{vmatrix} \overset{w_3-w_1}{=} \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -3 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$= (1-x)^2(2-x)$.

Zatem wartościami własnymi macierzy A są: $a = 1$ i $a = 2$.

Wyznaczamy bazę podprzestrzeni W_1 wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $a = 1$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}w_1,\ \frac{1}{2}w_2,\ \frac{1}{4}w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \equiv x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Zatem W_1 jest hiperpłaszczyzną o bazie $\{[1,0,1], [0,1,1]\}$.

Wyznaczamy bazę podprzestrzeni W_2 wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $a = 2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \overset{w_2-w_1,\ w_3-2w_1}{\equiv} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}w_1,\ (-\frac{1}{2})w_2}{\equiv}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$\equiv \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{w_1-\frac{3}{2}w_2}{\equiv} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$. Zatem $x_3 = 4t$, $x_1 = 3t$, $x_2 = 2t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ i bazą podprzestrzeni W_2 jest $\{[3,2,4]\}$.

Z wniosku 5.6 mamy zatem, że wektory $[1,0,1], [0,1,1], [3,2,4]$ są liniowo niezależne, a ponieważ $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, więc te wektory tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Macierzą przejścia od bazy kanonicznej do bazy $([1,0,1],[0,1,1],[3,2,4])$ jest $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Stąd dla $k \in \mathbb{N}$ mamy, że

$$A^k = P \cdot D(1,1,2^k) \cdot P^{-1}.$$

Macierz P^{-1} wyznaczymy przy pomocy operacji elementarnych.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3-w_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{w_3-w_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(-1)w_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\substack{w_1-3w_3 \\ w_2-2w_3}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right], \text{ czyli } P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stąd $P \cdot D(1,1,2^k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \cdot 2^k \\ 0 & 1 & 2^{k+1} \\ 1 & 1 & 4 \cdot 2^k \end{bmatrix}$.

Zatem ostatecznie

$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \cdot 2^k \\ 0 & 1 & 2^{k+1} \\ 1 & 1 & 4 \cdot 2^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, czyli

$$A^k = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^k - 2 & 3 \cdot 2^k - 3 & 3 - 3 \cdot 2^k \\ 2^{k+1} - 2 & 2^{k+1} - 1 & 2 - 2^{k+1} \\ 4 \cdot 2^k - 4 & 4 \cdot 2^k - 4 & 5 - 4 \cdot 2^k \end{bmatrix}. \ \square$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

5.3 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Niech K będzie ciałem. Wówczas zbiór $M_n(K[x])$ macierzy kwadratowych stopnia n o współczynnikach z algebry wielomianów $K[x]$ jest K-algebrą z naturalnymi działaniami na macierzach. Ponadto $M_n(K[x])$ jest tzw. podalgebrą macierzy kwadratowych stopnia n nad ciałem $K(x)$ funkcji wymiernych.

Lemat 5.8. *Niech $A_0, \ldots, A_k \in M_n(K)$. Jeżeli $A_0 + x \cdot A_1 + \ldots + x^k \cdot A_k = 0_n$, to $A_0 = A_1 = \ldots = A_k = 0_n$.*

Dowód. Dla dowolnych $i, j = 1, 2, \ldots, n$ mamy $0 = [A_0 + x \cdot A_1 + \ldots + x^k \cdot A_k]_{ij} = [A_0]_{ij} + [x \cdot A_1]_{ij} + \ldots + [x^k \cdot A_k]_{ij} = [A_0]_{ij} + [A_1]_{ij} x + \ldots + [A_k]_{ij} x^k$, więc $0 = [A_0]_{ij} = [A_1]_{ij} = \ldots = [A_k]_{ij}$. Zatem $A_0 = A_1 = \ldots = A_k = 0_n$. $\square$

Z lematu 5.8 wynika od razu następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 5.9. *Dla dowolnych macierzy $A_0, \ldots, A_k, B_0, \ldots, B_k \in M_n(K)$*

$$A_0 + x \cdot A_1 + \ldots + x^k \cdot A_k = B_0 + x \cdot B_1 + \ldots + x^k \cdot B_k \iff \forall_{0 \leqslant i \leqslant n}\ A_i = B_i. \square$$

Lemat 5.10. *Dla dowolnej macierzy $A(x) \in M_n(K[x])$ istnieje $k \in \mathbb{N}_0$ oraz istnieją macierze $A_0, A_1, \ldots, A_k \in M_n(K)$ takie, że*

$$A(x) = A_0 + x \cdot A_1 + \ldots + x^k \cdot A_k.$$

Dowód. Jeśli $A(x) = 0_n$, to wystarczy przyjąć $k = 0$ oraz $A_0 = 0_n$. Niech dalej $A(x) \neq 0_n$. Wtedy określamy $k = max\{st([A(x)]_{ij}) : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$. Zatem dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$ mamy, że $[A(x)]_{ij} = a_{0ij} + a_{1ij} x + \ldots + a_{kij} x^k$ dla pewnych $a_{lij} \in K$. Stąd

$$A = [a_{0ij}]_{i,j=1,\ldots,n} + x \cdot [a_{1ij}]_{i,j=1,\ldots,n} + \ldots + x^k \cdot [a_{kij}]_{i,j=1,\ldots,n}. \square$$

Twierdzenie 5.11 (Cayleya-Hamiltona). *Dla dowolnego ciała K każda macierz $A \in M_n(K)$ jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego tzn. jeśli $\det(A - x \cdot I_n) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, to $c_0 \cdot I_n + c_1 \cdot A + \ldots + c_n \cdot A^n = 0_n$.*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Dowód. Oznaczmy $B(x) = A - x \cdot I_n$. Niech $D(x)$ będzie macierzą dopełnień macierzy $B(x)$. Wtedy z algebry liniowej I wiemy, że

$$B(x) \cdot D(x)^T = D(x)^T \cdot B(x) = \det(B(x)) \cdot I_n = (c_0 + \ldots + c_n x^n) \cdot I_n. \tag{5.4}$$

Ponadto $max\{st([D(x)^T]_{ij}) : i, j = 1, 2, \ldots, n\} \leqslant n - 1$, więc z lematu 5.10, istnieją macierze $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \in M_n(K)$ takie, że

$$D(x)^T = A_0 + x \cdot A_1 + \ldots + x^{n-1} \cdot A_{n-1}. \tag{5.5}$$

Z (5.4) i (5.5) mamy, że

$$(A - x \cdot I_n) \cdot (A_0 + \ldots + x^{n-1} \cdot A_{n-1}) = (A_0 + \ldots + x^{n-1} \cdot A_{n-1}) \cdot (A - x \cdot I_n),$$

czyli $\sum_{i=0}^{n-1} A \cdot (x^i \cdot A_i) - \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+1} \cdot A_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x^i \cdot A_i) \cdot A - \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+1} \cdot A_i$, więc $\sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot (A \cdot A_i) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot (A_i \cdot A)$, skąd na mocy stwierdzenia 5.9

$$A \cdot A_i = A_i \cdot A \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{5.6}$$

Ponadto
$B(x) \cdot D(x)^T = (A - x \cdot I_n) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot A_i = A \cdot A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x^i \cdot (A \cdot A_i - A_{i-1}) - x^n \cdot A_{n-1}$.

Zatem z (5.4) i ze stwierdzenia 5.9 otrzymujemy, że

$$c_0 I_n = A \cdot A_0,\ c_i \cdot I_n = A \cdot A_i - A_{i-1}\ (i = 1, \ldots, n-1),\ c_n I_n = -A_{n-1}. \tag{5.7}$$

Stąd i z (5.6) mamy, że
$c_0 I_n + \ldots + c_n \cdot A^n = c_0 \cdot I_n + (c_1 \cdot I_n) \cdot A + \ldots + (c_n \cdot I_n) \cdot A^n = A \cdot A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (AA_i - A_{i-1})A^i - A_{n-1}A^n = A \cdot A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (A \cdot A_i \cdot A^i - A_{i-1} \cdot A^i) - A_{n-1} \cdot A^n = A_0 \cdot A + \sum_{i=1}^{n-1} (A_i \cdot A^{i+1} - A_{i-1} \cdot A^i) - A_{n-1} \cdot A^n = A_0 \cdot A + \sum_{i=1}^{n-1} A_i \cdot A^{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} A_{i-1} \cdot A^i - A_{n-1} \cdot A^n = A_0 \cdot A + A_1 \cdot A^2 + A_2 \cdot A^3 + \ldots +$

$+A_{n-1} \cdot A^n - (A_0 \cdot A + A_1 \cdot A^2 + A_2 \cdot A^3 + \ldots + A_{n-2} \cdot A^{n-1}) - A_{n-1} \cdot A^n = 0_n.$
$\square$

Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona i z twierdzenia 3.7 wynika od razu następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.12. *Każdy endomorfizm skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej jest pierwiastkiem swego wielomianu charakterystycznego.* $\square$

Definicja 5.13. Wielomiany $f \in K[x]$ postaci $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, gdzie $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ oraz $n \in \mathbb{N}_0$ nazywamy *wielomianami unormowanymi.*

Ze wzoru (4.2) i z twierdzenia 5.12 mamy natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 5.14. *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V nad ciałem K wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieje wielomian unormowany $w \in K[x]$ stopnia n, którego pierwiastkiem jest f.* $\square$

Rozdział 6

Macierze blokowe i klatki Jordana

6.1 Macierze blokowe a podprzestrzenie niezmiennicze

Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Niech $V_1, \ldots, V_s$ będą podprzestrzeniami f - niezmienniczymi przestrzeni V takimi, że $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$. Wówczas $f_{|V_i}$ jest endomorfizmem podprzestrzeni V_i dla $i = 1, \ldots, s$ oraz $Im\, f = Im\, f_{|V_1} \oplus \ldots \oplus Im\, f_{|V_s}$, skąd

$$\dim Im\, f = \dim Im\, f_{|V_1} + \ldots + \dim Im\, f_{|V_s}. \tag{6.1}$$

Ponadto $Ker\, f = Ker\, f_{|V_1} \oplus \ldots \oplus Ker\, f_{|V_s}$, więc

$$\dim Ker\, f = \dim Ker\, f_{|V_1} + \ldots + \dim Ker\, f_{|V_s}. \tag{6.2}$$

Niech dla $i = 1, \ldots, s$, $A_i \in M_{k_i}(K)$ będzie macierzą $f_{|V_i}$ w bazie $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik_i})$ podprzestrzeni V_i. Wówczas

$$(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k_1}, \ldots, \alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sk_s})$$

jest bazą przestrzeni V i macierzą endomorfizmu f w tej bazie jest macierz blokowa postaci

$$M(A_1, A_2, \ldots, A_s) = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{k_1\times k_2} & \ldots & 0_{k_1\times k_s} \\ 0_{k_2\times k_1} & A_2 & \ldots & 0_{k_2\times k_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{k_s\times k_1} & 0_{k_s\times k_2} & \ldots & A_s \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Na odwrót, jeśli macierz endomorfizmu f w pewnej bazie uporządkowanej $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k_1}, \ldots, \alpha_{s1}, \ldots, \alpha_{sk_s})$ przestrzeni V ma postać (6.3), to $V_i = lin(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ik_i})$ jest podprzestrzenią f-niezmienniczą przestrzeni V dla $i = 1, \ldots, s$ oraz $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$.

6.2 Własności macierzy blokowych

Ze wzoru (6.1) i z twierdzenia 1.9 uzyskujemy dla macierzy (6.3) wzór

$$r(M(A_1, A_2, \ldots, A_s)) = r(A_1) + \ldots + r(A_s). \tag{6.4}$$

Ponadto z określenia macierzy blokowej mamy wzory:

$$M(A_1, \ldots, A_s) - x \cdot I_n = M(A_1 - x \cdot I_{k_1}, \ldots, A_s - x \cdot I_{k_s}). \tag{6.5}$$

$$M(A_1, \ldots, A_s, A_{s+1}) = M(M(A_1, \ldots, A_s), A_{s+1}). \tag{6.6}$$

Uwaga 6.1. Z określenia mnożenia macierzy łatwo można uzasadnić, że jeśli $A_i, B_i \in M_{k_i}(K)$ dla $i = 1, 2$, to $M(A_1, A_2) \cdot M(B_1, B_2) = M(A_1 \cdot B_1, A_2 \cdot B_2)$. Stąd i ze wzoru (6.6) przez prostą indukcję dostajemy, że jeżeli $A_i, B_i \in M_{k_i}(K)$ dla $i = 1, \ldots, s$, to

$$M(A_1, \ldots, A_s) \cdot M(B_1, \ldots, B_s) = M(A_1 \cdot B_1, \ldots, A_s \cdot B_s). \tag{6.7}$$

Przez prostą indukcję otrzymamy stąd, że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$

$$M(A_1, \ldots, A_s)^m = M(A_1^m, \ldots, A_s^m). \tag{6.8}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Uwaga 6.2. Z własności wyznaczników można wyprowadzić, że $\det M(A_1, A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$. Stąd i ze wzoru (6.6) przez prostą indukcję uzyskujemy wzór

$$\det M(A_1, \dots, A_s) = \det A_1 \cdot \ldots \cdot \det A_s. \tag{6.9}$$

Uwaga 6.3. Ze wzorów (6.5) i (6.9) wynika od razu, że jeśli w_i jest wielomianem charakterystycznym macierzy $A_i \in M_{k_i}(K)$ dla $i = 1, \dots, s$, to $w_1 \cdot \ldots \cdot w_s$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy blokowej $M(A_1, \dots, A_s)$.

6.3 Klatki Jordana

Niech K będzie ciałem, $m \in \mathbb{N}$ oraz $a \in K$. Wówczas macierz

$$J(m,a) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \in M_m(K) \tag{6.10}$$

nazywamy *klatką Jordana* stopnia m wyznaczoną przez a.

Zatem

$$J(1,a) = [a],\ J(2,a) = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ J(3,a) = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ itd.}$$

Oczywiście wielomianem charakterystycznym macierzy $J(m,a)$ jest $(a-x)^m$. Własności klatek Jordana $J(m,0)$ odgrywają bardzo dużą rolę w prezentowanej teorii.

Lemat 6.4. *Dla $i = 1, \dots, m-1$ macierz $J(m,0)^i$ ma same jedynki na i-tej przekątnej nad główną przekątną i poza tym same zera. Ponadto $J(m,0)^m = 0_m$ oraz $r(J(m,0)^i) = m - i$ dla $i = 0, 1, \dots, m$.*

Dowód. $J(m,0)$ jest macierzą w bazie kanonicznej endomorfizmu f przestrzeni K^m danego wzorem

$$f([x_1, x_2, \dots, x_m]) = [x_2, x_3, \dots, x_m, 0]. \tag{6.11}$$

Przez prostą indukcję względem i uzyskujemy stąd, że $f^i([x_1, x_2, \ldots, x_m]) = [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0]$ dla $i = 1, 2, \ldots, m-1$ oraz $f^m = \Theta$. Stąd dla $i = 1, \ldots, m-1$ macierz f^i w bazie kanonicznej ma same jedynki na i-tej przekątnej nad główną przekątną i poza tym same zera. Ponadto z uwagi 3.13, dla $i = 1, \ldots, m$ macierzą f^i w bazie kanonicznej jest $J(m, 0)^i$, co dowodzi pierwszej części lematu. Natomiast druga część wynika stąd, że na mocy twierdzenia 1.9, $r(J(m, 0)^i) = \dim Im\, f^i = m - i$ dla $i = 1, \ldots, m$ oraz $J(m, 0)^0 = I_m$. □

Lemat 6.5. *Dla dowolnych liczb naturalnych* m, k:

$$r(J(m,0)^{k-1}) - 2r(J(m,0)^k) + r(J(m,0)^{k+1}) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli} \quad k \neq m \\ 1, & \text{jeśli} \quad k = m \end{cases}.$$

Dowód. Jeżeli $k \leqslant m - 1$, to z lematu 6.4 mamy

$$r(J(m,0)^{k-1}) - 2r(J(m,0)^k) + r(J(m,0)^{k+1}) =$$
$$= [m - (k-1)] - 2(m-k) + [m - (k+1)] = 0.$$

Jeżeli $k = m$, to z lematu 6.4 $r(J(m,0)^{k-1}) = m - (m-1) = 1$ oraz $J(m,0)^k = J(m,0)^{k+1} = 0_m$, więc

$$r(J(m,0)^{k-1}) - 2r(J(m,0)^k) + r(J(m,0)^{k+1}) = 1 - 2 \cdot 0 + 0 = 1.$$

W końcu dla $k \geqslant m + 1$ z lematu 6.4 wynika, że $J(m,0)^{k-1} = J(m,0)^k = J(m,0)^{k+1} = 0_m$, zatem

$$r(J(m,0)^{k-1}) - 2r(J(m,0)^k) + r(J(m,0)^{k+1}) = 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0. \ \square$$

Lemat 6.6. *Dla dowolnej liczby naturalnej* m *zachodzi równość:*

$$J(k,a)^m = \begin{bmatrix} a^m & \binom{m}{1}a^{m-1} & \binom{m}{2}a^{m-2} & \binom{m}{3}a^{m-3} & \ldots & \binom{m}{k-1}a^{m-k+1} \\ 0 & a^m & \binom{m}{1}a^{m-1} & \binom{m}{2}a^{m-2} & \ldots & \binom{m}{k-2}a^{m-k+2} \\ 0 & 0 & a^m & \binom{m}{1}a^{m-1} & \ldots & \binom{m}{k-3}a^{m-k+3} \\ 0 & 0 & 0 & a^m & \ldots & \binom{m}{k-4}a^{m-k+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a^m \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

gdzie $\binom{m}{i} = 0$ *dla wszystkich* $i > m$. *W szczególności:*

$$J(2,a)^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} \\ 0 & a^m \end{bmatrix},\ J(3,a)^m = \begin{bmatrix} a^m & ma^{m-1} & \binom{m}{2}a^{m-2} \\ 0 & a^m & ma^{m-1} \\ 0 & 0 & a^m \end{bmatrix}.$$

Dowód. Mamy $J(k,a) = aI_k + J(k,0)$ oraz macierze aI_k i $J(k,0)$ są przemienne. Zatem ze wzoru Newtona $J(k,a)^m = (aI_k + J(k,0))^m =$ $= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (aI_k)^{m-i} J(k,0)^i = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} a^{m-i} J(k,0)^i$. Ponadto $J(k,0)^0 = I_k$, i z lematu 6.4, $J(k,0)^i = 0_k$ dla $i \geqslant k$ oraz macierz $J(k,0)^i$ dla $i = 1,\ldots,m-1$ ma same jedynki na i-tej przekątnej nad główną przekątną i poza tym same zera, co kończy dowód wzoru (6.12). □

Lemat 6.7. *Niech* $\kappa = (k_1, k_2, \ldots, k_t)$ *będzie nierosnącym ciągiem liczb naturalnych (tzn.* $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_t$*) i niech*

$$J(\kappa; a) = M(J(k_1,a), J(k_2,a), \ldots, J(k_t,a)). \tag{6.13}$$

Wówczas dla każdego $k \in \{k_1, \ldots, k_t\}$ *liczba klatek Jordana wymiaru* k *w macierzy* $J(\kappa;a)$ *wynosi* $r(J(\kappa;0)^{k-1}) - 2r(J(\kappa;0)^k) + r(J(\kappa;0)^{k+1})$. *Ponadto dla* $b \neq 0$ *i* $k \in \mathbb{N}$

$$r(J(\kappa;b)^{k-1}) - 2r(J(\kappa;b)^k) + r(J(\kappa;b)^{k+1}) = 0$$

oraz dla $n = k_1 + \ldots + k_t$ *zachodzi równość:* $t = n - r(J(\kappa;a) - a \cdot I_n)$.

Dowód. Pierwsza część lematu wynika od razu z (6.4), (6.8) i z lematu 6.5. Natomiast druga część wynika stąd, że dla $b \neq 0$, $\det J(\kappa;b) = b^{k_1+\ldots+k_t} \neq 0$, więc macierz $J(\kappa;b)^i$ jest odwracalna dla każdego $i \in \mathbb{N}$, skąd $r(J(\kappa;b)^i) = k_1 + \ldots + k_t$ dla $i \in \mathbb{N}_0$. Zatem $r(J(\kappa;b)^{k-1}) - 2r(J(\kappa;b)^k) + r(J(\kappa;b)^{k+1}) = 0$. W końcu na mocy wzorów (6.4) i (6.5) oraz lematu 6.4

$$n - r(J(\kappa;a) - a\cdot I_n) = k_1 + \ldots + k_t - r(J(k_1,0)) + \ldots + r(J(k_t,0)) =$$

$$= (k_1 - r(J(k_1,0))) + \ldots + (k_t - r(J(k_t,0))) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{t} = t. \ \square$$

Lemat 6.8. *Niech $a_1, \ldots, a_r$ będą parami różnymi elementami ciała K i niech $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ będą nierosnącymi ciągami skończonymi liczb naturalnych takimi, że suma wyrazów ciągu κ_i jest równa m_i dla $i = 1, \ldots, r$. Niech $n = m_1 + \ldots + m_r$ oraz $A = M(J(\kappa_1; a_1), \ldots, J(\kappa_r; a_r))$. Dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $i = 1, \ldots, r$ liczba klatek Jordana $J(k, a_i)$ w macierzy A jest dana wzorem*

$$N(k, a_i) = r((A - a_i I_n)^{k-1}) - 2r((A - a_i I_n)^k) + r((A - a_i I_n)^{k+1}). \quad (6.14)$$

Ponadto $(a_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (a_r - x)^{m_r}$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A oraz dla $i = 1, \ldots, r$ liczba wszystkich klatek Jordana wyznaczonych przez a_i w macierzy A wynosi $n - r(A - a_i \cdot I_n)$.

Dowód. Ze wzorów (6.4), (6.5) i (6.8) oraz z lematu 6.7 mamy, że

$$r((A - a_i I_n)^{k-1}) - 2r((A - a_i I_n)^k) + r((A - a_i I_n)^{k+1}) =$$

$$= r((J(\kappa_i; a_i) - a_i I_{m_i})^{k-1}) - 2r((J(\kappa_i; a_i) - a_i I_{m_i})^k) +$$

$$+ r((J(\kappa_i; a_i) - a_i I_n)^{k+1}) = r(J(\kappa_i; 0)^{k-1}) - 2r(J(\kappa_i; 0)^k) + r(J(\kappa_i; 0)^{k+1}),$$

a więc na mocy lematu 6.7, ta liczba jest równa $N(k, a_i)$. Ponieważ macierz $A - x \cdot I_n$ jest trójkątna górna, więc jej wyznacznik wynosi $(a_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (a_r - x)^{m_r}$, a to oznacza, że wielomian charakterystyczny macierzy A jest równy $(a_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (a_r - x)^{m_r}$. W końcu ze wzorów (6.4) i (6.5) mamy, że $n - r(A - a_i \cdot I_n) = \sum_{j=1}^{r} [m_j - r(J(\kappa_j; a_j - a_i))]$. Ale dla wszystkich $j \neq i$ macierz $J(\kappa_j; a_j - a_i)$ ma wyznacznik równy $(a_j - a_i)^{m_j} \neq 0$, więc $m_j - r(J(\kappa_j; a_j - a_i)) = 0$ dla $j \neq i$. Zatem $n - r(A - a_i \cdot I_n) = m_i - r(J(\kappa_i; 0))$, czyli na mocy lematu 6.7, $n - r(A - a_i \cdot I_n)$ jest liczbą wszystkich wyznaczonych przez a_i klatek Jordana w macierzy A. $\square$

Twierdzenie 6.9. *Niech $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ oraz $\kappa'_1, \ldots, \kappa'_s$ będą nierosnącymi ciągami skończonymi liczb naturalnych. Niech $a_1, \ldots, a_r$ będą parami różnymi elementami ciała K oraz niech $a'_1, \ldots, a'_s$ będą parami różnymi elementami ciała K. Jeżeli macierze blokowe $M(J(\kappa_1, a_1), \ldots, J(\kappa_r, a_r))$ i $M(J(\kappa'_1, a'_1), \ldots, J(\kappa'_s, a'_s))$ są podobne, to*

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$r = s$ oraz po ewentualnej permutacji indeksów $a_i = a'_i$ oraz $\kappa_i = \kappa'_i$ dla każdego $i = 1, \ldots, r$.

Dowód. Oznaczmy dla wygody $A = M(J(\kappa_1, a_1), \ldots, J(\kappa_r, a_r))$ i $A' = M(J(\kappa'_1, a'_1), \ldots, J(\kappa'_s, a'_s))$. Z założenia wynika, że macierze A i A' mają ten sam stopień n i istnieje odwracalna macierz $P \in M_n(K)$ taka, że $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Niech m_i będzie sumą wszystkich wyrazów ciągu κ_i dla $i = 1, \ldots, r$ i niech m'_j będzie sumą wszystkich wyrazów ciągu κ'_j dla $j = 1, \ldots, s$. Z uwagi 2.12 i z twierdzenia 4.2 wynika, że macierze A i A' mają identyczne wielomiany charakterystyczne. Zatem z lematu 6.8, $(a_1 - x)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (a_r - x)^{m_r} = (a'_1 - x)^{m'_1} \cdot \ldots \cdot (a'_s - x)^{m'_s}$ i z przyjętych założeń $r = s$ oraz $\{a_1, \ldots, a_r\} = \{a'_1, \ldots, a'_r\}$. Stąd możemy bez zmniejszania ogólności rozważań zakładać, że $a_i = a'_i$ oraz $m_i = m'_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, r$. Ponadto dla $i = 1, \ldots, r$, $A' - a_i \cdot I_n = P^{-1} \cdot (A - a_i \cdot I_n) \cdot P$, więc dla wszystkich $k \in \mathbb{N}_0$ $(A' - a_i \cdot I_n)^k = P^{-1} \cdot (A - a_i \cdot I_n)^k \cdot P$, skąd na mocy wniosku 2.13, $r((A' - a_i \cdot I_n)^k) = r((A - a_i \cdot I_n)^k)$. Zatem z lematu 6.8 dla każdego $i = 1, \ldots, r$ i dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ macierze A i A' mają tyle samo klatek Jordana $J(k, a_i)$, a to oznacza, że $\kappa_i = \kappa'_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, r$. $\square$

Uwaga 6.10. Jeżeli w macierzy A z lematu 6.8 dokonamy jakiejkolwiek permutacji klatek Jordana, to otrzymamy macierz podobną do macierzy A, gdyż permutacji klatek Jordana odpowiada permutacja baz odpowiadających im podprzestrzeni niezmienniczych oraz na mocy uwagi 2.12 macierze tego samego endomorfizmu w różnych bazach są podobne.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 7

Twierdzenie Jordana

7.1 Sformułowanie twierdzenia Jordana

Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Załóżmy, że wielomian charakterystyczny w endomorfizmu f rozkłada się na czynniki liniowe nad ciałem K, tzn.

$$w = (-1)^n \cdot (x - a_1)^{m_1} \cdot (x - a_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{m_r}, \tag{7.1}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_r$ są parami różnymi elementami ciała K, zaś $m_1, \ldots, m_r$ są pewnymi liczbami naturalnymi. Wówczas zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1 (Jordana). *Istnieje baza przestrzeni liniowej V oraz istnieją nierosnące ciągi skończone liczb naturalnych $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ takie, że suma wyrazów ciągu κ_i jest równa m_i dla każdego $i = 1, \ldots, r$ oraz $M(J(\kappa_1; a_1), \ldots, J(\kappa_r; a_r))$ jest macierzą f w tej bazie. Ponadto dla każdego $i = 1, \ldots, r$ ciąg κ_i ma dokładnie $\dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)$ wyrazów oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$ liczba wystąpień liczby k w ciągu κ_i jest równa*

$$N(k, a_i) = 2 \dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)^k - (\dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)^{k-1} +$$

$$+ \dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)^{k+1}).$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

W szczególności ciągi $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ *są wyznaczone jednoznacznie przez endomorfizm* f.

Uwaga 7.2. Bazę występującą w sformułowaniu twierdzenia Jordana nazywamy *bazą Jordana*, zaś macierz endomorfizmu f w tej bazie nazywamy *macierzą Jordana* tego endomorfizmu.

Dowód istnienia bazy Jordana przedstawimy w następnym rozdziale. Natomiast udowodnienie własności ciągów $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ podanych w twierdzeniu Jordana w oparciu o istnienie bazy Jordana nie przedstawia problemu. Mianowicie, jeśli A jest macierzą Jordana endomorfizmu f, to z lematu 6.8 wynika, że $A = M(J(\kappa'_1; a_1), \ldots, J(\kappa'_r; a_r))$ dla pewnych niemalejących skończonych ciągów $\kappa'_1, \ldots, \kappa'_r$ liczb naturalnych, i na mocy uwagi 2.12, macierze A oraz $M(J(\kappa_1; a_1), \ldots, J(\kappa_r; a_r))$ są podobne. Zatem z twierdzenia 6.9 $\kappa_i = \kappa'_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, r$. Ponadto z lematu 6.8, dla wszystkich $i = 1, \ldots, r$, ciąg κ_i ma dokładnie $n - r(A - a_i \cdot I_n)$ wyrazów. Ale z algebry liniowej I $n = \dim Im\,(f - a_i \cdot I_n) + \dim Ker\,(f - a_i \cdot I_n)$ oraz z twierdzenia 1.9 i uwagi 3.13 mamy, że $\dim Im\,(f - a_i \cdot I_n) = r(A - a_i \cdot I_n)$, więc κ_i ma dokładnie $\dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)$ wyrazów. Podobnie uzasadnia się, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ liczba wystąpień liczby k w ciągu κ_i jest równa $N(k, a_i) = 2 \dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)^k - (\dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)^{k-1} + \dim Ker\,(f - a_i \cdot id_V)^{k+1})$.

7.2 Konsekwencje twierdzenia Jordana

Wniosek 7.3. *Załóżmy, że wielomian charakterystyczny endomorfizmu* f *przestrzeni liniowej* V *nad ciałem* K *wymiaru* $n \in \mathbb{N}$ *rozkłada się nad* K *na czynniki liniowe. Niech* B *będzie macierzą* f *w pewnej bazie przestrzeni* V. *Wówczas dla każdej wartości własnej* a *endomorfizmu* f *liczba wszystkich klatek Jordana wyznaczonych przez* a *w macierzy Jordana dla* f *jest równa* $n - r(B - a \cdot I_n)$ *oraz dla każdego* $k \in \mathbb{N}$ *liczba* $N(k, a)$ *klatek Jordana* $J(k, a)$ *w macierzy Jordana endomorfizmu* f *wyraża się wzorem*

$$N(k, a) = r((B - aI_n)^{k-1}) - 2r((B - aI_n)^k) + r((B - aI_n)^{k+1}).$$

Dowód. Niech $A = M(J(\kappa_1, a_1), \ldots, J(\kappa_r, a_r))$ będzie macierzą Jordana endomorfizmu f. Wtedy, z wniosku 2.9, istnieje odwracalna macierz $P \in M_n(K)$ taka, że $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Stąd $B - a \cdot I_n = P^{-1} \cdot (A - a \cdot I_n) \cdot P$, więc dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$, $(B - a \cdot I_n)^k = P^{-1} \cdot (A - a \cdot I_n)^k \cdot P$. Zatem, z wniosku 2.13, $r((B - a \cdot I_n)^k) = r((A - a \cdot I_n)^k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}_0$. Na mocy lematu 6.8 i twierdzenia Jordana kończy to dowód naszego wniosku. □

Przykład 7.4. W oparciu o twierdzenie Jordana znajdziemy macierz Jordana endomorfizmu f przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ posiadającego w bazie kanonicznej macierz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. W tym celu wyznaczamy najpierw wielomian charakterystyczny w_f tego endomorfizmu:

$$w_f = \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ -2 & 1-x & -2 \\ 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} \overset{w_1 - w_3}{=} \begin{vmatrix} 3-x & 0 & x-3 \\ -2 & 1-x & -2 \\ 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} \overset{k_3 + k_1}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ -2 & 1-x & -4 \\ 1 & 1 & 5-x \end{vmatrix} = (3-x) \cdot \begin{vmatrix} 1-x & -4 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix} =$$

$= (3-x) \cdot (5 - 6x + x^2 + 4) = -(x-3)^3$. Wtedy $A - 3 \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, skąd $r(A - 3 \cdot I_3) = 1$. Zatem, z wniosku 7.3, liczba wszystkich klatek $J(k, 3)$ jest równa $\dim \mathbb{R}^3 - r(A - 3 \cdot I_3) = 3 - 1 = 2$. Wynika stąd, że macierzą Jordana endomorfizmu f jest $J((2,1); 3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. □

Definicja 7.5. Niech $A \in M_n(K)$. Jeżeli macierz A jest podobna do macierzy $J(A)$ występującej w sformułowaniu twierdzenia Jordana, to mówimy, że $J(A)$ jest *postacią Jordana macierzy A*.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Przykład 7.6. Znajdziemy postać Jordana macierzy $A = J(m, a)^2$ dla $a \neq 0$ i ciała K, w którym $1 + 1 \neq 0$. Z lematu 6.6 uzyskujemy, że

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^2 \end{bmatrix},$$

więc wielomianem charakterystycznym A jest $w = (a^2 - x)^m$ oraz $r(A - a^2 \cdot I_m) = m - 1$, gdyż $2a = a \cdot (1 + 1) \neq 0$, bo $a \neq 0$ i $1 + 1 \neq 0$. Z wniosku 7.3 wynika, że w macierzy $J(A)$ jest dokładnie $m - (m - 1) = 1$ klatka $J(k, a^2)$. Zatem $J(A) = J(m, a^2)$. $\square$

Uwaga 7.7. Z twierdzenia Jordana i z uwagi 6.10 wynika, że postać Jordana $J(A)$ macierzy kwadratowej A jest wyznaczona jednoznacznie przez A z dokładnością do porządku klatek Jordana. Natomiast twierdzenie Jordana oraz twierdzenie 6.9 i stwierdzenie 2.11 podają warunki konieczne i wystarczające na to aby były podobne macierze $A, B \in M_n(K)$, z których co najmniej jedna ma postać Jordana.

Przykład 7.8. Sprawdzimy, czy macierze $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -2 & 16 & 12 \\ 4 & -28 & -20 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ są podobne. Prosty rachunek pokazuje, że $r(A) = r(B) = 2$ oraz macierze te mają taki sam wielomian charakterystyczny $w = -x \cdot (x+2)^2$. Znajdziemy postać Jordana macierzy A. Mamy tutaj $r = 2$ oraz $a_1 = 0$, $a_2 = -2$ oraz $m_1 = 1$ i $m_2 = 2$. Ponieważ $A - (-2) \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, więc $r(A - (-2) \cdot I_3) = 1$ i z wniosku 7.3 w macierzy $J(A)$ są dokładnie $3 - 1 = 2$ klatki $J(k, -2)$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Stąd $J(A) = M(J(1,0), J((1,1);-2)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Podobnie, $B-(-2)\cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -2 & 18 & 12 \\ 4 & -28 & -18 \end{bmatrix}$, skąd po prostych rachunkach $r(B-(-2)\cdot I_3) = 2$ i z wniosku 7.3 w macierzy $J(B)$ jest dokładnie $3-2=1$ klatka $J(k,-2)$. Stąd $J(B) = M(J(1,0), J(2,-2)) =$ $= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Zatem macierze A i B nie są podobne. $\square$

Łatwo wykazać, że jeśli K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to każdy wielomian $f \in K[x]$ dodatniego stopnia rozkłada się na czynniki liniowe w $K[x]$. Z tego powodu z twierdzenia Jordana mamy natychmiast następujące

Twierdzenie 7.9. *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem algebraicznie domkniętym K. Wówczas istnieje baza Jordana tej przestrzeni, w której macierz przekształcenia f jest macierzą Jordana.*

Na mocy zasadniczego twierdzenia algebry ciało $\mathbb{C}$ jest algebraicznie domknięte, więc z twierdzenia 7.9 mamy następujące

Twierdzenie 7.10. *Niech f będzie endomorfizmem zespolonej przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas istnieje baza Jordana tej przestrzeni, w której macierz przekształcenia f jest macierzą Jordana.*

7.3 Podprzestrzenie cykliczne

Definicja 7.11. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. *Podprzestrzenią cykliczną o generatorze $\alpha \in V$* nazywamy podprzestrzeń $lin(\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \ldots)$, t.j. najmniejszą podprzestrzeń f-niezmienniczą zawierającą wektor α.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Lemat 7.12. *Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Niech $\alpha \in V$ i niech $r \in \mathbb{N}$ będą takie, że $f^r(\alpha) = \theta$ i $f^{r-1}(\alpha) \neq \theta$. Wówczas*

(i) wektory $\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{r-1}(\alpha)$ są liniowo niezależne,

(ii) $W = lin(\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{r-1}(\alpha))$ jest podprzestrzenią f - niezmienniczą wymiaru r przestrzeni V,

(iii) macierzą $f_{|W}$ w bazie $(f^{r-1}(\alpha), \ldots, f(\alpha), \alpha)$ jest $J(r, 0)$,

(iv) dla każdego naturalnego $k \leqslant r$ i dla każdego $i = 0, 1, \ldots, r$ $W \cap Kerf^{k-i} \subseteq f^i(W)$.

Dowód. (i) Indukcja względem r. Dla $r = 1$, $f(\alpha) = \theta$ i $f^{r-1} = f^0 = id_V$, skąd $\theta \neq f^{r-1}(\alpha) = id_V(\alpha) = \alpha$, więc wektor α jest liniowo niezależny. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej r i niech $f^{r+1}(\alpha) = \theta$ i $f^r(\alpha) \neq \theta$. Weźmy dowolne $a_0, a_1, \ldots, a_r \in K$ takie, że $a_0 \circ \alpha + a_1 \circ f(\alpha) + \ldots + a_r \circ f^r(\alpha) = \theta$. Wtedy z tej równości uzyskamy, że $a_0 \circ f^r(\alpha) = \theta$. Ale $f^r(\alpha) \neq \theta$, więc $a_0 = 0$ oraz $a_1 \circ f(\alpha) + \ldots + a_r \circ f^r(\alpha) = \theta$. Niech $\beta = f(\alpha)$. Wtedy $f^{r-1}(\beta) = f^r(\alpha) \neq \theta$ i $f^r(\beta) = f^{r+1}(\alpha) = \theta$, więc z założenia indukcyjnego wektory $\beta, f(\beta), \ldots, f^{r-1}(\beta)$ są liniowo niezależne. Ale $a_1 \circ \beta + \ldots + a_r \circ f^{r-1}(\beta) = \theta$, więc $a_1 = \ldots = a_r = 0$. Stąd $a_0 = a_1 = \ldots = a_r = 0$ i wektory $\alpha, f(\alpha), \ldots, f^r(\alpha)$ są liniowo niezależne.

(ii) Z (i) wynika, że wektory $\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{r-1}(\alpha)$ tworzą bazę podprzestrzeni W, skąd $\dim W = r$. Niech $\beta \in W$. Wtedy istnieją $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1} \in K$ takie, że $\beta = a_0 \circ \alpha + a_1 \circ f(\alpha) + \ldots + a_{r-1} \circ f^{r-1}(\alpha)$. Ale $f^r(\alpha) = \theta$, więc $f(\beta) = a_0 \circ f(\alpha) + a_1 \circ f^2(\alpha) + \ldots + a_{r-2} \circ f^{r-1}(\alpha) \in W$. Zatem W jest podprzestrzenią f-niezmienniczą.

(iii) Dla $i = 1, \ldots, r$, i-tym wektorem bazy uporządkowanej $(f^{r-1}(\alpha), \ldots, f(\alpha), \alpha)$ jest $f^{r-i}(\alpha)$. Zatem dla $i = 2, \ldots, r$, $f(f^{r-i}(\alpha)) = f^{r-(i-1)}(\alpha)$ jest $(i-1)$-szym wektorem tej bazy oraz $f(f^{r-1}(\alpha)) = f^r(\alpha) = \theta$. Stąd macierzą $f_{|W}$ w bazie $(f^{r-1}(\alpha), \ldots, f(\alpha), \alpha)$ jest $J(r, 0)$.

(iv) Ponieważ $k \leqslant r$, więc wystarczy wykazać, że $W \cap Kerf^{r-j} \subseteq f^j(W)$ dla wszystkich $j = 0, 1, \ldots, r$. Dla $j = 0$ teza zachodzi, bo $\alpha \in Kerf^r$ i wobec tego $W \subseteq Kerf^r$, skąd $W \cap Kerf^r = W \subseteq id_V(W) = f^0(W)$. Niech dalej $j > 0$. Weźmy dowolne $\beta \in$

$\in W \cap Kerf^{r-j}$. Wtedy $\beta = a_0 \circ \alpha + a_1 \circ f(\alpha) + \ldots + a_{j-1} \circ f^{j-1}(\alpha) + + a_j \circ f^j(\alpha) + \ldots + a_{r-1} \circ f^{r-1}(\alpha)$ dla pewnych $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1} \in K$ oraz $\theta = f^{r-j}(\beta) = a_0 \circ f^{r-j}(\alpha) + a_1 \circ f^{r+1-j}(\alpha) + \ldots + a_{j-1} \circ f^{r-1}(\alpha)$. Zatem z (i) $a_0 = a_1 = \ldots = a_{j-1} = 0$ i wobec tego $\beta \in f^j(W)$. □

Definicja 7.13. Mówimy, że endomorfizm f przestrzeni liniowej V jest *nilpotentny*, jeżeli istnieje liczba naturalna s taka, że $f^s = \Theta$. Najmniejszą liczbę naturalną s taką, że $f^s = \Theta$ nazywamy wówczas *stopniem nilpotentności* f.

Uwaga 7.14. Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona wynika, że jeżeli wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f przestrzeni liniowej V wymiaru n nad ciałem K jest $(-1)^n \cdot x^n$, to f jest endomorfizmem nilpotentnym stopnia $s \leqslant n$. Na odwrót, niech f będzie endomorfizmem nilpotentnym stopnia nilpotentności s. Wtedy $f^{s-1} \neq \Theta$, więc istnieje $\alpha \in V$ takie, że $f^{s-1}(\alpha) \neq \theta$. Ponadto $f^s = \Theta$, więc $f^s(\alpha) = \theta$. Zatem, z lematu 7.12, wektory $\alpha, f(\alpha), \ldots, f^{s-1}(\alpha)$ są liniowo niezależne i $\dim V = n$, więc $s \leqslant n$, czyli $f^n = \Theta$.

Lemat 7.15. *Niech f będzie nilpotentnym endomorfizmem stopnia s przestrzeni liniowej V. Jeżeli W jest podprzestrzenią przestrzeni V taką, że $Kerf^i \subseteq Kerf^{i-1} + W$ dla każdego $i = 1, \ldots, s$, to $W = V$.*

Dowód. Mamy, że $Kerf \subseteq Kerf^0 + W = Ker\, id_V + W = \{\theta\} + + W = W$, więc $Kerf \subseteq W$. Załóżmy, że dla pewnego $j \leqslant s - 1$, $Kerf^j \subseteq W$. Wtedy $Kerf^{j+1} \subseteq Kerf^j + W \subseteq W + W \subseteq W$, czyli $Kerf^{j+1} \subseteq W$. Stąd przez indukcję $Kerf^i \subseteq W$ dla $i = 1, \ldots, s$. W szczególności $V = Kerf^s \subseteq W$. Ale $W \subseteq V$, więc $W = V$. □

Rozdział 8

Dowód twierdzenia Jordana

8.1 Algorytm znajdowania bazy Jordana dla endomorfizmu nilpotentnego

Niech f będzie nilpotentnym endomorfizmem stopnia s przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Oto algorytm znajdowania bazy Jordana endomorfizmu f:

Początek:
znajdź $\alpha \in V \setminus Kerf^{s-1}$
$\mathcal{B} := (f^{s-1}(\alpha), \ldots, f(\alpha), \alpha)$
$W := lin(\mathcal{B})$

Dopóki $\dim W < n$ wykonuj:
znajdź największe $t \leqslant s$ takie, że $Kerf^t \not\subseteq Kerf^{t-1} + W$
znajdź $\alpha \in Kerf^t \setminus (Kerf^{t-1} + W)$
jeśli $\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, to
$\mathcal{B} := (\beta_1, \ldots, \beta_k, f^{t-1}(\alpha), \ldots, f(\alpha), \alpha)$
$W := lin(\mathcal{B})$

Wypisz
$\mathcal{B}$

Zanim przedstawimy dowód poprawności tego algorytmu zilustrujemy jego działanie na przykładzie. Wcześniej jednak zrobimy ogólną uwagę mającą wiele praktycznych zastosowań.

Uwaga 8.1. Niech g będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K i niech $h = g - a \cdot id_V$ dla pewnego $a \in K$. Wówczas podprzestrzeń W przestrzeni V jest g-niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy W jest h-niezmiennicza. Ponadto, jeżeli A i B są macierzami endomorfizmów g i h odpowiednio w pewnej bazie przestrzeni V, to $A = B + a \cdot I_n$.

Przykład 8.2. Znajdziemy bazę Jordana endomorfizmu f z przykładu 7.4. Wiemy już, że $w_f = -(x-3)^3$. Niech $h = f - 3 \cdot id_{\mathbb{R}^3}$. Znajdziemy najpierw bazę Jordana endomorfizmu h. Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona mamy, że $h^3 = \Theta$, więc możemy stosować nasz algorytm. Macierzą h w bazie kanonicznej jest $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Prosty rachunek pokazuje, że $B^2 = 0_3$. Stąd $h^2 = \Theta$ i $s = 2$. Teraz znajdujemy $Ker h$ rozwiązując (na macierzy uzupełnionej) układ równań $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$, który redukuje się do jednego równania: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Stąd $Ker h = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ i możemy wziąć $\alpha = [1, 0, 0]$. Zatem $h(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1, -2, 1]$, więc $\mathcal{B}_1 = (h(\alpha), \alpha) = ([1, -2, 1], [1, 0, 0])$ oraz $W_1 = lin([1, -2, 1], [1, 0, 0]) = lin([1, 0, 0], [0, -2, 1]) = \{[a, -2b, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$. Ponieważ $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, więc z algorytmu mamy $t = 1$. Pozostaje zatem znaleźć wektor $\beta \in Ker h \setminus (Ker h^0 + W_1) = Ker h \setminus W_1$. Możemy przyjąć $\beta = [0, -1, 1]$. Wtedy algorytm daje bazę Jordana $([1, -2, 1], [1, 0, 0], [0, -1, 1])$, a macierzą h w tej bazie jest $J((2, 1); 0)$. Zatem, z uwagi 8.1, macierzą f w tej bazie jest $J((2, 1); 3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Macierzą przejścia od bazy kanonicznej do znalezionej bazy Jordana jest $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Zatem $J(A) = P^{-1} \cdot A \cdot P$, skąd

$A = P \cdot J(A) \cdot P^{-1}$, więc dla $k \in \mathbb{N}$ mamy $A^k = P \cdot J(A)^k \cdot P^{-1}$. Ze wzorów (6.8) i (6.12) mamy, że $J(A)^k = \begin{bmatrix} 3^k & k \cdot 3^{k-1} & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix}$. Przy pomocy operacji elementarnych łatwo znajdujemy, że $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Zatem po prostych rachunkach

$$A^k = 3^{k-1} \cdot \begin{bmatrix} k+3 & k & k \\ -2k & 3-2k & -2k \\ k & k & k+3 \end{bmatrix}. \square$$

Dowód poprawności podanego przez nas algorytmu wyznaczania bazy Jordana endomorfizmu nilpotentnego wynika od razu z paragrafu 7.3, lematu 7.12 i następującego lematu.

Lemat 8.3. *W i-tym kroku algorytmu oznaczmy przez α_i wektor α oraz przez t_i liczbę naturalną t dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas układ $\mathcal{B} = (f^{t_1-1}(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_1), \alpha_1, \ldots, f^{t_k-1}(\alpha_k), \ldots, f(\alpha_k), \alpha_k)$ jest liniowo niezależny oraz $s = t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_k$.*

Dowód. Indukcja względem k. Dla $k = 1$ teza wynika od razu z lematu 7.12. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego $k - 1 \geqslant 1$ i że można wykonać k-ty krok algorytmu. Wtedy $s = t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots \geqslant t_{k-1}$ i układ $\mathcal{B}' = (f^{t_1-1}(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_1), \alpha_1, \ldots, f^{t_{k-1}-1}(\alpha_{k-1}), \ldots, f(\alpha_{k-1}), \alpha_{k-1})$ jest liniowo niezależny. Niech $W_i = lin(f^{t_i-1}(\alpha_i), \ldots, f(\alpha_i), \alpha_i)$ dla $i = 1, \ldots, k$ oraz $W = lin(\mathcal{B}')$. Wtedy, z lematu 7.12, $\dim W_i = t_i$ dla $i = 1, \ldots, k$. Ponadto z założenia indukcyjnego $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_{k-1}$. Jeśli $k - 1 = 1$, to $t_k = t_2 \leqslant s = t_{k-1}$. Jeśli zaś $k - 1 > 1$, to t_{k-1} jest największą liczbą naturalną nie większą niż s taką, że $Ker f^{t_{k-1}} \not\subseteq Ker f^{t_{k-1}-1} + W_1 + \ldots + W_{k-2}$ oraz t_k jest największą liczbą naturalną nie większą niż s i taką, że $Ker f^{t_k} \not\subseteq Ker f^{t_k-1} + W_1 + \ldots + W_{k-2} + W_{k-1}$, skąd $t_{k-1} \geqslant t_k$. Zatem $s = t_1 \geqslant \ldots \geqslant t_{k-1} \geqslant t_k$. Wykażemy teraz, że układ $\mathcal{B}$ jest liniowo niezależny. Na mocy lematu 7.12 i założenia indukcyjnego wystarczy pokazać, że $W_k \cap W = \{\theta\}$. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$W_k \cap W \neq \{\theta\}$, więc istnieje największa nieujemna liczba całkowita $i \leqslant t_k - 1$ oraz istnieją $a_i, \ldots, a_{t_k-1} \in K$ takie, że $a_i \neq 0$ oraz $\beta = a_i \circ f^i(\alpha_k) + \ldots + a_{t_k-1} \circ f^{t_k-1}(\alpha_k) \in W$. Stąd $\beta \in W \cap Ker f^{t_k-i}$. Ale $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_{k-1}$ oraz W_i jest podprzestrzenią f-niezmienniczą, na mocy lematu 7.12, dla $i = 1, \ldots, k-1$, więc $W \cap Ker f^{t_k-i} = (W_1 \cap Ker f^{t_k-i}) \oplus \ldots \oplus (W_{k-1} \cap Ker f^{t_k-i})$. Ale $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots t_{k-1} \geqslant t_k$, więc z lematu 7.12, $W_j \cap Ker f^{t_k-i} \subseteq f^i(W_j)$ dla $j = 1, \ldots, k-1$. Zatem $W \cap Ker f^{t_k-i} \subseteq f^i(W)$ i wobec tego $\beta \in f^i(W)$. Istnieje więc $\omega \in W$ takie, że $\beta = f^i(\omega)$. Stąd $a_i \circ \alpha_k + a_{i+1} \circ f(\alpha_k) + \ldots + a_{t_k-1} \circ f^{t_k-1-i}(\alpha_k) - \omega \in Ker f^i$. Ponadto $i \leqslant t_k - 1$, więc $Ker f^i \subseteq Ker f^{t_k-1}$, skąd $a_i \circ \alpha_k + a_{i+1} \circ f(\alpha_k) + \ldots + a_{t_k-1} \circ f^{t_k-1-i}(\alpha_k) \in Ker f^{t_k-1} + W$. Ale $\alpha_k \in Ker f^{t_k}$, więc $f^j(\alpha_k) \in Ker f^{t_k-1}$ dla $j = 1, \ldots, t_k - 1$. Zatem $a_i \circ \alpha_k \in Ker f^{t_k-1} + W$. Lecz $a_i \neq 0$, więc $\alpha_k \in Ker f^{t_k-1} + W$ i mamy sprzeczność z wyborem α_k. □

Uwaga 8.4. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K. Jeżeli f jest nilpotentny, to jak wykazaliśmy, istnieje baza Jordana, w której macierzą f jest $J(\kappa; 0)$. Wynika stąd, że $(-1)^n \cdot x^n$ jest wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f. Wobec uwagi 7.14 oznacza to, że endomorfizm f jest nilpotentny wtedy i tylko wtedy, gdy jego wielomianem charakterystycznym jest $(-1)^n \cdot x^n$.

8.2 Dowód istnienia bazy Jordana w przypadku ogólnym

Stwierdzenie 8.5. *Niech w_f będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f i załóżmy, że istnieją wielomiany $w_1, \ldots, w_r \in K[x]$ parami względnie pierwsze i takie, że $w_f = w_1 \ldots w_r$. Wówczas $Ker\ \ w_i(f)$ jest podprzestrzenią f-niezmienniczą dla $i = 1, \ldots, r$ oraz $V = Ker\ w_1(f) \oplus \ldots \oplus Ker\ w_r(f)$.*

Dowód. Z przykładu 5.2 wynika, że podprzestrzenie $Ker\ w_i(f)$ są f-niezmiennicze dla $i = 1, \ldots, r$. Niech $g_1 = w_2 w_3 \ldots w_r$, $g_2 = w_1 w_3 \ldots w_r, \ldots, g_r = w_1 w_2 \ldots w_{r-1}$. Wtedy, z lematu 3.10, wielomiany $g_1, \dots, g_r$ są względnie pierwsze. Zatem, z lematu 3.16, $Im\ g_1(f) + + \dots + Im\ g_r(f) = V$. Ponadto z twierdzenia Cayleya-Hamiltona, $w_f(f) = \Theta$ i dodatkowo dla $i = 1, \dots, r$, $w_i g_i = w_f$, więc $Im\ g_i(f) \subseteq \subseteq Ker\ w_i(f)$ dla $i = 1, \dots, r$. Zatem $V = Ker\ w_1(f) + \dots + Ker\ w_r(f)$. Ponadto z lematów 3.14, 3.15 i 3.9 dla $i = 1, \dots, r$ mamy, że $Ker\ w_i(f) \cap (Ker\ w_1(f) + \dots + Ker\ w_{i-1}(f) + Ker\ w_{i+1}(f) + + \dots + Ker\ w_r(f)) \subseteq Ker\ w_i(f) \cap Ker\ g_i(f) = \{\theta\}$, więc $V = Ker\ w_1(f) \oplus \dots \oplus Ker\ w_r(f)$. □

Dowód twierdzenia Jordana. Stosujemy oznaczenia z paragrafu 7.1. Niech $w_i = (x - a_i)^{m_i}$ dla $i = 1, \dots, r$. Wtedy, z lematu 3.11, wielomiany $w_1, \dots, w_r$ są parami względnie pierwsze. Niech $V_i = Ker\ w_i(f)$ dla $i = 1, \dots, r$. Wtedy, ze stwierdzenia 8.5, podprzestrzenie $V_1, \dots, V_r$ są f-niezmiennicze oraz $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r$. Niech $g_i = (f - a_i \cdot id_V)_{|V_i}$ dla $i = 1, \dots, r$. Wtedy $g_i^{m_i} = \Theta$, więc na mocy paragrafu 8.1, istnieje baza Jordana $\mathcal{B}_i$ przestrzeni V_i względem endomorfizmu g_i, przy czym macierzą g_i w tej bazie jest $A_i = J(\kappa_i; 0)$, gdzie κ_i jest nierosnącym ciągiem liczb naturalnych o sumie równej $t_i = \dim V_i$ oraz z uwagi 8.1, $A_i + a_i \cdot I_{t_i} = J(\kappa_i, a_i)$ jest macierzą $(f - a_i \cdot id_V)_{|V_i}$ oraz $(-1)^{t_i} \cdot (x - a_i)^{t_i}$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy $J(\kappa_i; a_i)$, na mocy wzoru (6.9), dla $i = 1, \dots, r$. Zatem $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ jest bazą Jordana endomorfizmu f i macierzą f w tej bazie jest $A = M(J(\kappa_1; a_1), \dots, J(\kappa_r; a_r))$. Zatem ze wzoru (6.9) mamy, że $w_f = (-1)^{t_1 + \dots + t_r} \cdot (x - a_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{t_r}$, więc $t_i = m_i$ dla $i = 1, \dots, r$. W szczególności $\dim V_i = m_i$ oraz suma wszystkich wyrazów ciągu κ_i wynosi m_i dla $i = 1, \dots, r$. □

Uwaga 8.6. Przy oznaczeniach dowodu twierdzenia Jordana zauważmy, że jeśli s_i jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $\dim Ker\ (f - a_i \cdot id_V)^{s_i} = m_i$, to g_i jest endomorfizmem nilpotentnym stopnia s_i. Gdy $s_i = 1$, czyli dla $\dim Ker(f - a_i \cdot id_V) = m_i$ bazą Jordana podprzestrzeni V_i jest dowolna baza podprzestrzeni V_i. W szczególności dla $m_i = 1$ baza V_i składa się z jednego wektora (mianowicie z wektora własnego endomorfizmu f odpowiadającego wartości własnej a_i).

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Przykład 8.7. Znajdziemy bazę Jordana endomorfizmu f przestrzeni $\mathbb{R}^4$ posiadającego w bazie kanonicznej macierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stosując kolejno operacje: $k_1 + k_2$, $k_4 + k_3$, $w_2 - w_1$ oraz dwukrotnie rozwinięcie Laplace'a uzyskujemy w prosty sposób, że wielomianem charakterystycznym endomorfizmu f jest $w = (x+1)^2 \cdot (x-1)^2$. Zatem wartościami własnymi f są jedynie liczby 1 i -1. Teraz wyznaczamy $Ker\,(f - id_V)$ rozwiązując na macierzy uzupełnionej układ równań:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{w_2-2w_1}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_3}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_2+w_3}{\equiv} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1+2w_2}{\equiv}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right],$$ skąd $Ker\,(f - id_V) = lin([1,1,1,1])$. Zatem z wniosku 7.3, w macierzy $J(A)$ jest dokładnie jedna klatka Jordana wyznaczona przez wartość własną 1, a więc musi to być $J(2,1)$.

Teraz wyznaczamy podprzestrzeń $Ker\,(f - id_V)^2$. Po prostych rachunkach uzyskujemy, że $(A - I_4)^2 = \begin{bmatrix} -12 & 16 & 12 & -16 \\ -16 & 20 & 16 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, skąd otrzymujemy, że $Ker\,(f - id_V)^2 = \{[a,b,a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$. Zatem $\dim Ker\,(f - id_V)^2 = 2$. Ponadto $[1,0,1,0] \in Ker\,(f - id_V)^2 \setminus \setminus Ker\,(f - id_V)$, więc bazą Jordana podprzestrzeni $V_1 = Ker\,(f - id_V)^2$ jest $((f - id_V)([1,0,1,0]), [1,0,1,0]) = ([2,2,2,2],[1,0,1,0])$.

W podobny sposób obliczamy, że $Ker\,(f + id_V) = lin([1,1,0,0])$.

Zatem z wniosku 7.3, w macierzy $J(A)$ jest dokładnie jedna klatka Jordana wyznaczona przez wartość własną -1, a więc musi to być $J(2,-1)$. Stąd

$$J(A) = M(J(2,1), J(2,-1)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponadto $(A+I_4)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$, więc $V_2 = Ker\,(f + id_V)^2 =$ $= \{[a,b,0,0] : a,b \in \mathbb{R}\}$ oraz $\dim V_2 = 2$. Zatem bazą Jordana podprzestrzeni V_2 jest $((f+id_V)([1,0,0,0]), [1,0,0,0]) = ([4,4,0,0],[1,0,0,0])$. W konsekwencji bazą Jordana przestrzeni V dla endomorfizmu f jest $([2,2,2,2],[1,0,1,0],[4,4,0,0],[1,0,0,0])$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 9

Przestrzeń sprzężona

9.1 Określenie i podstawowe własności przestrzeni sprzężonej

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Przekształcenie liniowe $f\colon V \to K$ nazywamy *funkcjonałem liniowym*. Jak wiemy, $L(V;K)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Nazywamy ją *przestrzenią sprzężoną przestrzeni* V i oznaczamy przez V^*.

Przykład 9.1. Niech K będzie dowolnym ciałem. Postacią ogólną funkcjonału liniowego $f\colon K^n \to K$ jest

$$f([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dowolnymi ustalonymi elementami ciała K. $\square$

Twierdzenie 9.2. *Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K, to*

$$V^* \cong V.$$

Dowód. Ponieważ $\dim V < \infty$, więc $\dim V^* = \dim L(V;K) = \dim V \cdot \dim K = \dim V \cdot 1 = \dim V$. Stąd z algebry liniowej I mamy, że $V^* \cong V$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Uwaga 9.3. Można wykazać, że jeżeli V jest przestrzenią nieskończenie wymiarową nad ciałem K, to $\dim V < \dim V^*$, a więc w szczególności przestrzenie V^* i V nie są izomorficzne.

Uwaga 9.4. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K i niech $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni V. Niech $\alpha_i^* \in V^*$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ będzie funkcjonałem liniowym, który na bazie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ jest określony wzorem

$$\alpha_i^*(\alpha_k) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } k \neq i \\ 1, \text{ gdy } k = i \end{cases}. \tag{9.1}$$

Jeżeli $f \in V^*$, to $f(\alpha_k) = a_k$ dla pewnych $a_k \in K$, $k = 1, 2, \ldots, n$, więc $f(\alpha_k) = a_k = (a_1 \cdot \alpha_1^* + a_2 \cdot \alpha_2^* + \ldots + a_n \cdot \alpha_n^*)(\alpha_k)$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$, czyli $f = a_1 \cdot \alpha_1^* + a_2 \cdot \alpha_2^* + \ldots + a_n \cdot \alpha_n^*$. Zatem wektory $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ generują przestrzeń V^*, która ma wymiar n. Stąd $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*)$ jest bazą przestrzeni V^*; nazywamy ją *bazą sprzężoną* do bazy $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Twierdzenie 9.5 (o oddzielaniu). *Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Wówczas dla każdego wektora $\alpha \in V \setminus W$ istnieje funkcjonał $f \in V^*$ taki, że $f(\alpha) \neq 0$ i $f(W) = \{0\}$.*

Dowód. Ponieważ $\alpha \in V \setminus W$, więc $W \cap lin(\alpha) = \{\theta\}$. Z algebry liniowej I wynika zatem, że istnieje podprzestrzeń U przestrzeni V taka, że $V = W \oplus lin(\alpha) \oplus U$, skąd $V = lin(\alpha) \oplus V_1$, gdzie $V_1 = W \oplus U$, czyli $W \subseteq V_1$. Każdy wektor $\beta \in V$ może być zatem jednoznacznie zapisany w postaci $\beta = a \circ \alpha + \gamma$ dla pewnych $a \in K$, $\gamma \in V_1$. Dla takiego β definiujemy $f(\beta) = a$. Proste sprawdzenie pokazuje, że $f \in V^*$. Ponieważ $Ker(f) = V_1 \supseteq W$, więc $f(W) = \{0\}$. Ponadto $f(\alpha) =$ $= f(1 \circ \alpha + \theta) = 1$. Zatem f jest szukanym funkcjonałem. $\square$

Wniosek 9.6. *Dla dowolnego niezerowego wektora α przestrzeni liniowej V nad ciałem K istnieje funkcjonał $f \in V^*$ taki, że $f(\alpha) \neq 0$.*

Dowód. Wystarczy zastosować twierdzenie 9.5 do podprzestrzeni $W = \{\theta\}$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

9.2 Zanurzenie kanoniczne przestrzeni V w przestrzeń V^*

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Definiujemy

$$V^{**} = (V^*)^*.$$

Dowolny wektor $\alpha \in V$ wyznacza przekształcenie α^{**} przestrzeni V^* w ciało K określone wzorem

$$\alpha^{**}(\varphi) = \varphi(\alpha) \text{ dla każdego } \varphi \in V^*. \tag{9.2}$$

Tak określone przekształcenie α^{**} jest liniowe, gdyż dla dowolnych $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*, a \in K$ mamy
$\alpha^{**}(\varphi_1 + \varphi_2) = (\varphi_1 + \varphi_2)(\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) = \alpha^{**}(\varphi_1) + \alpha^{**}(\varphi_2)$,
$\alpha^{**}(a \cdot \varphi_1) = (a \cdot \varphi_1)(\alpha) = a \cdot \varphi_1(\alpha) = a \cdot \alpha^{**}(\varphi_1)$.

Zatem dla dowolnego $\alpha \in V$ mamy, że $\alpha^{**} \in V^{**}$.

Twierdzenie 9.7. *Przekształcenie $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ jest zanurzeniem przestrzeni liniowej V w przestrzeń V^{**}. W szczególności, jeżeli $\dim V < \infty$, to to zanurzenie jest izomorfizmem.*

Dowód. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$, $\varphi \in V^*$, $a \in K$ mamy, że $(\alpha + \beta)^{**}(\varphi) = \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \alpha^{**}(\varphi) + \beta^{**}(\varphi) = (\alpha^{**} + \beta^{**})(\varphi)$, więc

$$(\alpha + \beta)^{**} = \alpha^{**} + \beta^{**}.$$

Ponadto $(a \circ \alpha)^{**}(\varphi) = \varphi(a \circ \alpha) = a \cdot \varphi(\alpha) = a \cdot \alpha^{**}(\varphi) = (a \cdot \alpha^{**})(\varphi)$, czyli

$$(a \cdot \alpha)^{**} = a \cdot \alpha^{**}.$$

Zatem przekształcenie $\alpha \mapsto \alpha^{**}$, $\alpha \in V$, jest liniowe.

Weźmy dowolne $\alpha \in V \setminus \{\theta\}$. Wtedy, z wniosku 9.6, istnieje $\varphi \in V^*$ takie, że $\varphi(\alpha) \neq 0$, czyli $\alpha^{**}(\varphi) \neq 0$. Zatem $\alpha^{**} \neq 0$, skąd wynika, że jądro przekształcenia $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ jest trywialne. Zatem to przekształcenie jest zanurzeniem.

Jeżeli dodatkowo $\dim V < \infty$, to z twierdzenia 9.2, $\dim V^* = \dim V$ oraz $\dim V^* = \dim V^{**}$, skąd $\dim V = \dim V^{**}$. Ale przekształcenie

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$\alpha \mapsto \alpha^{**}$ jest zanurzeniem, więc z $\dim V^{**} = \dim V < \infty$ jest ono „na”, zatem jest izomorfizmem. $\square$

Uwaga 9.8. W przypadku przestrzeni liniowej V skończenie wymiarowej samo istnienie izomorfizmu $V \cong V^{**}$ nie jest faktem interesującym, gdyż wynika bezpośrednio z twierdzenia 9.2, ale rezultatem nowym i ciekawym jest możliwość określenia naturalnego i uniwersalnego przepisu, który dla każdej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V pozwala określić taki izomorfizm. Dzięki temu można każdą skończenie wymiarową przestrzeń liniową V utożsamiać z przestrzenią V^{**}. Jeśli zaś $\dim V = \infty$, to $\dim V < \dim V^* < \dim V^{**}$, a więc przestrzenie V i V^{**} nie są izomorficzne, a więc w szczególności zanurzenie $\alpha \mapsto \alpha^{**}$ nie jest „na”.

9.3 Przekształcenie sprzężone

Definicja 9.9. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej V nad ciałem K w przestrzeń liniową W nad ciałem K. Przekształcenie $f^*\colon W^* \to V^*$ dane wzorem

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f \text{ dla każdego } \varphi \in W^*$$

nazywamy *przekształceniem sprzężonym* z przekształceniem f.

Ponieważ f i φ są liniowe, więc $f^*(\varphi) \in V^*$ dla każdego $\varphi \in W^*$. Teraz pokażemy, że przekształcenie f^* jest liniowe. W tym celu weźmy dowolne $\varphi_1, \varphi_2 \in W^*$, $a \in K$, $\alpha \in V$. Wtedy

$$[f^*(\varphi_1 + \varphi_2)](\alpha) = [(\varphi_1 + \varphi_2) \circ f](\alpha) = (\varphi_1 + \varphi_2)(f(\alpha)) =$$
$$= \varphi_1(f(\alpha)) + \varphi_2(f(\alpha)) = (\varphi_1 \circ f)(\alpha) + (\varphi_2 \circ f)(\alpha) =$$
$$= [f^*(\varphi_1)](\alpha) + [f^*(\varphi_2)](\alpha) = [f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2)](\alpha),$$

więc

$$f^*(\varphi_1 + \varphi_2) = f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2).$$

Ponadto

$$[f^*(a \cdot \varphi_1)](\alpha) = [(a \cdot \varphi_1) \circ f](\alpha) = (a \cdot \varphi_1)(f(\alpha)) =$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$$= a \cdot \varphi_1(f(\alpha)) = a \cdot (\varphi_1 \circ f)(\alpha) = a \cdot [f^*(\varphi_1)](\alpha) = [a \cdot f^*(\varphi_1)](\alpha),$$

zatem

$$f^*(a \cdot \varphi_1) = a \cdot f^*(\varphi_1).$$

Stąd przekształcenie f^* jest liniowe, czyli $f^* \in L(W^*; V^*)$.

W podobny sposób można wykazać, że dla dowolnych $f, g \in L(V; W)$, $a \in K$:

$$(f + g)^* = f^* + g^* \text{ oraz } (a \cdot f)^* = a \cdot f^*.$$

Zatem przekształcenie $f \mapsto f^*$, $f \in L(V; W)$ jest liniowe.

Twierdzenie 9.10. *Przekształcenie $f \mapsto f^*$ jest zanurzeniem przestrzeni liniowej $L(V; W)$ w przestrzeń $L(W^*; V^*)$. Jeśli dodatkowo $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$, to przekształcenie jest izomorfizmem.*

Dowód. Niech $f \in L(V; W)$, $f \neq 0$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $f(\alpha) \neq \theta$. Zatem, z wniosku 9.6, istnieje $\varphi \in W^*$ takie, że $\varphi(f(\alpha)) \neq 0$, skąd $0 \neq (\varphi \circ f)(\alpha) = [f^*(\varphi)](\alpha)$, czyli $f^*(\varphi) \neq 0$. Stąd przekształcenie liniowe $f \mapsto f^*$ ma trywialne jądro, czyli jest zanurzeniem.

Załóżmy teraz, że $\dim V < \infty$ i $\dim W < \infty$. Wtedy z wniosku 1.4 i twierdzenia 9.2, $\dim L(W^*; V^*) = \dim W^* \cdot \dim V^* = \dim W \cdot \dim V = \dim L(V; W)$, więc to zanurzenie jest izomorfizmem. $\square$

Zadanie 9.11. Niech V, W, U będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $f\colon V \to W$ i $g\colon W \to U$ będą przekształceniami liniowymi. Pokazać, że $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Twierdzenie 9.12. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas*

(i) f jest epimorfizmem $\iff$ f^* jest monomorfizmem;

(ii) f jest monomorfizmem $\iff$ f^* jest epimorfizmem.

Dowód. (i) $\Rightarrow$. Załóżmy, że f jest „na” i niech $f^*(\varphi) = 0$ dla pewnego $\varphi \in W^*$. Weźmy dowolne $\beta \in W$. Wtedy istnieje $\alpha \in V$ takie, że $\beta = f(\alpha)$, skąd $\varphi(\beta) = \varphi(f(\alpha)) = (\varphi \circ f)(\alpha) = [f^*(\varphi)](\alpha) = 0$. Stąd wobec dowolności β, $\varphi = 0$. Zatem $Ker f^* = \{0\}$, czyli f^* jest zanurzeniem.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$\Leftarrow$. Załóżmy, że f^* jest różnowartościowe, ale f nie jest „na”. Wtedy $W \neq f(V)$, więc na mocy twierdzenia 9.5, istnieje niezerowy funkcjonał $\varphi \in W^*$ taki, że $\varphi(f(V)) = \{0\}$. Wobec tego $\varphi \circ f = 0$, czyli $f^*(\varphi) = 0$, skąd $\varphi = 0$ i mamy sprzeczność. Zatem f jest „na”.

(ii) $\Leftarrow$. Załóżmy, że f^* jest „na”, ale f nie jest różnowartościowe. Wtedy istnieje niezerowe $\alpha \in V$ takie, że $f(\alpha) = \theta$. Z wniosku 6.6, istnieje funkcjonał $\varphi \in V^*$ taki, że $\varphi(\alpha) \neq 0$. Ponadto f^* jest „na”, więc istnieje $\psi \in W^*$ takie, że $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$. Stąd $0 \neq \varphi(\alpha) = (\psi \circ f)(\alpha) = \psi(f(\alpha)) = \psi(\theta) = 0$ i mamy sprzeczność. Zatem f jest różnowartościowe.

$\Rightarrow$. Załóżmy, że f jest różnowartościowe i niech $\varphi \in V^*$. Z algebry liniowej I istnieje podprzestrzeń U przestrzeni W taka, że $W = f(V) \oplus U$. Określamy przekształcenie $h\colon W \to K$ wzorem $h(f(\alpha)+\beta) = \varphi(\alpha)$ dla $\alpha \in V$ i $\beta \in U$. Wtedy h jest dobrze określoną funkcją. Ponadto dla $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, $\beta_1, \beta_2 \in U$, $a \in K$ mamy, że

$$h((f(\alpha_1)+\beta_1)+(f(\alpha_2)+\beta_2)) = h(f(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)) = \varphi(\alpha_1+\alpha_2) =$$

$$= \varphi(\alpha_1) + \varphi(\alpha_2) = h(f(\alpha_1) + \beta_1) + h(f(\alpha_2) + \beta_2)$$

oraz

$$h(a \circ (f(\alpha_1) + \beta_1)) = h(a \circ f(\alpha_1) + a \circ \beta_1) =$$

$$= h(f(a \circ \alpha_1) + a \circ \beta_1) = \varphi(a \circ \alpha_1) = a \cdot \varphi(\alpha_1) = a \cdot h(f(\alpha_1) + \beta_1),$$

skąd $h \in W^*$. Ponadto dla $\alpha \in V$ mamy, że $[f^*(h)](\alpha) = (h \circ f)(\alpha) = h(f(\alpha)) = h(f(\alpha)+\theta) = \varphi(\alpha)$, więc $f^*(h) = \varphi$, czyli f^* jest „na”. $\square$

Twierdzenie 9.13. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $f \in L(V;W)$. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą V oraz niech $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ będzie bazą W. Jeśli A jest macierzą f w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, to A^T jest macierzą f^* w bazach sprzężonych $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ i $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$.*

Dowód. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(K)$. Wtedy dla $j = 1, \ldots, n$ mamy $f(\alpha_j) = a_{1j} \circ \beta_1 + a_{2j} \circ \beta_2 + \ldots + a_{mj} \circ \beta_m$. Stąd dla $i = 1, \ldots, m$ oraz dla $j = 1, \ldots, n$ mamy $[f^*(\beta_i^*)](\alpha_j) = [\beta_i^* \circ f](\alpha) = \beta_i^*(f(\alpha_j)) = \beta_i^*(a_{1j} \circ \beta_1 + a_{2j} \circ \beta_2 + \ldots + a_{mj} \circ \beta_m) = a_{ij}$ oraz $(a_{i1}\alpha_1^* + \ldots +$

$+a_{in}\alpha_n^*)(\alpha_j) = a_{ij}$. Zatem $f^*(\beta_i^*) = a_{i1}\alpha_1^* + \ldots + a_{in}\alpha_n^*$ dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Zatem macierzą f^* w bazach sprzężonych $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ i $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ jest A^T. $\square$

Wniosek 9.14. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $f \in L(V;W)$. Wtedy* $\dim Im\, f = \dim Im\, f^*$.

Dowód. Przy oznaczeniach twierdzenia 9.13 na mocy twierdzeń 1.9 i 9.13 mamy, że $\dim Im\, f = r(A) = r(A^T) = \dim Im\, f^*$. $\square$

Rozdział 10

Funkcjonały dwuliniowe

10.1 Izomorfizmy kanoniczne

Definicja 10.1. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Funkcję $\xi\colon V \times W \to K$ nazywamy *funkcjonałem dwuliniowym*, jeżeli

(i) $\forall_{a,b\in K}\ \forall_{\alpha,\beta\in V}\ \forall_{\gamma\in W}\ \xi(a\circ\alpha + b\circ\beta,\gamma) = a\cdot\xi(\alpha,\gamma) + b\cdot\xi(\beta,\gamma)$ oraz

(ii) $\forall_{a,b\in K}\ \forall_{\gamma\in V}\ \forall_{\alpha,\beta\in W}\ \xi(\gamma, a\circ\alpha + b\circ\beta) = a\cdot\xi(\gamma,\alpha) + b\cdot\xi(\gamma,\beta)$.
Zbiór wszystkich funkcjonałów dwuliniowych z $V\times W$ w K oznaczamy przez $L(V,W;K)$.

Stwierdzenie 10.2. *$L(V,W;K)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $K^{V\times W}$ przekształceń ze zbioru $V\times W$ w ciało K.*

Dowód. Przede wszystkim zauważmy, że zbiór $L(V,W;K)$ jest niepusty, bo np. przekształcenie zerowe $\Theta(\alpha,\beta)=0$ dla wszystkich $\alpha\in V$, $\beta\in W$ jest funkcjonałem dwuliniowym z $V\times W$ w K.

Niech $\xi,\eta\in L(V,W;K)$, $a\in K$. Wykażemy, że $\xi+\eta\in L(V,W;K)$ oraz $a\cdot\xi\in L(V,W;K)$. W tym celu weźmy dowolne $\alpha,\beta\in V$, $\gamma\in W$, $b,c\in K$. Wtedy

$$(\xi+\eta)(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) = \xi(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) + \eta(b\circ\alpha + c\circ\beta,\gamma) =$$

$$= b\cdot\xi(\alpha,\gamma) + c\cdot\xi(\beta,\gamma) + b\cdot\eta(\alpha,\gamma) + c\cdot\eta(\beta,\gamma) =$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$$= b \cdot (\xi + \eta)(\alpha, \gamma) + c \cdot (\xi + \eta)(\beta, \gamma)$$

oraz

$$(a \cdot \xi)(b \circ \alpha + c \circ \beta, \gamma) = a \cdot \xi(b \circ \alpha + c \circ \beta, \gamma) =$$

$$= a \cdot (b \cdot \xi(\alpha, \gamma) + c \cdot \xi(\beta, \gamma)) = b \cdot (a \cdot \xi)(\alpha, \gamma) + c \cdot (a \cdot \xi)(\beta, \gamma).$$

W ten sposób wykazaliśmy liniowość przekształceń $\xi + \eta$ i $a \cdot \xi$ na pierwszej współrzędnej. Analogicznie dowodzimy liniowości tych przekształceń na drugiej współrzędnej. $\square$

Uwaga 10.3. Niech $\xi \in L(V, W; K)$. Dla dowolnego ustalonego $\alpha \in V$ określamy przekształcenie $\xi'(\alpha) \colon W \to K$ kładąc

$$(\xi'(\alpha))(\beta) = \xi(\alpha, \beta) \text{ dla } \beta \in W. \tag{10.1}$$

Wówczas dla dowolnych $a_1, a_2 \in K$, $\beta_1, \beta_2 \in W$

$$(\xi'(\alpha))(a_1 \circ \beta_1 + a_2 \circ \beta_2) = \xi(\alpha, a_1 \circ \beta_1 + a_2 \circ \beta_2) =$$

$$= a_1 \cdot \xi(\alpha, \beta_1) + a_2 \cdot \xi(\alpha, \beta_2) = a_1 \cdot (\xi'(\alpha))(\beta_1) + a_2 \cdot (\xi'(\alpha))(\beta_2).$$

Zatem $\xi'(\alpha) \in W^*$. W ten sposób mamy określone przekształcenie $\xi' \colon V \to W^*$.

Analogicznie, dla dowolnego ustalonego $\beta \in W$ określamy przekształcenie $\xi"(\beta) \colon V \to K$ kładąc

$$(\xi"(\beta))(\alpha) = \xi(\alpha, \beta) \text{ dla } \alpha \in V. \tag{10.2}$$

Wówczas dla dowolnych $a_1, a_2 \in K$, $\alpha_1, \alpha_2 \in V$

$$(\xi"(\beta))(a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2) = \xi(a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2, \beta) =$$

$$= a_1 \cdot \xi(\alpha_1, \beta) + a_2 \cdot \xi(\alpha_2, \beta) = a_1 \cdot (\xi"(\beta))(\alpha_1) + a_2 \cdot (\xi"(\beta))(\alpha_2).$$

Zatem $\xi"(\beta) \in W^*$. W ten sposób mamy określone przekształcenie $\xi" \colon W \to V^*$.

Twierdzenie 10.4. *Jeżeli V i W są przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, to przekształcenie $\xi \mapsto \xi'$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V, W; K)$ na przestrzeń $L(V; W^*)$ oraz przekształcenie*

$\xi \mapsto \xi$" jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V, W; K)$ na przestrzeń $L(W; V^*)$.

Dowód. Dla dowolnych $a, b \in K$, $\alpha, \beta \in V$, $\gamma \in W$ mamy, że $(\xi'(a \circ \alpha + b \circ \beta))(\gamma) = \xi(a \circ \alpha + b \circ \beta, \gamma) = a \cdot \xi(\alpha, \gamma) + b \cdot \xi(\beta, \gamma) = (a \cdot \xi'(\alpha))(\gamma) + (b \cdot \xi'(\beta))(\gamma) = (a \cdot \xi'(\alpha) + b \cdot \xi'(\beta))(\gamma)$, skąd wobec dowolności γ mamy, że

$$\xi'(a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot \xi'(\alpha) + b \cdot \xi'(\beta).$$

Zatem przekształcenie $\xi \mapsto \xi'$ jest liniowe.

Dla $f \in L(V; W^*)$ oznaczmy przez $\bar{f}$ przekształcenie $V \times W$ w K dane wzorem

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = (f(\alpha))(\beta) \text{ dla } \alpha \in V,\ \beta \in W. \tag{10.3}$$

Sprawdzimy, że $\bar{f} \in L(V, W; K)$. Aby wykazać prawdziwość warunku (i) definicji 10.1 weźmy dowolne $a, b \in K$ oraz dowolne $\alpha, \beta \in V$, $\gamma \in W$. Wtedy $\bar{f}(a \circ \alpha + b \circ \beta, \gamma) = (f(a \circ \alpha + b \circ \beta))(\gamma) = (a \cdot f(\alpha) + b \cdot f(\beta))(\gamma) = a \cdot (f(\alpha))(\gamma) + b \cdot (f(\beta))(\gamma) = a \cdot \bar{f}(\alpha, \gamma) + b \cdot \bar{f}(\beta, \gamma)$, czyli warunek ten zachodzi.

Teraz wykażemy, że spełniony jest warunek (ii) definicji 10.1. W tym celu weźmy dowolne $a, b \in K$ oraz dowolne $\gamma \in V$, $\alpha, \beta \in W$. Wtedy $\bar{f}(\gamma, a \circ \alpha + b \circ \beta) = (f(\gamma))(a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot (f(\gamma))(\alpha) + b \cdot (f(\gamma))(\beta) = a \cdot \bar{f}(\gamma, \alpha) + b \cdot \bar{f}(\gamma, \beta)$, więc warunek ten też jest spełniony.

Zatem $\bar{f} \in L(V, W; K)$ i otrzymujemy odwzorowanie $f \mapsto \bar{f}$ przestrzeni $L(V; W^*)$ w przestrzeń $L(V, W; K)$.

Udowodnimy, że $(\bar{f})' = f$ dla dowolnego $f \in L(V; W^*)$. Dla dowolnych $\alpha \in V$, $\beta \in W$: $(((\bar{f})')(\alpha))(\beta) = \bar{f}(\alpha, \beta) = (f(\alpha))(\beta)$, skąd wobec dowolności β, $((\bar{f})')(\alpha) = f(\alpha)$, a więc wobec dowolności α, $(\bar{f})' = f$.

Teraz udowodnimy, że dla dowolnego $\xi \in L(V, W; K)$ jest $\bar{\xi'} = \xi$. W tym celu weźmy dowolne $\alpha \in V$, $\beta \in W$. Wtedy $(\bar{\xi'})(\alpha, \beta) = (\xi'(\alpha))(\beta) = \xi(\alpha, \beta)$, skąd wobec dowolności α i β uzyskujemy, że $\bar{\xi'} = \xi$.

Zatem przekształcenie $f \mapsto \bar{f}$ jest odwrotne do przekształcenia $\xi \mapsto \xi'$, czyli przekształcenie $\xi \mapsto \xi'$ jest bijekcją i ostatecznie jest ono izomorfizmem. W szczególności przekształcenie $f \mapsto \bar{f}$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V; W^*)$ na przestrzeń $L(V, W; K)$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Dla dowolnych $a, b \in K$, $\alpha, \beta \in W$, $\gamma \in V$ mamy, że

$$(\xi"(a \circ \alpha + b \circ \beta))(\gamma) = \xi(\gamma, a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot \xi(\gamma, \alpha) + b \cdot \xi(\gamma, \beta) =$$

$$= (a \cdot \xi"(\alpha))(\gamma) + (b \cdot \xi"(\beta))(\gamma) = (a \cdot \xi"(\alpha) + b \cdot \xi"(\beta))(\gamma),$$

skąd wobec dowolności γ mamy, że

$$\xi"(a \circ \alpha + b \circ \beta) = a \cdot \xi"(\alpha) + b \cdot \xi"(\beta).$$

Zatem przekształcenie $\xi \mapsto \xi"$ jest liniowe. Podobnie jak w (i) dowodzimy, że jest ono bijekcją. Zatem przekształcenie $\xi \mapsto \xi"$ jest izomorfizmem przestrzeni liniowej $L(V, W; K)$ na przestrzeń $L(W; V^*)$. $\square$

Uwaga 10.5. Izomorfizm $\xi \mapsto \xi'$ nazywamy *kanonicznym izomorfizmem przestrzeni $L(V, W; K)$ na przestrzeń $L(V; W^*)$*. Natomiast izomorfizm $f \mapsto \bar{f}$ nazywamy *kanonicznym izomorfizmem przestrzeni $L(V; W^*)$ na przestrzeń $L(V, W; K)$*.

10.2 Przypadek przestrzeni skończenie wymiarowych

Twierdzenie 10.6. *Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\xi \in L(V, W; K)$. Przy naturalnym utożsamieniu przestrzeni V^{**} z przestrzenią V oraz przestrzeni W^{**} z przestrzenią W mamy, że $\xi' = (\xi")^*$ i $\xi" = (\xi')^*$. Ponadto $\dim \xi'(V) = \dim \xi"(W)$.*

Dowód. Naturalne utożsamienie przestrzeni V^{**} z przestrzenią V polega na utożsamieniu wektora $\alpha \in V$ z przekształceniem α^{**} danym wzorem $\alpha^{**}(\varphi) = \varphi(\alpha)$ dla $\varphi \in V^*$. Zatem dla dowolnych $\alpha \in V$, $\beta \in W$ mamy, że $((\xi")^*(\alpha^{**}))(\beta) = (\alpha^{**} \circ \xi")(\beta) = \alpha^{**}(\xi"(\beta)) = = \xi"(\beta)(\alpha) = \xi(\alpha, \beta) = \xi'(\alpha)(\beta)$, skąd wobec dowolności β, $(\xi")^*(\alpha^{**}) = \xi'(\alpha)$. Ale $\alpha^{**} \equiv \alpha$, więc wobec dowolności α, $(\xi")^* = \xi'$. Stąd $\dim \xi'(V) = \dim(\xi")^*(V^{**})$.

Analogicznie pokazujemy, że $(\xi')^* = \xi"$. Ponadto, na mocy twierdzenia 9.13 mamy, że $\dim(\xi")^*(V^{**}) = \dim \xi"(W)$, więc $\dim \xi'(V) = = \dim \xi"(W)$. $\square$

Definicja 10.7. Rzędem funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; K)$ nazywamy rząd przekształcenia liniowego $\xi' \in L(V; W^*)$, czyli wymiar podprzestrzeni $\xi'(V)$ (a wobec twierdzenia 10.6 jest to wymiar podprzestrzeni $\xi''(W)$).

Stwierdzenie 10.8. *Jeżeli V i W są skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K, to* $\dim L(V, W; K) = \dim V \cdot \dim W$.

Dowód. Z twierdzenia 10.4, $\dim L(V, W; K) = \dim L(V; W^*)$. Ponadto $\dim W < \infty$, więc z twierdzenia 9.2, $\dim W^* = \dim W$. Ale $\dim V < \infty$, więc $\dim L(V; W^*) = \dim V \cdot \dim W^* = \dim V \cdot \dim W$. Zatem $\dim L(V, W; K) = \dim V \cdot \dim W$. □

Twierdzenie 10.9. *Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Niech $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni V i niech $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni W. Wówczas dla dowolnych $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ przekształcenie $\xi_{ij} \colon V \times W \to K$ dane wzorem*

$$\xi_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = x_i y_j \tag{10.4}$$

jest funkcjonałem dwuliniowym oraz układ $(\xi_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ jest bazą przestrzeni $L(V, W; K)$.

Dowód. Z uwagi 9.4 wynika, że $(\beta_1^*, \dots, \beta_m^*)$ jest bazą przestrzeni W^*. Zatem, z twierdzenia 1.2, układ $(\varphi_{ji})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$, gdzie

$$\varphi_{ji}(\alpha_k) = \begin{cases} \Theta, & \text{gdy } k \neq i, \\ \beta_j^*, & \text{gdy } k = i. \end{cases} \tag{10.5}$$

jest bazą przestrzeni $L(V; W^*)$. Z dowodu twierdzenia 10.4 wynika zatem, że układ $(\bar{\varphi}_{ji})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ jest bazą przestrzeni $L(V, W; K)$. Ponadto $\bar{\varphi}_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \left(\varphi_{ji}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k\right)\right)\left(\sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = (x_i \cdot \beta_j^*)\left(\sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = x_i y_j \cdot \beta_j^*(\beta_j) = x_i y_j$, dla dowolnych $i =$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$= 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in K$. Stąd $\bar{\varphi}_{ji} = \xi_{ij}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ i układ $(\xi_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ tworzy bazę przestrzeni $L(V, W; K)$. $\square$

Definicja 10.10. Macierz $[\xi(\alpha_i, \beta_j)] \in M_{n\times m}(K)$ nazywamy macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; K)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Uwaga 10.11. Niech $A = [a_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$ będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; K)$ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Udowodnimy, że wówczas $\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}$. Dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in K$ na mocy wzoru (10.4) $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j$ oraz z dwuliniowości ξ mamy

$$\xi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_j\xi(\alpha_i, \alpha_j),$$

więc

$$\xi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_iy_j. \tag{10.6}$$

Zatem rzeczywiście $\xi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}$. Na odwrót, dla dowolnych $a_{ij} \in K$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ przekształcenie $\xi\colon V \times W \to K$ dane wzorem (10.6) jest równe $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\xi_{ij}$ na mocy pierwszej części naszej uwagi, a więc $\xi \in L(V, W; K)$ i $[a_{ij}] \in M_{n\times m}(K)$ jest macierzą ξ w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Zatem każdy funkcjonał dwuliniowy $\xi \in L(V, W; K)$ jest dany wzorem (10.6).

Zauważmy jeszcze, że przy utożsamieniu macierzy $[a]$ ze skalarem $a \in K$ wzór (10.6) można zapisać w postaci:

$$\xi\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \circ \alpha_k, \sum_{l=1}^{m} y_l \circ \beta_l\right) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot A \cdot [y_1, \ldots, y_m]^T. \tag{10.7}$$

Twierdzenie 10.12. *Niech A będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; K)$ danego wzorem (10.6) w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wtedy A^T jest macierzą przekształcenia liniowego ξ' w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$. W szczególności rząd funkcjonału ξ jest równy rzędowi macierzy A.*

Dowód. Dla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ mamy, że $(\xi'(\alpha_i))(\beta_j) = \xi(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij}$ oraz $\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \beta_k^*\right)(\beta_j) = a_{ij}$ na mocy określenia przekształcenia ξ' oraz wzoru (9.1). Stąd $\xi'(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \beta_k^*$ dla $i = 1, \ldots, n$. Zatem współrzędne wektora $\xi'(\alpha_i)$ tworzą i-ty wiersz macierzy A, czyli tworzą i-tą kolumnę macierzy A^T. Stąd macierzą przekształcenia liniowego ξ' w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1^*, \ldots, \beta_m^*)$ jest macierz A^T. Z twierdzenia 1.9 mamy, że $\dim \xi'(V) = r(A^T)$. Ale $r(A^T) = r(A)$, więc rząd funkcjonału ξ jest równy $r(A)$. □

10.3 Zmiana bazy a funkcjonały dwuliniowe

Twierdzenie 10.13. *Niech A będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; K)$ danego wzorem (10.6) w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Niech P będzie macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ oraz niech Q będzie macierzą przejścia od bazy $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ do bazy $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$. Wówczas $P^T \cdot A \cdot Q$ jest macierzą ξ w bazach $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, $(\beta'_1, \ldots, \beta'_m)$.*

Dowód. Ze wzoru (10.7), z definicji macierzy przejścia oraz z definicji 10.7 wynika, że dla dowolnych $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ $\xi(\alpha'_i, \beta'_j) = (i -$ ta kolumna $P)^T \cdot A \cdot (j -$ ta kolumna $Q) = (i -$ ty wiersz $P^T) \cdot A \cdot (j -$ ta kolumna $Q)$. Ale z definicji iloczynu macierzy $A \cdot (j -$ ta kolumna $Q) = j -$ ta kolumna $(A \cdot Q)$, więc $\xi(\alpha'_i, \beta'_j) = [P^T \cdot A \cdot Q]_{ij}$, skąd mamy tezę. □

Korzystając ze wzoru (10.7) oraz z definicji macierzy endomorfizmu

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

liniowego w bazie i z definicji 10.7 można udowodnić w podobny sposób następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.14. *Niech A będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V, W; K)$ danego wzorem (10.6) w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Niech P będzie macierzą endomorfizmu f przestrzeni V w bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz niech Q będzie macierzą endomorfizmu g przestrzeni W w bazie $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Wówczas $\xi_1 \colon V \times W \to K$ dane wzorem*

$$\xi_1(\alpha, \beta) = \xi(f(\alpha), g(\beta)) \text{ dla } \alpha \in V,\ \beta \in W$$

jest funkcjonałem dwuliniowym i jego macierzą w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ jest $P^T \cdot A \cdot Q$. $\square$

Rozdział 11

Formy kwadratowe

Niech K będzie ciałem, w którym $1+1 \neq 0$. Wielomian n-zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ postaci

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{11.1}$$

gdzie $a_{ij} \in K$ oraz $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $i, j = 1, \ldots, n$ nazywamy *formą kwadratową n-zmiennych* nad ciałem K.

Formę kwadratową (11.1) można też zapisywać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j. \tag{11.2}$$

Przykład 11.1. (a) Postacią ogólną formy kwadratowej jednej zmiennej jest wyrażenie ax_1^2, gdzie $a \in K$.

(b) Postacią ogólną formy kwadratowej dwóch zmiennych jest wyrażenie $ax_1^2 + bx_2^2 + 2cx_1x_2$, gdzie $a, b, c \in K$.

(c) Postacią ogólną formy kwadratowej trzech zmiennych jest wyrażenie $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3$, gdzie $a_1, a_2, a_3, a, b, c \in K$. $\square$

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ nazywamy *macierzą formy* (11.1), $r(A)$ nazywamy *rzędem formy* (11.1), zaś $\det(A)$ nazywamy *wyróżnikiem tej formy.*

Z definicji formy kwadratowej wynika, że jej macierz A spełnia warunek $A = A^T$, czyli A jest *macierzą symetryczną*. Na odwrót, każda macierz symetryczna nad K jest macierzą pewnej formy kwadratowej nad K.

Przykład 11.2. Macierzą formy kwadratowej $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_3$ trzech zmiennych x_1, x_2, x_3 nad ciałem $\mathbb{R}$ jest $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Zatem wyróżnik tej formy $\det(A) = (-1)^{3+1} \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{3}{2}) \cdot (-(-\frac{3}{2})) = -\frac{9}{4} \neq 0$, skąd jej rząd wynosi 3. $\square$

Na formę kwadratową (11.1) możemy też patrzeć jak na funkcję n-zmiennych $F\colon K^n \to K$ daną wzorem

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{11.3}$$

gdyż funkcja F jest wyznaczona jednoznacznie przez współczynniki a_{ij}, bo $a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [F(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - F(\varepsilon_i) - F(\varepsilon_j)]$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Utożsamiając macierz $[a]$ ze skalarem $a \in K$ uzyskamy, że

$$[x_1, \ldots, x_n] \cdot A \cdot [x_1, \ldots, x_n]^T = [x_1, \ldots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1, & \ldots, & x_i, & \ldots, & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} [x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j] \right] = \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \right] = F([x_1, \ldots, x_n]),$$ a więc wzór (11.3) można zapisać w postaci:

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, x_n] \cdot A \cdot [x_1, \ldots, x_n]^T. \tag{11.4}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki” Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Twierdzenie 11.3. *Niech f będzie automorfizmem przestrzeni liniowej K^n posiadającym w bazie kanonicznej macierz B i niech F będzie formą kwadratową n-zmiennych o macierzy A. Wówczas $F \circ f$ też jest formą kwadratową n-zmiennych i jej macierzą jest $B^T \cdot A \cdot B$.*

Dowód. Na mocy wzoru (11.4)

$$(F \circ f)([x_1, \ldots, x_n]) = F(f([x_1, \ldots, x_n])) =$$

$$= F([x_1 \ldots x_n] \cdot B^T) = [x_1 \ldots x_n] \cdot B^T \cdot A \cdot ([x_1 \ldots x_n] \cdot B^T)^T =$$
$$= [x_1 \ldots x_n] \cdot (B^T \cdot A \cdot B) \cdot [x_1 \ldots x_n]^T.$$

Wystarczy zatem pokazać, że macierz $B^T \cdot A \cdot B$ jest symetryczna. Ale z własności transponowania macierzy $(B^T \cdot A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \cdot (B^T)^T = = B^T \cdot A \cdot B$, gdyż macierz A jest symetryczna. □

Definicja 11.4. Powiemy, że formy kwadratowe F i G, n-zmiennych nad ciałem K są *równoważne*, jeżeli istnieje automorfizm f przestrzeni K^n taki, że $G = F \circ f$.

Z twierdzenia 11.3 i ze stwierdzenia 2.15 otrzymujemy od razu następujące

Twierdzenie 11.5. *Równoważne formy kwadratowe n-zmiennych mają takie same rzędy.* □

Twierdzenie 11.6. *Relacja równoważności form kwadratowych jest relacją równoważności w rodzinie wszystkich form kwadratowych n-zmiennych nad ciałem K.*

Dowód. Niech F, G, H będą dowolnymi formami kwadratowymi n-zmiennych nad ciałem K. Ponieważ id_{K^n} jest automorfizmem przestrzeni K^n oraz $F = F \circ id_{K^n}$, więc forma F jest równoważna formie F.

Załóżmy, że forma F jest równoważna formie G. Wtedy istnieje automorfizm f przestrzeni K^n taki, że $G = F \circ f$. Ale wtedy f^{-1} też jest automorfizmem przestrzeni K^n oraz $F = G \circ f^{-1}$, więc forma G jest równoważna formie F.

Załóżmy, że forma F jest równoważna formie G oraz forma G jest równoważna formie H. Wtedy istnieją automorfizmy f, g przestrzeni K^n takie, że $G = F \circ f$ i $H = G \circ g$. Zatem $H = F \circ (f \circ g)$. Ale $f \circ g$

jest automorfizmem przestrzeni K^n, więc forma F jest równoważna formie H. $\square$

Definicja 11.7. *Formą kanoniczną* n-zmiennych nad ciałem K nazywamy formę postaci

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + \ldots + c_nx_n^2, \tag{11.5}$$

dla pewnych $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$.

Twierdzenie 11.8. *Każda forma kwadratowa n-zmiennych nad ciałem K jest równoważna pewnej formie kanonicznej n-zmiennych.*

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Przeprowadzone przez nas rozumowanie nazywa się *metodą Lagrange'a sprowadzania formy kwadratowej do postaci kanonicznej.*

Dla $n = 1$ teza jest oczywista na mocy przykładu 11.1 (a).

Niech n będzie taką liczbą naturalną większą od 1, że każda forma kwadratowa $(n-1)$-zmiennych nad ciałem K jest równoważna pewnej formie kanonicznej $(n-1)$-zmiennych. Rozważmy dowolną formę kwadratową F n-zmiennych nad ciałem K o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$. Jeżeli $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, to F jest formą kanoniczną. Załóżmy więc dalej, że $a_{kl} \neq 0$ dla pewnych $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, przy czym $k \leqslant l$. Możliwe są teraz tylko dwa przypadki.

Przypadek 1. $a_{ii} = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Wtedy $k < l$ oraz

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = 2 \cdot \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j =$$

$$= 2 \cdot \sum_{i<j, i\neq k, j\neq l} a_{ij}x_ix_j + 2 \cdot \sum_{i<l, i\neq k} a_{il}x_ix_l + 2 \cdot \sum_{k<j, j\neq l} a_{kj}x_kx_j + 2a_{kl}x_kx_l.$$

Rozważmy przekształcenie liniowe $f\colon K^n \to K^n$ dane wzorem

$$f([x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, \frac{x_k + x_l}{2}, \ldots, \frac{x_k - x_l}{2}, \ldots, x_n].$$

Ponieważ $f^2 = id_{K^n}$, więc f jest automorfizmem przestrzeni K^n. Ponadto $(F \circ f)([x_1, \ldots, x_n]) = F([x_1, \ldots, \frac{x_k+x_l}{2}, \ldots, \frac{x_k-x_l}{2}, \ldots, x_n]) =$
$$= 2 \cdot \sum_{i<j, i\neq k, j\neq l} a_{ij}x_ix_j + 2 \cdot \sum_{i<l, i\neq k} a_{il}x_i\frac{x_k - x_l}{2} + 2 \cdot \sum_{k<j, j\neq l} a_{kj}\frac{x_k + x_l}{2}x_j +$$

$+2a_{kl}\dfrac{x_k + x_l}{2} \cdot \dfrac{x_k - x_l}{2}$. Mamy tutaj cztery składniki, przy czym w pierwszych trzech składnikach (będących sumami) nie wystąpi x_k^2. Ponieważ $a_{kl} \neq 0$, więc w otrzymanej formie kwadratowej (równoważnej formie F), x_k^2 wystąpi z niezerowym współczynnikiem równym $\frac{a_{kl}}{2}$. W ten sposób dochodzimy do przypadku 2.

Przypadek 2. $a_{ss} \neq 0$ dla pewnego $s = 1, \ldots, n$. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy zakładać, że $s = n$, gdyż dla $s < n$ przy pomocy automorfizmu f przestrzeni K^n danego wzorem $f([x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_n]) = [x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_s]$ możemy formę F zastąpić formą $F \circ f$, w której współczynnik przy x_n jest równy $a_{ss} \neq 0$. Niech zatem dalej $a_{nn} \neq 0$. Wtedy

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i<j<n} a_{ij}x_ix_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_ix_n + a_{nn}x_n^2 =$$

$$= \sum_{i<j<n} a_{ij}x_ix_j + a_{nn}(x_n + \frac{1}{a_{nn}}\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i)^2 - \frac{1}{a_{nn}}(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i)^2.$$

Niech g będzie przekształceniem liniowym przestrzeni K^n w siebie danym wzorem $g([x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]) = [x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - \frac{1}{a_{nn}}\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i)]$.

Wówczas $Ker\ g = \{\theta\}$, wiec g jest automorfizmem przestrzeni K^n. Ponadto $(F \circ g)([x_1, \ldots, x_n]) = a_{nn}x_n^2 + G([x_1, \ldots, x_{n-1}])$, gdzie G jest formą kwadratową $(n-1)$-zmiennych i $G([x_1, \ldots, x_{n-1}]) = \displaystyle= \sum_{i<j<n} a_{ij}x_ix_j - \frac{1}{a_{nn}}(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i)^2$. Z założenia indukcyjnego istnieje automorfizm h przestrzeni K^{n-1} taki, że $(G \circ h)([x_1, \ldots, x_{n-1}]) = = c_1x_1^2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1}^2$ dla pewnych $c_1, \ldots, c_{n-1} \in K$. Istnieją zatem funkcjonały $\varphi_i \colon K^n \to K$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ takie, że $h([x_1, \ldots, x_{n-1}]) = [\varphi_1([x_1, \ldots, x_{n-1}]), \ldots, \varphi_{n-1}([x_1, \ldots, x_{n-1}])]$. Niech $t \colon K^n \to K^n$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $t([x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n]) = [\varphi_1([x_1, \ldots, x_{n-1}]), \ldots, \varphi_{n-1}([x_1, \ldots, x_{n-1}]), x_n]$. Wówczas t jest przekształceniem liniowym i $Ker\, t = \{\theta\}$, czyli t jest automorfizmem przestrzeni K^n. Ponadto $(F \circ (g \circ t))([x_1, \ldots, x_n]) = = c_1x_1^2 + \ldots + c_{n-1}x_{n-1}^2 + a_{nn}x_n^2$. $\square$

Przykład 11.9. Przy pomocy metody Lagrange'a sprowadzimy do postaci kanonicznej nad ciałem K formę kwadratową $F([x_1,x_2,x_3,x_4]) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ i znajdziemy automorfizm liniowy f przestrzeni K^4 taki, że $F\circ f$ jest formą kanoniczną. Mamy tutaj przypadek 1, więc $f_1([x_1,x_2,x_3,x_4]) = [x_1,x_2,\frac{x_3+x_4}{2},\frac{x_3-x_4}{2}]$. Wtedy

$$(F\circ f_1)([x_1,x_2,x_3,x_4]) =$$

$$= x_1x_2 + x_2\frac{x_3+x_4}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}\cdot\frac{x_3-x_4}{2} + \frac{x_3-x_4}{2}x_1 =$$

$$= x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2 + \frac{1}{2}x_2x_4 - \frac{1}{2}x_1x_4 =$$

$$= x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}(x_4 - x_2 + x_1)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}(x_4 - x_2 + x_1)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3.$$

Stąd $f_2([x_1,x_2,x_3,x_4]) = [x_1,x_2,x_3,x_4+x_2-x_1]$. Zatem $(F\circ f_1\circ f_2)([x_1,x_2,x_3,x_4]) = -\frac{1}{4}x_4^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3$. Teraz zajmiemy się formą kwadratową G_1:

$$G_1([x_1,x_2,x_3]) = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{4}(x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3) + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 =$$

$$= \frac{1}{4}(x_3 + x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 =$$

$$= \frac{1}{4}(x_3 + x_1 + x_2)^2$$

Stąd $h_1([x_1,x_2,x_3]) = [x_1,x_2,-x_1-x_2+x_3]$ oraz $(G_1\circ h_1)([x_1,x_2,x_3]) = \frac{1}{4}x_3^2$. Zatem $f_3([x_1,x_2,x_3,x_4]) = [x_1,x_2,x_3-x_1-x_2,x_4]$ oraz

$$(F\circ f_1\circ f_2\circ f_3)([x_1,x_2,x_3,x_4]) = \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{4}x_4^2.$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Pozostaje zatem obliczyć $f_1 \bullet f_2 \bullet f_3$. Ponieważ $(f_2 \circ f_3)([x_1, x_2, x_3, x_4]) = f_2([x_1, x_2, x_3 - x_1 - x_2, x_4]) = [x_1, x_2, x_3 - x_1 - x_2, x_4 + x_2 - x_1]$, więc $(f_1 \circ f_2 \circ f_3)([x_1, x_2, x_3, x_4]) = f_1([x_1, x_2, x_3 - x_1 - x_2, x_4 + x_2 - x_1]) = [x_1, x_2, -x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, -x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4]$. Zatem szukanym automorfizmem liniowym przestrzeni K^4 jest

$$f([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1, x_2, -x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, -x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4].$$

Rozdział 12

Formy kwadratowe rzeczywiste

12.1 Klasyfikacja rzeczywistych form kwadratowych

Formę kwadratową nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy *formą kwadratową rzeczywistą*.

Twierdzenie 12.1. *Jeśli formy kwadratowe rzeczywiste n - zmiennych są równoważne, to ich wyróżniki mają ten sam znak.*

Dowód. Załóżmy, że formy kwadratowe rzeczywiste F i G n-zmiennych są równoważne i mają macierze A i B odpowiednio. Wtedy, z twierdzenia 11.3, istnieje odwracalna macierz kwadratowa C o współczynnikach rzeczywistych taka, że $B = C^T \cdot A \cdot C$. Zatem z twierdzenia Cauchy'ego oraz z tego, że $\det C^T = \det C$ uzyskamy, że $\det B = (\det C)^2 \cdot \det A$. Ale $\det C \neq 0$, więc $(\det C)^2 > 0$ i liczby $\det B$ i $\det A$ mają ten sam znak. $\Box$

Twierdzenie 12.2. *Każda rzeczywista forma kwadratowa n-zmiennych jest równoważna formie kanonicznej postaci*

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+s}^2, \qquad (12.1)$$

dla pewnych $k, s \in \mathbb{N}_0$ takich, że $k + s \leqslant n$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Dowód. Na mocy twierdzeń 11.6 i 11.8 wystarczy ograniczyć się do kanonicznych form kwadratowych rzeczywistych $F([x_1,\ldots,x_n]) = c_1x_1^2+\ldots+c_nx_n^2$. Jeśli $c_i = 0$ dla $i = 1,\ldots,n$, to wystarczy wziąć $k = s = 0$. Niech dalej $c_j \neq 0$ dla pewnego $j = 1,\ldots,n$. Dla każdej permutacji $\sigma \in S_n$ przekształcenie $f_\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dane wzorem $f_\sigma([x_1,\ldots,x_n]) = [x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}]$ jest automorfizmem liniowym. Możemy zatem bez zmniejszania ogólności rozważań zakładać, że istnieje liczba naturalna $m \leqslant n$ taka, że $c_i \neq 0$ dla $i = 1,\ldots,m$ i $c_i = 0$ dla wszystkich $i \geqslant m$ oraz istnieją nieujemne liczby całkowite k i s takie, że $k+s = m$ i $c_i > 0$ dla $i = 1,\ldots,k$ oraz $c_i < 0$ dla $i = k+1,\ldots,m$. Niech f będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ przekształcającym wektor $[x_1,\ldots,x_n]$ na wektor $[\frac{1}{\sqrt{c_1}}x_1,\ldots,\frac{1}{\sqrt{c_k}}x_k,\frac{1}{\sqrt{-c_{k+1}}}x_{k+1},\ldots,\frac{1}{\sqrt{-c_m}}x_m,x_{m+1},\ldots,x_n]$. Wówczas f jest automorfizmem liniowym i $(F\circ f)([x_1,\ldots,x_n]) = = x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_n^2$. $\square$

Twierdzenie 12.3 (o bezwładności). *Równoważne rzeczywiste formy kwadratowe kanoniczne n-zmiennych mają te same liczby współczynników dodatnich jak i ujemnych.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy na mocy wniosku 11.10, twierdzenia 12.2 i jego dowodu istnieją nieujemne liczby całkowite k, k', s, s' takie, że $k+s = k'+s' = m \leqslant n$ oraz $k > k'$ i formy kwadratowe $F([x_1,\ldots,x_n]) = x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_{k+s}^2$ oraz $G([x_1,\ldots,x_n]) = x_1^2+\ldots+x_{k'}^2-x_{k'+1}^2-\ldots-x_{k'+s'}^2$ są równoważne. Istnieje zatem automorfizm liniowy f przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o macierzy $A = [a_{ij}]$ w bazie kanonicznej taki, że $F = G\circ f$. Wtedy
$x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_{k+s}^2 = (a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n)^2+\ldots+(a_{k'1}x_1+\ldots+ +a_{k'n}x_n)^2-(a_{(k'+1)\,1}x_1+\ldots+a_{(k'+1)\,n}x_n)^2-\ldots-(a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n)^2$.

Rozważmy przekształcenie liniowe $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k+k'}$ przekształcające wektor $[x_1,\ldots,x_n]$ na wektor $[a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n,\ldots,a_{k'1}x_1+\ldots+ +a_{k'n}x_n,x_{k+1},\ldots,x_n]$. Ponieważ $k' < k$, więc $n-k+k' < n$ i wobec tego $Ker g \neq \{\theta\}$. Zatem istnieje niezerowy wektor $[t_1,\ldots,t_n] \in \mathbb{R}^n$ taki, że $a_{i1}t_1+\ldots+a_{in}t_n = 0$ dla $i = 1,\ldots,k'$ oraz $t_j = 0$ dla $j = k+1,\ldots,n$. Zatem $t_1^2+\ldots+t_k^2 = -(a_{(k'+1)\,1}t_1+\ldots+a_{(k'+1)\,n}t_n)^2-\ldots-(a_{m1}t_1+\ldots+ +a_{mn}t_n)^2$. Stąd $t_j = 0$ dla $j = 1,\ldots,k$, czyli $[t_1,\ldots,t_n] = \theta$ i mamy sprzeczność. $\square$

Z twierdzeń 12.2 i 12.3 mamy od razu następujący

Wniosek 12.4. *Każda forma kwadratowa rzeczywista n-zmiennych jest równoważna dokładnie jednej z form postaci (12.1).* $\square$

12.2 Formy określone

Z twierdzenia Sylwestera-Jacobiego o bezwładności wynika od razu poprawność następujących definicji.

Definicja 12.5. Formę kwadratową rzeczywistą nazywamy *określoną*, jeżeli w jej postaci kanonicznej wszystkie współczynniki różne od 0 mają ten sam znak. Jeśli są one nieujemne, to forma nazywa się *dodatnio określona*, natomiast jeśli są one niedodatnie, to forma nazywa się *ujemnie określona.*

Definicja 12.6. Mówimy, że forma kwadratowa rzeczywista jest *istotnie określona*, gdy wszystkie współczynniki jej postaci kanonicznej są różne od 0 i mają ten sam znak. Jeśli są one dodatnie, to mówimy, że forma jest *istotnie dodatnia*, a jeśli ujemne, to mówimy, że forma jest *istotnie ujemna.*

Wprost z definicji równoważności form kwadratowych i z definicji 12.5 i 12.6 wynikają następujące twierdzenia.

Twierdzenie 12.7. *Na to aby forma kwadratowa rzeczywista F n-zmiennych była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) \geqslant 0$.* $\square$

Twierdzenie 12.8. *Na to aby forma kwadratowa rzeczywista F n-zmiennych była istotnie dodatnia potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego niezerowego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) > 0$.* $\square$

Uwaga 12.9. Niech F będzie formą kwadratową rzeczywistą

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

n-zmiennych. Wówczas forma F jest ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy forma $-F$ jest dodatnio określona. Ponadto forma F jest istotnie ujemna wtedy i tylko wtedy, gdy forma $-F$ jest istotnie dodatnia.

Z uwagi 12.9 i z twierdzeń 12.7 i 12.8 wynikają od razu następujące twierdzenia.

Twierdzenie 12.10. *Na to aby forma kwadratowa rzeczywista F n-zmiennych była ujemnie określona potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) \leqslant 0$.* $\square$

Twierdzenie 12.11. *Na to aby forma kwadratowa rzeczywista F n-zmiennych była istotnie ujemna potrzeba i wystarcza, żeby dla dowolnego niezerowego wektora $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ zachodziła nierówność $F([x_1, \ldots, x_n]) < 0$.* $\square$

Lemat 12.12. *Forma kwadratowa rzeczywista F n-zmiennych ($n \geqslant 2$) o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ jest istotnie dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{11} > 0$ oraz forma G $(n-1)$-zmiennych $x_2, \ldots, x_n$ o macierzy $B = [a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,n \\ j=2,\ldots,n}}$ jest istotnie dodatnia.*

Dowód. Formę F możemy zapisać w postaci

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = a_{11}x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j + \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk}x_jx_k. \tag{12.2}$$

Załóżmy, że forma F jest istotnie dodatnia. Wtedy podstawiając $x_1 = 1$, $x_j = 0$ dla $j = 2, \ldots, n$ we wzorze (12.2) uzyskamy, że $a_{11} > 0$. Stąd

$$F = a_{11}\left(x_1 + \frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 - \frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk}x_jx_k. \tag{12.3}$$

Ponadto $-\frac{1}{a_{11}}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j\right)^2 + \sum_{j,k=2}^{n} a_{jk}x_jx_k = \sum_{j=2}^{n}\left(a_{jj} - \frac{a_{1j}^2}{a_{11}}\right)x_j^2 +$

$+2\sum_{1<j<k}\left(a_{jk}-\frac{a_{1j}a_{1k}}{a_{11}}\right)x_jx_k = \frac{1}{a_{11}}G([x_2,\ldots,x_n])$. Zatem na mocy (12.3)

$$F([x_1,\ldots,x_n]) = a_{11}\left(x_1+\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j\right)^2+\frac{1}{a_{11}}G([x_2,\ldots,x_n]). \tag{12.4}$$

Weźmy dowolny niezerowy wektor $[x_2,\ldots,x_n]\in\mathbb{R}^{n-1}$ i niech $x_1=-\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j$. Wtedy z (12.4) wynika, że $\frac{1}{a_{11}}G([x_2,\ldots,x_n])>0$, a ponieważ $a_{11}>0$, więc $G([x_2,\ldots,x_n])>0$. Zatem forma G jest istotnie dodatnia.

Na odwrót, załóżmy teraz, że $a_{11}>0$ i forma G jest istotnie dodatnia. Wtedy na mocy (12.4) dla dowolnego niezerowego wektora $[x_1,\ldots,x_n]\in\mathbb{R}^n$ jest $F([x_1,\ldots,x_n])\geqslant 0$. Załóżmy, że $F([x_1,\ldots,x_n])=0$. Wtedy ze wzoru (12.4) i z tego, że $a_{11}>0$ uzyskamy $x_1+\frac{1}{a_{11}}\sum_{j=2}^{n}a_{1j}x_j=0$ oraz $G([x_2,\ldots,x_n])=0$. Ale forma G jest istotnie dodatnia, więc $x_j=0$ dla $j=2,\ldots,n$, więc też $x_1=0$ i w konsekwencji $[x_1,\ldots,x_n]=\theta$. Sprzeczność. Zatem $F([x_1,\ldots,x_n])>0$ i forma F jest istotnie dodatnia. □

Lemat 12.13. *Niech $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną taką, że $n\geqslant 2$ oraz $a_{11}>0$. Wówczas dla każdego $s=2,\ldots,n$ zachodzi równość:*

$$\det[a_{11}a_{ij}-a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,s\\ j=2,\ldots,s}} = (a_{11})^{s-2}\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,s\\ j=1,\ldots,s}}.$$

Dowód. Z twierdzenia Laplace'a mamy, że $\det[a_{11}a_{ij}-a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,s\\ j=2,\ldots,s}} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1s}\\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{12} & a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13} & \cdots & a_{11}a_{2s}-a_{12}a_{1s}\\ 0 & a_{11}a_{32}-a_{13}a_{12} & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{13} & \cdots & a_{11}a_{3s}-a_{13}a_{1s}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{11}a_{s2}-a_{1s}a_{12} & a_{11}a_{s3}-a_{1s}a_{13} & \cdots & a_{11}a_{ss}-a_{1s}a_{1s} \end{vmatrix}.$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Po zastosowaniu operacji elementarnych $w_j + a_{1j}w_1$ dla $j = 2, \ldots, s$ uzyskamy, że

$$\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,s\\ j=2,\ldots,s}} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1s} \\ a_{12} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \ldots & a_{11}a_{2s} \\ a_{13} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & \ldots & a_{11}a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{11}a_{s2} & a_{11}a_{s3} & \ldots & a_{11}a_{ss} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} & \ldots & a_{11}a_{1s} \\ a_{12} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} & \ldots & a_{11}a_{2s} \\ a_{13} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} & \ldots & a_{11}a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{11}a_{s2} & a_{11}a_{s3} & \ldots & a_{11}a_{ss} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11})^{s-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1s} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2s} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & a_{s2} & a_{s3} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix} = (a_{11})^{s-2}\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,s\\ j=1,\ldots,s}}, \text{ bo}$$

macierz A jest symetryczna. $\square$

Twierdzenie 12.14 (Kryterium Sylvestera). *Na to, by forma kwadratowa rzeczywista F n-zmiennych o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ była istotnie dodatnia potrzeba i wystarcza aby* $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix} > 0$ *dla każdego $s = 1, \ldots, n$.*

Dowód. Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza jest oczywista, bo forma $a_{11}x_1^2$ jest istotnie dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{11} > 0$.

Załóżmy, że teza zachodzi dla form kwadratowych rzeczywistych stopnia $n - 1$ i niech F będzie formą kwadratową rzeczywistą n-zmiennych o macierzy $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$.

Jeżeli forma F jest istotnie dodatnia, to na mocy lematu 12.12, $a_{11} > 0$ oraz forma G $(n-1)$-zmiennych $x_2, \ldots, x_n$ o macierzy $B = [a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,n\\ j=2,\ldots,n}}$ jest istotnie dodatnia. Zatem z założenia indukcyjnego $\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,s\\ j=2,\ldots,s}} > 0$ dla każdego $s = 2, \ldots, n$. Stąd, na mocy lematu 12.13, $\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,s\\ j=1,\ldots,s}} > 0$ dla $s = 2, \ldots, n$. Zatem $\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,s\\ j=1,\ldots,s}} > 0$ dla każdego $s = 1, \ldots, n$.

Na odwrót, załóżmy, że $\det[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,s\\ j=1,\ldots,s}} > 0$ dla każdego $s = 1, \ldots, n$. Wtedy $a_{11} > 0$ oraz na mocy lematu 12.13, $\det[a_{11}a_{ij} - a_{1i}a_{1j}]_{\substack{i=2,\ldots,s\\ j=2,\ldots,s}} > 0$ dla każdego $s = 2, \ldots, n$. Zatem z założenia indukcyjnego forma G jest istotnie dodatnia. Stąd i z lematu 12.12, forma F też jest istotnie dodatnia. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 13

Przestrzenie euklidesowe i ortogonalne I

13.1 Funkcjonały dwuliniowe symetryczne

Definicja 13.1. Macierzą funkcjonału $\xi \in L(V,V;K)$ w bazie $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ przestrzeni V nazywamy jego macierz w bazach $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, t.j. macierz $[\xi(\alpha_i,\alpha_j)] \in M_n(K)$.

Definicja 13.2. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Funkcjonał dwuliniowy $\xi \in L(V,V;K)$ nazywamy *symetrycznym*, jeżeli $\xi(\alpha,\beta) = \xi(\beta,\alpha)$ dla dowolnych $\alpha,\beta \in V$.

Stwierdzenie 13.3. *Niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego $\xi \in L(V,V;K)$ w bazie $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Wówczas ξ jest symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A jest symetryczna.*

Dowód. Jeżeli ξ jest symetryczny, to dla dowolnych $i,j = 1,\ldots,n$ $a_{ij} = \xi(\alpha_i,\alpha_j) = \xi(\alpha_j,\alpha_i) = a_{ji}$, a więc macierz A jest symetryczna.

Na odwrót, załóżmy, że macierz A jest symetryczna, a więc $a_{ij} = a_{ji}$ dla wszystkich $i,j = 1,\ldots,n$. Weźmy dowolne $\alpha,\beta \in V$. Wtedy istnie-

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

ją $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\in K$ takie, że $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\circ\alpha_i$ i $\beta=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\circ\alpha_j$. Zatem ze wzoru (10.6) mamy

$$\xi(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

oraz

$$\xi(\beta,\alpha)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}y_jx_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j,$$

czyli $\xi(\beta,\alpha)=\xi(\alpha,\beta)$ i funkcjonał ξ jest symetryczny. □

Uwaga 13.4. Z uwagi 10.11 i ze stwierdzenia 13.3 wynika, że jeżeli $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K, to każdej macierzy symetrycznej $A=[a_{ij}]\in M_n(K)$ odpowiada funkcjonał dwuliniowy symetryczny $\xi\in L(V,V;K)$ dany wzorem

$$\xi\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\circ\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\circ\alpha_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j, \tag{13.1}$$

którego macierzą w bazie $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ jest A.

13.2 Określenie przestrzeni euklidesowych i ortogonalnych

Definicja 13.5. Niech V będzie skończenie wymiarową rzeczywistą przestrzenią liniową i niech $\xi\in L(V,V;\mathbb{R})$ będzie funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym spełniającym warunek

$$\xi(\alpha,\alpha)>0 \text{ dla każdego niezerowego wektora } \alpha\in V. \tag{13.2}$$

Parę (V,ξ) nazywamy wówczas *przestrzenią euklidesową*, a funkcjonał ξ nazywamy *iloczynem skalarnym* tej przestrzeni.

Przykład 13.6. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Nietrudno sprawdzić, że $(\mathbb{R}^n, \xi)$, gdzie

$$\xi([x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n]) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{13.3}$$

jest przestrzenią euklidesową. □

Uwaga 13.7. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową wymiaru $n \in \mathbb{N}$ i niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą tej przestrzeni. Niech $\xi \in L(V, V; \mathbb{R})$ będzie funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym i niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą ξ w podanej bazie przestrzeni V. Ze stwierdzenia 13.3 macierz A jest symetryczna, więc otrzymujemy formę kwadratową rzeczywistą F n-zmiennych

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{13.4}$$

Ponadto dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\xi(x_1 \circ \alpha_1 + \ldots + x_n \circ \alpha_n, x_1 \circ \alpha_1 + \ldots + x_n \circ \alpha_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Wynika stąd, że ξ jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy forma kwadratowa F jest istotnie dodatnia. Zatem, z twierdzenia 12.14, ξ jest iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A^T$ oraz
$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{vmatrix} > 0$ dla każdego $s = 1, \ldots, n$.

Przykład 13.8. Z uwagi 13.7 otrzymujemy w szczególności, że wszystkie iloczyny skalarne w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ dane są wzorem

$$\xi([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + b x_2 y_1 + c x_2 y_2, \text{ gdzie } a > 0,\ c > \frac{b^2}{a}. \square$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Definicja 13.9. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\xi \in L(V, V; K)$ będzie funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym. Wówczas parę (V, ξ) nazywamy *przestrzenią ortogonalną*, a funkcjonał ξ nazywamy *uogólnionym iloczynem skalarnym* tej przestrzeni.

Definicja 13.10. Mówimy, że przestrzeń ortogonalna (V, ξ) jest *niezdegenerowana*, jeżeli dla dowolnego niezerowego wektora $\alpha \in V$ istnieje $\beta \in V$ takie, że $\xi(\alpha, \beta) \neq 0$. Mówimy też wtedy, że funkcjonał ξ jest *niezdegenerowany.*

Przykład 13.11. Każda przestrzeń euklidesowa (V, ξ) jest przestrzenią ortogonalną niezdegenerowaną, bo dla dowolnego niezerowego $\alpha \in V$ mamy, że $\xi(\alpha, \alpha) > 0$. $\square$

Przykład 13.12. Przestrzeń $\mathbb{R}^4$ z funkcjonałem dwuliniowym ξ danym wzorem

$$\xi([x_1, x_2, x_3, x_4], [y_1, y_2, y_3, y_4]) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 \qquad (13.5)$$

jest przestrzenią ortogonalną niezdegenerowaną (chociaż nie jest to przestrzeń euklidesowa). Rzeczywiście, dla dowolnego niezerowego wektora $\alpha = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4$ istnieje $i = 1, 2, 3, 4$ takie, że $x_i \neq 0$ i wówczas $\xi(\alpha, \varepsilon_i) \neq 0$. Ponadto dla $\beta = [1, 1, 0, 0]$ mamy, że $\xi(\beta, \beta) = 0$, więc (V, ξ) nie jest przestrzenią euklidesową. Otrzymaną w ten sposób przestrzeń ortogonalna nazywa się *przestrzenią Minkowskiego*. Odgrywa ona dużą rolę w fizyce. $\square$

Twierdzenie 13.13. *Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną. Niech A będzie macierzą funkcjonału ξ w pewnej bazie uporządkowanej $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V. Wówczas równoważne są warunki*

(i) przestrzeń (V, ξ) jest niezdegenerowana,

(ii) ξ' jest izomorfizmem przestrzeni liniowej V na przestrzeń V^*,

(iii) macierz A jest odwracalna.

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$ Weźmy dowolne $\alpha \in Ker\ \xi'$. Wtedy ze wzoru (10.1) uzyskujemy, że $\xi(\alpha, \beta) = 0$ dla dowolnego $\beta \in V$. Ale przestrzeń (V, ξ) jest niezdegenerowana, więc $\alpha = \theta$. Stąd ξ' jest zanurzeniem. Ponadto z twierdzenia 9.2 mamy, że $\dim V^* = \dim V = n$, czyli

ξ' jest zanurzeniem przestrzeni wymiaru n w przestrzeń wymiaru n. Zatem, z algebry liniowej I, ξ' jest izomorfizmem.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Z twierdzenia 10.12 mamy, że A^T jest macierzą przekształcenia liniowego ξ' w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$. Zatem, z twierdzenia 2.2, macierz A^T jest odwracalna, skąd macierz A jest odwracalna.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Z twierdzeń 2.2 i 10.12 mamy, że ξ' jest izomorfizmem. W szczególności $Ker\ \xi' = \{\theta\}$. Weźmy dowolny niezerowy wektor $\alpha \in \in V$. Wtedy $\xi'(\alpha) \neq \Theta$, więc istnieje $\beta \in V$ takie, że $(\xi'(\alpha))(\beta) \neq 0$. Stąd, na mocy wzoru (10.1), $\xi(\alpha, \beta) \neq 0$. Zatem przestrzeń (V, ξ) jest niezdegenerowana. $\square$

Przykład 13.14. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\xi \in L(V, V; K)$ będzie funkcjonałem dwuliniowym zerowym tzn. $\xi(\alpha, \beta) = 0$ dla wszystkich $\alpha, \beta \in V$. Wtedy ξ jest symetryczny, a więc (V, ξ) jest przestrzenią ortogonalną. Nazywamy ją przestrzenią ortogonalną *całkowicie zdegenerowaną*.

13.3 Podprzestrzenie prostopadłe

Definicja 13.15. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną. Mówimy, że wektory $\alpha, \beta \in V$ są *prostopadłe*, jeżeli $\xi(\alpha, \beta) = 0$. Piszemy wtedy $\alpha \perp \beta$. Mówimy, że wektor $\alpha \in V$ jest prostopadły do niepustego podzbioru $B \subseteq V$, jeżeli $\alpha \perp \beta$ dla każdego $\beta \in B$. Piszemy wtedy $\alpha \perp B$. Mówimy, że niepuste podzbiory A i B przestrzeni V są prostopadłe, i piszemy $A \perp B$, jeżeli $\alpha \perp \beta$ dla dowolnych $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Zbiór wszystkich wektorów $\alpha \in V$ prostopadłych do niepustego podzbioru $A \subseteq V$ oznaczamy przez $A^\perp$. Zatem

$$A^\perp = \{\alpha \in V : \alpha \perp \beta \text{ dla wszystkich } \beta \in A\}. \tag{13.6}$$

Uwaga 13.16. Niech A i B będą niepustymi podzbiorami przestrzeni ortogonalnej (V, ξ). Udowodnimy, że jeżeli $A \perp B$, to $lin(A) \perp \perp lin(B)$. Weźmy dowolne $\alpha \in lin(A)$ i dowolne $\beta \in lin(B)$. Wówczas istnieją $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in A$, $\beta_1, \ldots, \beta_r \in B$ i skalary $a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_r$ takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_s \circ \alpha_s$ i $\beta = b_1 \circ \beta_1 + \ldots + b_r \circ \beta_r$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Stąd z dwuliniowości ξ wynika, że $\xi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r}(a_ib_j)\xi(\alpha_i, \beta_j) = 0$, gdyż $\xi(\alpha_i, \beta_j) = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r$. Zatem $lin(A) \perp lin(B)$.

Twierdzenie 13.17. *Niech* (V, ξ) *będzie przestrzenią ortogonalną. Wówczas dla dowolnych niepustych podzbiorów* A, B *i dla dowolnej podprzestrzeni* W *przestrzeni* V*:*

(i) $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$ *i* $A^{\perp}$ *jest podprzestrzenią liniową; jest to największa podprzestrzeń prostopadła do* A*,*

(ii) jeżeli $A \subseteq B$*, to* $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$*,*

(iii) $\dim W^{\perp} \geqslant \dim V - \dim W$*,*

(iv) jeżeli przestrzeń (V, ξ) *jest niezdegenerowana, to* $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$ *oraz* $W = (W^{\perp})^{\perp}$*.*

Dowód. (i) Ponieważ $A^{\perp} \perp A$, więc $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$ i z uwagi 13.16, $lin(A^{\perp}) \perp A$, skąd $lin(A^{\perp}) \subseteq A^{\perp}$. Ale $A^{\perp} \subseteq lin(A^{\perp})$, więc $A^{\perp} = lin(A^{\perp})$. Zatem $A^{\perp}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V. Jeżeli U jest podprzestrzenią przestrzeni V prostopadłą do A, to z definicji $A^{\perp}$, $U \subseteq A^{\perp}$. Stąd $A^{\perp}$ jest największą podprzestrzenią prostopadłą do A.

(ii) Niech $\alpha \in B^{\perp}$. Wtedy $\alpha \perp \beta$ dla wszystkich $\beta \in B$. Ale $A \subseteq B$, więc $\alpha \perp \beta$ dla wszystkich $\beta \in A$, czyli $\alpha \in A^{\perp}$. Zatem $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.

(iii) Oznaczmy przez f naturalne włożenie podprzestrzeni W w przestrzeń V. Wtedy $f(\alpha) = \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in W$. Zatem, z twierdzenia 9.12, $f^*\colon V^* \to W^*$ jest epimorfizmem. Ponadto $\xi'\colon V \to V^*$, więc $g = f^* \circ \xi'\colon V \to W^*$ jest przekształceniem liniowym. Z algebry liniowej I wiemy, że $\dim V = \dim Ker\, g + \dim Im\, g$. Ale $Im\, g$ jest podprzestrzenią W^*, więc $\dim V \leqslant \dim Ker\, g + \dim W^*$. Ponadto, z twierdzenia 9.2, $\dim W^* = \dim W$, a zatem $\dim V \leqslant \dim Ker\, g + \dim W$. Dalej, dla dowolnego $\alpha \in V$ mamy

$$\alpha \in Ker\, g \iff f^*(\xi'(\alpha)) = \Theta \iff \forall_{\beta \in W}(f^*(\xi'(\alpha)))(\beta) = 0 \iff$$

$$\iff \forall_{\beta \in W}(\xi'(\alpha))(f(\beta)) = 0 \iff \forall_{\beta \in W}(\xi'(\alpha))(\beta) = 0 \iff$$

$$\iff \forall_{\beta \in W}\xi(\alpha, \beta) = 0 \iff \alpha \in W^{\perp}.$$

Zatem $Ker\, g = W^{\blacktriangle}$ i wobec tego $\dim V \leqslant \dim W^{\perp} + \dim W$, czyli $\dim W^{\perp} \geqslant \dim V - \dim W$.

(iv) Z twierdzenia 13.13, ξ' jest epimorfizmem, więc z dowodu punktu (iii) g też jest epimorfizmem i wobec tego $Im\, g = W^{*}$. Zatem z dowodu punktu (iii) uzyskujemy, że $\dim V = \dim W^{\perp} + \dim W$, czyli $\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W$. Podstawiając w miejsce podprzestrzeni W podprzestrzeń $W^{\blacktriangle}$ uzyskamy, że $\dim V = \dim (W^{\blacktriangle})^{\blacktriangle} + \dim W^{\perp}$. W konsekwencji $\dim W = \dim (W^{\perp})^{\perp}$. Ale z (i) $W \subseteq (W^{\perp})^{\blacktriangle}$, więc ostatecznie $W = (W^{\perp})^{\blacktriangle}$. $\square$

Definicja 13.18. Wektor α należący do przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) nazywamy *izotropowym*, gdy $\alpha \perp \alpha$. Podprzestrzeń, której elementami są wektory izotropowe nazywamy *podprzestrzenią izotropową*. Każdą jednowymiarową podprzestrzeń izotropową nazywamy *prostą izotropową*. Zbiór wszystkich wektorów izotropowych danej przestrzeni ortogonalnej nazywa się *stożkiem izotropowym*. Jeżeli wektor $\beta \in V$ nie jest izotropowy (tzn. $\xi(\beta, \beta) \neq 0$), to mówimy, że β jest *wektorem nieizotropowym*.

Przykład 13.19. W przestrzeni Minkowskiego opisanej w przykładzie 13.12 wektory $\beta = [1, 1, 0, 0]$ i $\gamma = [1, -1, 0, 0]$ są izotropowe, ale ich suma $\beta + \gamma = [2, 0, 0, 0]$ nie jest wektorem izotropowym. Zatem stożek izotropowy nie musi być podprzestrzenią liniową. $\square$

Przykład 13.20. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem K, w którym $1+1 = 0$. Wówczas θ jest wektorem izotropowym. Jeżeli α i β są wektorami izotropowymi, to $\xi(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = \xi(\alpha, \alpha) + (1+1) \cdot \xi(\alpha, \beta) + \xi(\beta, \beta) = 0$ oraz dla dowolnego $\alpha \in K$ $\xi(a \circ \alpha, a \circ \alpha) = a^2 \cdot \xi(\alpha, \alpha) = a^2 \cdot 0 = 0$. Zatem stożek izotropowy przestrzeni (V, ξ) jest podprzestrzenią przestrzeni V. $\square$

Stwierdzenie 13.21. *Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem K, w którym $1 + 1 \neq 0$. Wówczas stożek izotropowy W przestrzeni (V, ξ) jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy $W = V^{\perp}$.*

Dowód. Jeżeli $W = V^{\blacktriangle}$, to na mocy twierdzenia 13.17, W jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Na odwrót, załóżmy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V i niech $\alpha \in W$. Wtedy $\xi(\alpha,\alpha) = 0$. Załóżmy, że istnieje $\beta \in V$ takie, że $\xi(\alpha,\beta) \neq 0$. Jeśli $\beta \in W$, to $\alpha + \beta \in W$, skąd $\xi(\beta,\beta) = 0$ i $0 = \xi(\alpha+\beta,\alpha+\beta) = \xi(\alpha,\alpha)+(1+1)\cdot\xi(\alpha,\beta)+\xi(\beta,\beta) = (1+1)\cdot\xi(\alpha,\beta)$. Ale $1 + 1 \neq 0$, więc $\xi(\alpha,\beta) = 0$ i mamy sprzeczność. Zatem $\beta \notin W$, czyli $\xi(\beta,\beta) \neq 0$. Stąd $\alpha - \frac{2\xi(\alpha,\beta)}{\xi(\beta,\beta)} \circ \beta \in W$. Ale $\alpha \in W$ i $\frac{2\xi(\alpha,\beta)}{\xi(\beta,\beta)} \neq 0$, więc $\beta \in W$ i mamy sprzeczność. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Rozdział 14

Przestrzenie euklidesowe i ortogonalne II

14.1 Iloczyny skalarne a formy kwadratowe

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K, w którym $1 + 1 \neq 0$ i niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie uporządkowaną bazą tej przestrzeni. Niech $\xi \in L(V, V; K)$ będzie uogólnionym iloczynem skalarnym i niech $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą ξ w podanej bazie przestrzeni V. Ze stwierdzenia 13.3 wynika, że macierz A jest symetryczna, więc otrzymujemy formę kwadratową F n-zmiennych

$$F([x_1, \ldots, x_n]) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{14.1}$$

Ponadto dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in K$ zachodzi równość

$$\xi(x_1 \circ \alpha_1 + \ldots + x_n \circ \alpha_n, x_1 \circ \alpha_1 + \ldots + x_n \circ \alpha_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Ponieważ w ciele K zachodzi $2 = 1 + 1 \neq 0$, więc $a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [F(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - F(\varepsilon_i) - F(\varepsilon_j)]$, tzn. współczynniki a_{ij} są wyznaczone jednoznacznie przez formę F dla wszystkich $i, j = 1, \ldots, n$.

Niech f będzie automorfizmem liniowym przestrzeni K^n i niech $B = [b_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą f w bazie kanonicznej $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ przestrzeni K^n. Wówczas z twierdzenia 2.2 macierz B jest odwracalna. Niech $\beta_i = b_{1i} \circ \alpha_1 + \ldots + b_{ni} \circ \alpha_n$ dla $i = 1, \dots, n$. Ponieważ macierz B jest odwracalna, więc $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ jest bazą przestrzeni V oraz B jest macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ do bazy $(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Niech $C = [c_{ij}] \in M_n(K)$ będzie macierzą formy kwadratowej $F \circ f$. Wówczas z twierdzenia 11.3 mamy, że $C = B^T \cdot A \cdot B$. Zatem, na mocy twierdzenia 10.13, $B^T \cdot A \cdot B$ jest macierzą funkcjonału ξ w bazie $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Z twierdzenia 11.8 istnieje automorfizm liniowy f przestrzeni K^n taki, że $c_{ij} = 0$ dla wszystkich różnych $i, j = 1, \dots, n$. Wówczas dla dowolnych $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in K$ zachodzi równość

$$\xi(x_1 \circ \beta_1 + \ldots + x_n \circ \beta_n, y_1 \circ \beta_1 + \ldots + y_n \circ \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} x_i y_i. \quad (14.2)$$

Niech $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ będzie uporządkowaną bazą przestrzeni V i niech P będzie macierzą przejścia od bazy $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ do bazy $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$. Wówczas z twierdzenia 10.13, iloczyn $P^T \cdot A \cdot P = [a'_{ij}] \in M_n(K)$ jest macierzą ξ w bazie $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$. Ponadto z twierdzeń 2.1 i 2.2 istnieje automorfizm liniowy g przestrzeni K^n, którego macierzą w bazie kanonicznej jest P. Oznaczmy przez F' formę kwadratową odpowiadającą funkcjonałowi ξ w bazie $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$, czyli

$$F'([x_1, \dots, x_n]) = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} x_i x_j. \quad (14.3)$$

Wówczas z twierdzenia 11.3, $F' = F \circ g$, czyli formy kwadratowe F i F' są równoważne.

W ten sposób udowodniliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 14.1. *Niech K będzie ciałem, w którym $1 + 1 \neq 0$. Niech F i F' będą formami kwadratowymi n-zmiennych $x_1, \dots, x_n$ nad K o macierzach A i A' odpowiednio. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem K. Wówczas formy F i F' są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje uogólniony iloczyn skalarny $\xi \in L(V, V; K)$ posiadający w pewnych bazach uporządkowanych*

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ *przestrzeni* V *macierze* A *i* A' *odpowiednio.* $\square$

14.2 Suma prostopadła podprzestrzeni

Definicja 14.2. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną. Załóżmy, że V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni $W_1, \ldots, W_n$ takich, że $W_i \perp W_j$ dla wszystkich $i \neq j$. Mówimy wówczas, że V jest *sumą prostopadłą podprzestrzeni* $W_1, \ldots, W_n$ i piszemy

$$V = W_1 \oplus_\perp W_2 \oplus_\perp \ldots \oplus_\perp W_n.$$

Jeżeli $V = W_1 \oplus_\perp W_2$, to mówimy, że podprzestrzeń W_2 jest *dopełnieniem prostopadłym podprzestrzeni* W_1.

Przykład 14.3. Niech (V, ξ) będzie niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną nad ciałem K posiadającą niezerowy wektor izotropowy α. Wtedy $W_1 = lin(\alpha) = \{a \circ \alpha : a \in K\}$ jest prostą izotropową, bo dla dowolnych $a, b \in K$, $\xi(a \circ \alpha, b \circ \alpha) = (ab)\xi(\alpha, \alpha) = ab \cdot 0 = 0$. Wykażemy, że W_1 nie posiada dopełnienia prostopadłego. Gdyby podprzestrzeń W_2 była dopełnieniem prostopadłym podprzestrzeni W_1, to $V = W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$ i $W_1 \perp W_2$. Ale $\alpha \neq \theta$ i przestrzeń (V, ξ) nie jest zdegenerowana, więc istnieje $\beta \in V$ takie, że $\xi(\alpha, \beta) \neq 0$. Ponadto $W_1 \subseteq W_1^\perp$ i $W_2 \subseteq W_1^\perp$, więc z twierdzenia 10.14 (i) $W_1 + W_2 \subseteq W_1^\perp$, czyli $V \subseteq W_1^\perp$. Oznacza to w szczególności, że $\alpha \perp \beta$, a więc $\xi(\alpha, \beta) = 0$ i mamy sprzeczność. $\square$

Przykładem takiej przestrzeni może być przestrzeń Minkowskiego z wektorem izotropowym $[1, 1, 0, 0]$.

Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną i niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni V. Wówczas $(W, \xi_{|W \times W})$ jest przestrzenią ortogonalną. Jeśli przestrzeń ortogonalna $(W, \xi_{|W \times W})$ jest niezdegenerowana, to mówimy, że *podprzestrzeń* W *jest niezdegenerowana*. Jeśli przestrzeń ortogonalna $(W, \xi_{|W \times W})$ jest całkowicie zdegenerowana, to mówimy, że *podprzestrzeń* W *jest całkowicie zdegenerowana*. Zatem podprzestrzeń W jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niezerowego wektora $\alpha \in W$ istnieje $\beta \in W$ takie, że $\xi(\alpha, \beta) \neq 0$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Ponadto podprzestrzeń W jest całkowicie zdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi(\alpha, \beta) = 0$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in W$.

Przykład przestrzeni Minkowskiego pokazuje, że podprzestrzeń przestrzeni niezdegenerowanej może nie być podprzestrzenią niezdegenerowaną (a nawet może być całkowicie zdegenerowana).

Twierdzenie 14.4. *Każda przestrzeń ortogonalna* (V, ξ) *wymiaru* $n \in \mathbb{N}$ *jest sumą prostopadłą podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej i podprzestrzeni niezdegenerowanej, przy czym podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną jest* $V^\perp$ *oraz* $\dim V^\perp = n - r(\xi)$.

Dowód. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną. Z twierdzenia 13.17 (i) mamy, że $V^\perp$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Z definicji podprzestrzeni prostopadłej do zbioru wynika, że $V^\perp$ jest podprzestrzenią całkowicie zdegenerowaną. Z algebry liniowej I wiemy, że istnieje podprzestrzeń W przestrzeni V taka, że $V = V^\perp \oplus W$. Z określenia $V^\perp$ wynika, że $W \perp V^\perp$, a więc $V = V^\perp \oplus_\perp W$. Weźmy dowolny niezerowy wektor $\alpha \in W$. Ponieważ $V^\perp \cap W = \{\theta\}$, więc $\alpha \notin V^\perp$. Oznacza to, że istnieje $\beta \in V$ takie, że $\xi(\alpha, \beta) \neq 0$. Ale $V = V^\perp + W$, więc $\beta = \gamma + \delta$ dla pewnych wektorów $\gamma \in V^\perp$ i $\delta \in W$. Ponieważ $\xi(\alpha, \gamma) = 0$, więc $\xi(\alpha, \beta) = \xi(\alpha, \gamma + \delta) = \xi(\alpha, \gamma) + \xi(\alpha, \delta) = \xi(\alpha, \delta)$ i wobec tego $\xi(\alpha, \delta) \neq 0$. Zatem podprzestrzeń W jest niezdegenerowana i $V = V^\perp \oplus_\perp W$.

Niech V będzie sumą prostopadłą podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej U i podprzestrzeni niezdegenerowanej W_1. Wtedy $U \perp U$ i $U \perp W_1$ oraz $V = U + W_1$, więc $U \perp V$, czyli $U \subseteq V^\perp$. Weźmy dowolne $\alpha \in V^\perp$. Wtedy $\alpha = \beta + \gamma$ dla pewnych $\beta \in U$ oraz $\gamma \in W_1$. Stąd $\gamma = \alpha - \beta \in V^\perp$, a więc $\gamma \in W_1^\perp$. Ale podprzestrzeń W_1 jest niezdegenerowana, więc $\gamma = \theta$. Stąd $\alpha = \beta$, czyli $\alpha \in U$, a więc $V^\perp \subseteq U$ i ostatecznie $U = V^\perp$.

Ze wzoru (10.1) mamy, że $V^\perp = Ker\, \xi'$. Niech A będzie macierzą ξ w pewnej bazie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ przestrzeni V. Wówczas z twierdzenia 10.12 A^T jest macierzą ξ' w bazach $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$. Z twierdzenia 1.9 mamy, że $\dim Im\, \xi' = r(A^T)$. Ponadto $r(A^T) = r(A)$ oraz $n = \dim V = \dim Ker\, \xi' + \dim Im\, \xi'$, więc $\dim V^\perp = n - r(A)$. Zatem z twierdzenia 10.12 otrzymujemy, że $\dim V^\perp = n - r(\xi)$. $\square$

Twierdzenie 14.5. *Każda podprzestrzeń niezdegenerowana W dowolnej przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) posiada dokładnie jedno dopełnienie prostopadłe. Jest nim $W^{\perp}$. W szczególności każda podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej posiada jednoznacznie wyznaczone dopełnienie prostopadłe.*

Dowód. Ponieważ podprzestrzeń W jest niezdegenerowana, więc $W \cap W^{\perp} = \{\theta\}$. Ponadto, wprost z definicji podprzestrzeni prostopadłej do zbioru, $W \perp W^{\perp}$. Weźmy dowolne $\alpha \in V$. Wtedy $\xi'(\alpha)_{|W} \in W^*$. Z twierdzenia 13.13 $\xi'_{|W}$ jest izomorfizmem przestrzeni W na przestrzeń W^*. Zatem istnieje $\beta \in W$ takie, że $\xi'_{|W}(\beta) = \xi'(\alpha)_{|W}$. Oznacza to, że dla dowolnego $\gamma \in W$ $(\xi'_{|W}(\beta))(\gamma) = (\xi'(\alpha)_{|W})(\gamma)$, czyli $\xi(\beta, \gamma) = \xi(\alpha, \gamma)$, a więc $\xi(\alpha - \beta, \gamma) = 0$, skąd $\alpha - \beta \perp \gamma$ dla każdego $\gamma \in W$. Zatem $\alpha - \beta \in W^{\perp}$ i wobec tego $\alpha \in W + W^{\perp}$. W konsekwencji $V = W + W^{\perp}$ i ostatecznie $V = W \oplus_{\perp} W^{\perp}$. Pozostaje zatem udowodnić, że $W^{\perp}$ jest jedynym dopełnieniem prostopadłym podprzestrzeni W. W tym celu niech U będzie dowolnym dopełnieniem prostopadłym podprzestrzeni W. Wtedy $U \perp W$, skąd $U \subseteq W^{\perp}$. Ponadto $V = W \oplus U$ i $V = W \oplus W^{\perp}$, więc z algebry liniowej I $\dim V = \dim W + \dim U = \dim W + \dim W^{\perp}$, skąd $\dim U = \dim W^{\perp}$. Zatem $U = W^{\perp}$.

Ostatnia część twierdzenia wynika stąd, że każda podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej jest niezdegenerowana, gdyż jedynym wektorem izotropowym tej przestrzeni jest wektor zerowy. □

Twierdzenie 14.6. *Podprzestrzeń W przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) posiada dopełnienie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $W \cap W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$.*

Dowód. Załóżmy, że W ma dopełnienie prostopadłe U. Wtedy $V = W \oplus U$ i $W \perp U$. Weźmy dowolne $\alpha \in W \cap W^{\perp}$. Wtedy $\alpha \in W$, więc $\alpha \perp U$ oraz $\alpha \in W^{\perp}$, więc $\alpha \perp W$. Zatem na mocy twierdzenia 13.17 (i) mamy, że $\alpha \perp (W + U)$. Ale $W + U = V$, więc $\alpha \in V^{\perp}$. Stąd $W \cap W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$.

Na odwrót, załóżmy, że $W \cap W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$. Z twierdzenia 14.4 istnieje niezdegenerowana podprzestrzeń $H \subseteq W$ taka, że $(W \cap W^{\perp}) \oplus_{\perp} H = W$. Ponadto, z twierdzenia 14.5, $H \oplus_{\perp} H^{\perp} = V$. Dalej, $W \cap W^{\perp} \subseteq V^{\perp} \subseteq H^{\perp}$, więc z algebry liniowej I istnieje podprzestrzeń $B \subseteq H^{\perp}$

taka, że $(W \cap W^{\perp}) \oplus B = H^{\perp}$. Stąd $W \oplus B = V$. Ale $B \subseteq H^{\perp}$, więc $B \perp H$. Ponadto $W \cap W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$, więc $B \perp (W \cap W^{\perp})$. Ponieważ $W = (W \cap W^{\perp}) + H$, więc na mocy twierdzenia 13.17 (i), uzyskujemy stąd, że $B \perp W$. Oznacza to, że $W \oplus_{\perp} B = V$. □

Twierdzenie 14.7. *Podprzestrzeń $W \neq V$ przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) posiada dokładnie jedno dopełnienie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy podprzestrzeń W jest niezdegenerowana.*

Dowód. Jeżeli podprzestrzeń W jest niezdegenerowana, to na mocy twierdzenia 14.5, posiada ona dokładnie jedno dopełnienie prostopadłe.

Na odwrót, załóżmy, że podprzestrzeń W posiada dokładnie jedno dopełnienie prostopadłe U. Przypuśćmy też, że W nie jest niezdegenerowana. Wtedy istnieje niezerowy wektor $\alpha \in W \cap W^{\perp}$. Ponieważ $W \neq V$, więc $U \neq \{\theta\}$. Ponadto $W \cap U = \{\theta\}$, czyli $\alpha \notin U$. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ będzie uporządkowaną bazą U. Niech $H = lin(\alpha + \alpha_1, \ldots, \alpha + \alpha_s)$. Jeśli $H = U$, to $\alpha_1, \alpha + \alpha_1 \in U$, skąd $\alpha \in U$ i mamy sprzeczność. Zatem $H \neq U$. Ponadto $\alpha \in W$, więc $\alpha \in W + H$. Ale $\alpha + \alpha_i \in W + H$, więc $\alpha_i \in W + H$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, s$. Oznacza to, że $U \subseteq W + H$, a ponieważ $W + U = V$, więc stąd $W + H = V$. Dalej, $\alpha \perp W$ oraz $\alpha_i \perp W$ dla $i = 1, \ldots, s$. Zatem z twierdzenia 13.17 (i) $H \perp W$. Weźmy dowolne $\beta \in W \cap H$. Wtedy $\beta \in W$ oraz istnieją skalary $a_1, \ldots, a_s$ takie, że $\beta = a_1 \circ (\alpha + \alpha_1) + \ldots + a_s \circ (\alpha + \alpha_s)$, skąd $\beta - (a_1 + \ldots + a_s) \circ \alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_s \circ \alpha_s \in W \cap U = \{\theta\}$. Z liniowej niezależności wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ uzyskujemy stąd, że $a_1 = \ldots = a_s = 0$, a więc $\beta = \theta$. Oznacza to, że $W \cap H = \{\theta\}$ i ostatecznie $W \oplus_{\perp} H = V$. Ale $H \neq U$, więc mamy sprzeczność z jednoznacznością U. □

14.3 Układy wektorów parami prostopadłych

Definicja 14.8. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie układem wektorów przestrzeni ortogonalnej (V, ξ). Mówimy, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest *układem wektorów parami prostopadłych*, jeżeli $\alpha_i \perp \alpha_j$ dla wszystkich $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Twierdzenie 14.9. *Niech* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *będzie układem parami prostopadłych i nieizotropowych wektorów przestrzeni ortogonalnej* (V, ξ)*. Wówczas układ* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *jest liniowo niezależny i podprzestrzeń* $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *jest niezdegenerowana. W szczególności każdy układ niezerowych parami prostopadłych wektorów przestrzeni euklidesowej jest liniowo niezależny.*

Dowód. Weźmy dowolne skalary $a_1, \ldots, a_n$ takie, że $a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n = \theta$. Wtedy dla $i = 1, \ldots, n$ mamy, że $0 = \xi(\alpha_i, a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \xi(\alpha_i, \alpha_j) = a_i \cdot \xi(\alpha_i, \alpha_i)$, bo $\xi(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ dla wszystkich $j \neq i$. Ale z założenia $\xi(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$, więc $a_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Oznacza to, że układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest liniowo niezależny.

Weźmy dowolny niezerowy wektor $\alpha \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Wtedy istnieją skalary $a_1, \ldots, a_n$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$. Zatem $a_i \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$. Stąd $\alpha_i \in lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ oraz $\xi(\alpha, \alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \xi(\alpha_j, \alpha_i) = a_i \cdot \xi(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$, bo $\xi(\alpha_j, \alpha_i) = 0$ dla wszystkich $j \neq i$ oraz $a_i \neq 0$ i $\xi(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$, gdyż wektor α_i nie jest izotropowy. Zatem podprzestrzeń $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest niezdegenerowana. □

Rozdział 15

Bazy prostopadłe

15.1 Przestrzenie nad ciałami, w których $1 + 1 \neq 0$

Definicja 15.1. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną. Bazę $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tej przestrzeni nazywamy *bazą prostopadłą*, jeżeli tworzy ona układ wektorów parami prostopadłych.
Bazę prostopadłą $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ nazywamy *na wpół unormowaną*, gdy $\xi(\alpha_i, \alpha_i) \in \{1, -1, 0\}$ i *unormowaną*, gdy $\xi(\alpha_i, \alpha_i) \in \{1, 0\}$.

Przykład 15.2. Niech K będzie ciałem, w którym $1 + 1 \neq 0$. Wówczas K^2 z funkcjonałem dwuliniowym ξ danym wzorem

$$\xi([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = 2x_1y_1 + x_2y_2$$

jest niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną oraz $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ jest bazą prostopadłą tej przestrzeni. W przypadku $K = \mathbb{R}$ układ $(\frac{1}{\sqrt{2}} \circ \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ jest bazą unormowaną tej przestrzeni. Natomiast w przypadku $K = \mathbb{Q}$ przestrzeń ta nie posiada bazy na wpół unormowanej. Rzeczywiście, gdyby nasza przestrzeń posiadała bazę (α, β) na wpół unormowaną, to $\alpha = [a_1, a_2]$ i $\beta = [b_1, b_2]$ dla pewnych liczb wymiernych a_1, a_2, b_1, b_2 i mielibyśmy, że $2a_1^2 + a_2^2 = 1$, $2b_1^2 + b_2^2 = 1$ i $2a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Stąd $1 = (2a_1^2 + a_2^2)(2b_1^2 + b_2^2) - (2a_1b_1 + a_2b_2)^2 = 2(a_1b_2 - a_2b_1)^2$, więc uzyskalibyśmy, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, co nie jest prawdą. $\square$

Przykład 15.3. Niech (V, ξ) będzie n-wymiarową ($n \in \mathbb{N}$) przestrzenią euklidesową. Wówczas każdy układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ niezerowych parami prostopadłych wektorów tej przestrzeni jest, na mocy twierdzenia 14.9, liniowo niezależny, a ponieważ $\dim V = n$, więc układ ten tworzy bazę prostopadłą przestrzeni (V, ξ). $\square$

Lemat 15.4. *Jeżeli przestrzeń ortogonalna (V, ξ) nad ciałem K, w którym $1 + 1 \neq 0$ nie jest całkowicie zdegenerowana, to istnieje $\gamma \in V$ takie, że $\xi(\gamma, \gamma) \neq 0$.*

Dowód. Z założenia istnieją wektory $\alpha, \beta \in V$ takie, że $\xi(\alpha, \beta) \neq 0$. Jeżeli $\xi(\alpha, \alpha) \neq 0$, to wystarczy wziąć $\gamma = \alpha$. Podobnie, jeśli $\xi(\beta, \beta) \neq 0$, to wystarczy wziąć $\gamma = \beta$. Załóżmy więc, że $\xi(\alpha, \alpha) = = \xi(\beta, \beta) = 0$. Niech $\gamma = \alpha + \beta$. Wtedy $\xi(\gamma, \gamma) = \xi(\alpha, \alpha) + 2 \cdot \xi(\alpha, \beta) + +\xi(\beta, \beta) = (1 + 1) \cdot \xi(\alpha, \beta) \neq 0$, bo $1 + 1 \neq 0$ i $\xi(\alpha, \beta) \neq 0$. $\square$

Uwaga 15.5. W praktyce wektor nieizotropowy γ, o którym mowa w lemacie 11.6, wyznaczamy w ten sposób, że najpierw znajdujemy jakąkolwiek bazę $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ przestrzeni V. Następnie dla $i = 1, \ldots, n$ obliczamy $\xi(\gamma_i, \gamma_i)$. Jeśli $\xi(\gamma_i, \gamma_i) \neq 0$ dla pewnego i, to bierzemy $\gamma = \gamma_i$. W przeciwnym przypadku obliczamy $\xi(\gamma_i, \gamma_j)$ dla wszystkich różnych $i, j = 1, \ldots, n$. Jeśli wszystkie te liczby są równe 0, to przestrzeń (V, ξ) jest całkowicie zdegenerowana i mamy sprzeczność. Zatem istnieją różne $i, j = 1, \ldots, n$, dla których $\xi(\gamma_i, \gamma_j) \neq 0$ i z dowodu lematu 15.4 wynika, że możemy przyjąć $\gamma = \gamma_i + \gamma_j$.

Twierdzenie 15.6. *Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K, w którym $1 + 1 \neq 0$. Wówczas (V, ξ) posiada bazę prostopadłą złożoną z wektorów nieizotropowych wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń (V, ξ) jest niezdegenerowana.*

Dowód. Implikacja $\Rightarrow$ wynika od razu z twierdzenia 14.9.

Na odwrót, załóżmy, że przestrzeń (V, ξ) jest niezdegenerowana. Z lematu 15.4 wynika, że istnieje $\alpha_1 \in V$ takie, że $\xi(\alpha_1, \alpha_1) \neq 0$. Ponieważ $\dim V = n \in \mathbb{N}$, więc na mocy twierdzenia 14.9, istnieje maksymalny podzbiór $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ złożony z wektorów nieizotropowych i parami prostopadłych tej przestrzeni. Wtedy, z twierdzenia 14.9, układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest liniowo niezależny i podprzestrzeń $W = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest niezdegenerowana. Zatem, z twierdzenia 14.5,

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

$W \oplus_\perp W^\perp = V$, skąd podprzestrzeń $W^\perp$ jest niezdegenerowana. Jeżeli $W^\perp \neq \{\theta\}$, to z lematu 15.4, istnieje $\alpha_{s+1} \in W^\perp$ takie, że $\xi(\alpha_{s+1}, \alpha_{s+1}) \neq 0$. Zatem, z twierdzenia 14.9, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1})$ jest układem nieizotropowych wektorów parami prostopadłych, co przeczy maksymalności s. Stąd $W^\perp = \{\theta\}$ i wobec tego $W = V$, a więc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ). $\square$

Uwaga 15.7. Zauważmy, że każda baza prostopadła $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ niezdegenerowanej przestrzeni ortogonalnej (V, ξ) składa się z samych wektorów nieizotropowych. Rzeczywiście, jeśli $\xi(\alpha_i, \alpha_i) = 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$, to $\alpha_j \perp \alpha_i$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, n$, więc z twierdzenia 13.17 (i), $\xi(\alpha_i, \alpha) = 0$ dla wszystkich $\alpha \in V$, co przeczy temu, że przestrzeń (V, ξ) jest niezdegenerowana.

Twierdzenie 15.8. *Każda niezerowa przestrzeń ortogonalna (V, ξ) nad ciałem K, w którym $1 + 1 \neq 0$ posiada bazę prostopadłą.*

Dowód. Z twierdzenia 14.4 mamy, że $V = V^\perp \oplus_\perp W$ dla pewnej niezdegenerowanej podprzestrzeni W. Jeśli $V^\perp = \{\theta\}$, to teza wynika z twierdzenia 15.6. Jeśli $W = \{\theta\}$, to V jest całkowicie zdegenerowana i każda jej baza jest prostopadła. Niech zatem $V^\perp \neq \{\theta\}$ i $W \neq \{\theta\}$. Wtedy, z twierdzenia 15.6, istnieje baza prostopadła $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ podprzestrzeni W złożona z wektorów nieizotropowych oraz z algebry liniowej I istnieje baza $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej $V^\perp$, będąca bazą prostopadłą. Ponieważ $W \perp V^\perp$, więc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ jest układem wektorów parami prostopadłych. Ponadto $V = V^\perp \oplus W$, więc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ). $\square$

Z paragrafu 14.1 można uzyskać inny dowód twierdzenia 15.8. Mianowicie $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jest na mocy wzoru (14.2) bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ).

Wniosek 15.9. *Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem K, w którym $1 + 1 \neq 0$. Wówczas każdy układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ parami prostopadłych i nieizotropowych wektorów tej przestrzeni można uzupełnić do bazy prostopadłej przestrzeni (V, ξ). W szczególności, jeśli $\alpha \in V$ i $\xi(\alpha, \alpha) \neq 0$, to istnieje baza prostopadła przestrzeni (V, ξ)*

zawierająca α.

Dowód. Z twierdzenia 14.9 podprzestrzeń $W = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ ma wymiar s i jest niezdegenerowana. Z twierdzenia 14.5, $V = W \oplus_\perp W^\perp$. Jeśli $W^\perp = \{\theta\}$, to $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ). W przeciwnym przypadku, na mocy twierdzenia 15.8, $W^\perp$ posiada bazę prostopadłą $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$, a więc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ). $\square$

Z przeprowadzonych w tym rozdziale dowodów wynika następujący *algorytm znajdowania bazy prostopadłej przestrzeni ortogonalnej* (V, ξ) nad ciałem K, w którym $1 + 1 \neq 0$:

Krok 1. Wyznaczamy podprzestrzeń $V^\perp$. W tym celu trzeba najpierw wziąć jakąkolwiek bazę $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ przestrzeni V. Podprzestrzeń $V^\perp$ składa się z takich wektorów $x_1 \circ \gamma_1 + \ldots + x_n \circ \gamma_n$, że skalary $x_1, \ldots, x_n \in K$ spełniają układ równań $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ dla $j = 1, \ldots, n$. Jeśli $V^\perp = V$, to $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ) i algorytm kończymy. W przeciwnym przypadku wyznaczamy jakąkolwiek bazę $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ podprzestrzeni $V^\perp$ i przechodzimy do następnego kroku.

Krok 2. Znajdujemy jakąkolwiek podprzestrzeń W przestrzeni V taką, że $V = V^\perp \oplus W$. Niech $\dim W = r$. Wyznaczamy wektor $\beta_1 \in \in W$ taki, że $\xi(\beta_1, \beta_1) \neq 0$. Jeżeli $r = 1$, to $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ) i algorytm kończymy. W przeciwnym przypadku przechodzimy do następnego kroku.

Krok 3. W sposób podobny do podanego w kroku 1 wyznaczamy w podprzestrzeni W podprzestrzeń W_1 wszystkich wektorów prostopadłych do wektora β_1. Następnie wyznaczamy w niej podobnie jak w kroku 2 wektor β_2 taki, że $\xi(\beta_2, \beta_2) \neq 0$. Jeżeli $r = 2$, to bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ) jest $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2)$ i algorytm kończymy. W przeciwnym przypadku przechodzimy do następnego kroku.

Krok 4. W sposób podobny do podanego w kroku 1 wyznaczamy w podprzestrzeni W_1 podprzestrzeń W_2 wszystkich wektorów prostopadłych do wektora β_2. Następnie wyznaczamy w niej podobnie jak w kroku 2 wektor β_3 taki, że $\xi(\beta_3, \beta_3) \neq 0$. Jeżeli $r = 3$, to bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ) jest $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ i algorytm kończymy. W przeciwnym przypadku kontynuujemy nasz algorytm aż znajdziemy parami prostopadłe wektory $\beta_1, \ldots, \beta_r$ w podprzestrzeni W i wypisujemy bazę prostopadłą $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ przestrzeni (V, ξ).

Przykład 15.10. Znajdziemy bazę prostopadłą przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}^3, \xi)$, gdzie funkcjonał dwuliniowy ξ dany jest wzorem:

$$\xi([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

Macierzą ξ w bazie kanonicznej $\mathbb{R}^3 = V$ jest $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Podprzestrzeń $V^\perp$ znajdujemy przy pomocy metody eliminacji Gaussa:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_2+w_1}{\equiv} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{w_1+w_2}{\equiv} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right], \text{ więc}$$

$V^\perp = \{[-t, -t, t] : t \in \mathbb{R}\}$ i bazą (prostopadłą) podprzestrzeni $V^\perp$ jest $\{[-1, -1, 1]\}$. Ponieważ $\{[-1, -1, 1], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ jest bazą przestrzeni V, więc $V = V^\perp \oplus_\perp W$ dla $W = lin(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = \{[0, a, b] : a, b \in \in \mathbb{R}\}$. Ponadto $\xi(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = 2$, $\xi(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = 1$, $\xi(\varepsilon_3, \varepsilon_3) = 1$. Podprzestrzeń W_1 przestrzeni W prostopadła do wektora ε_3 składa się z wszystkich wektorów $[0, a, b] \in W$ takich, że $0 = \xi(\varepsilon_3, [0, a, b]) = a + b$, czyli $W_1 = \{[0, a, -a] : a \in \mathbb{R}\} = lin([0, 1, -1])$. Zatem bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ) jest $([-1, -1, 1], [0, 0, 1], [0, 1, -1])$. □

15.2 Przestrzenie nad ciałami, w których $1 + 1 = 0$

Twierdzenie 15.11. *Niech (V, ξ) będzie niezdegenerowaną przestrzenią ortogonalną wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K, w którym $1+1 = 0$. Wówczas (V, ξ) posiada bazę prostopadłą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor nieizotropowy $\alpha \in V$.*

Dowód. Implikacja $\Rightarrow$ wynika od razu z uwagi 15.7.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Na odwrót, załóżmy, że istnieje wektor nieizotropowy $\alpha \in V$. Wtedy, na mocy twierdzenia 14.9 i tego, że $\dim V = n \in \mathbb{N}$, istnieje w przestrzeni (V, ξ) układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ parami prostopadłych wektorów nieizotropowych o największej liczbie elementów $s \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia 14.9 wynika, że układ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest liniowo niezależny i podprzestrzeń $W = lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest niezdegenerowana. Zatem z twierdzenia 14.5, $W \oplus_{\perp} W^{\perp} = V$, skąd podprzestrzeń $W^{\perp}$ jest niezdegenerowana. Załóżmy, że $W^{\perp} \neq \{\theta\}$. Jeżeli w podprzestrzeni $W^{\perp}$ istnieje wektor nieizotropowy δ, to $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \delta)$ jest układem $s+1$ wektorów nieizotropowych i parami prostopadłych, co przeczy maksymalności liczby s. Zatem każdy wektor podprzestrzeni $W^{\perp}$ jest izotropowy. Ponadto istnieją $\beta, \gamma \in W^{\perp}$ takie, że $\xi(\beta, \gamma) \neq 0$. Rozważmy układ wektorów: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \frac{1}{\xi(\alpha_s, \alpha_s)} \circ \alpha_s - \frac{1}{\xi(\beta, \gamma)} \circ \beta, \alpha_s + \gamma)$. Ponieważ $\beta \perp \alpha_i$, $\gamma \perp \alpha_i$ dla $i = 1, \ldots, s$ oraz $\xi(\beta, \beta) = \xi(\gamma, \gamma) = 0$, więc jest to układ $s+1$ wektorów nieizotropowych i parami prostopadłych, co przeczy maksymalności s. Przypuszczenie, że $W^{\perp} \neq \{\theta\}$ doprowadziło nas do sprzeczności. Stąd $W^{\perp} = \{\theta\}$ i wobec tego $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ). $\square$

Przykład 15.12. Niech K będzie ciałem, w którym $1 + 1 = 0$ (np. $K = \mathbb{Z}_2$). Wówczas K^2 z funkcjonałem dwuliniowym ξ danym wzorem

$$\xi([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

jest przestrzenią ortogonalną niezdegenerowaną, przy czym każdy wektor $\alpha \in K^2$ jest izotropowy. Zatem z twierdzenia 15.11, ta przestrzeń nie posiada bazy prostopadłej. $\square$

Twierdzenie 15.13. *Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną nad ciałem K, w którym $1 + 1 = 0$. Jeżeli przestrzeń (V, ξ) nie jest całkowicie zdegenerowana, to (V, ξ) posiada bazę prostopadłą wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieizotropowy wektor $\alpha \in V$.*

Dowód. Załóżmy, że $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ). Jeżeli każdy z wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ jest izotropowy, to z twierdzenia 13.17 (i), przestrzeń (V, ξ) jest całkowicie zdegenerowana. Zatem dla pewnego $i = 1, \ldots, s$ wektor α_i jest nieizotropowy.

Na odwrót, załóżmy, że istnieje wektor nieizotropowy $\alpha \in V$. Wtedy $\alpha \notin V^{\perp}$ oraz na mocy twierdzenia 14.4, $V = V^{\perp} \oplus_{\perp} W$ dla pewnej niezdegenerowanej podprzestrzeni W. Jeśli $V^{\perp} = \{\theta\}$, to teza wynika z twierdzenia 15.11. Niech dalej $V^{\perp} \neq \{\theta\}$. Wtedy $V^{\perp}$ posiada bazę $(\beta_1, \ldots, \beta_r)$, która jest bazą prostopadłą. Ponadto $W \neq \{\theta\}$ i $\alpha = \gamma + \beta$ dla pewnych $\gamma \in W$, $\beta \in V^{\perp}$. Ale $\xi(\alpha, \alpha) \neq 0$ i $\xi(\beta, \beta) = \xi(\beta, \gamma) = 0$, więc $\xi(\gamma, \gamma) \neq 0$. Zatem z twierdzenia 15.11, podprzestrzeń W posiada bazę prostopadłą $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$. Stąd $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni (V, ξ). $\square$

Uwaga 15.14. Niech (V, ξ) będzie przestrzenią ortogonalną wymiaru $n \in \mathbb{N}$ nad ciałem K, w którym $1 + 1 = 0$. Niech $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ będzie bazą przestrzeni V. Wówczas dla wektora $\alpha = a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_n \circ \alpha_n$ mamy, że $\xi(\alpha, \alpha) = a_1^2 \xi(\alpha_1, \alpha_1) + \ldots + a_n^2 \xi(\alpha_n, \alpha_n)$. Zatem jeśli $\xi(\alpha_i, \alpha_i) = 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, to każdy wektor $\alpha \in V$ jest izotropowy. Jeżeli zaś $\xi(\alpha_i, \alpha_i) \neq 0$ dla pewnego $i = 1, \ldots, n$, to przestrzeń (V, ξ) posiada wektor nieizotropowy. Zatem przestrzeń (V, ξ) posiada wektor nieizotropowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$ dla pewnego $j = 1, \ldots, n$. Ponadto jest to równoważne temu, że macierz ξ w pewnej bazie przestrzeni V ma na głównej przekątnej niezerowy element.

15.3 Ortogonalizacja Schmidta

Niech (V, ξ) będzie przestrzenią euklidesową wymiaru $n \in \mathbb{N}$. Wówczas bazę prostopadłą tej przestrzeni możemy wyznaczyć za pomocą tzw. *ortogonalizacji Schmidta*. Najpierw znajdujemy jakąkolwiek bazę $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ przestrzeni V. Bazę prostopadłą $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ konstruujemy indukcyjnie:

1. Kładziemy $\alpha_1 = \gamma_1$.

2. Jeżeli dla pewnego $k < n$ wektory parami prostopadłe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są już skonstruowane i $lin(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = lin(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, to wektora α_{k+1} szukamy w postaci

$$\alpha_{k+1} = \gamma_{k+1} + a_1 \circ \alpha_1 + \ldots + a_k \circ \alpha_k. \tag{15.1}$$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Ponieważ podprzestrzeń $lin(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ma wymiar k, więc $\alpha_i \neq \theta$ dla każdego $i = 1, \dots, k$. Ponadto nasza przestrzeń jest euklidesowa, więc $\xi(\alpha_i, \alpha_i) > 0$ dla $i = 1, \dots, k$. Z własności operacji elementarnych na układzie wektorów omawianych na algebrze liniowej I wynika, że dla dowolnych skalarów $a_1, \dots, a_k$ i dla wektora α_{k+1} danego wzorem (15.1) mamy

$$lin(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}) = lin(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_k) =$$
$$= lin(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + lin(\gamma_{k+1}) = lin(\gamma_1, \dots, \gamma_k) + lin(\gamma_{k+1}) =$$
$$= lin(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k+1}).$$

Wystarczy zatem aby $\xi(\alpha_i, \alpha_{k+1}) = 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, k$, tzn. aby $\xi(\alpha_i, \gamma_{k+1}) + a_i\xi(\alpha_i, \alpha_i) = 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, k$. Zatem

$$a_i = -\frac{\xi(\alpha_i, \gamma_{k+1})}{\xi(\alpha_i, \alpha_i)} \text{ dla } i = 1, \dots, k. \tag{15.2}$$

Znalezione w ten sposób wektory $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są niezerowe i parami prostopadłe, więc na podstawie przykładu 15.3, tworzą one bazę prostopadłą przestrzeni (V, ξ). Ponadto $(\frac{1}{\sqrt{\xi(\gamma_1,\gamma_1)}} \circ \alpha_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\xi(\gamma_n,\gamma_n)}} \circ \alpha_n)$ jest bazą prostopadłą unormowaną tej przestrzeni.

Przykład 15.15. Stosując ortogonalizację Schmidta znajdziemy bazę prostopadłą przestrzeni ortogonalnej $(\mathbb{R}^3, \xi)$ przy założeniu, że macierzą ξ w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Z uwagi 13.7 w prosty sposób uzyskujemy, że $(\mathbb{R}^3, \xi)$ jest przestrzenią euklidesową. Niech $\gamma_1 = [1, 0, 0]$, $\gamma_2 = [0, 1, 0]$, $\gamma_3 = [0, 0, 1]$. Wtedy $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ jest bazą kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Zatem $\xi(\gamma_1, \gamma_1) = 1$, $\xi(\gamma_2, \gamma_2) = 2$, $\xi(\gamma_3, \gamma_3) = 5$. Oczywiście $\alpha_1 = \gamma_1 = [1, 0, 0]$. Ponadto ze wzorów (15.1) i (15.2) mamy, że $\alpha_2 = \gamma_2 + a \circ \alpha_1$ oraz $a = -\frac{\xi(\alpha_1,\gamma_2)}{\xi(\alpha_1,\alpha_1)} = -\frac{\xi(\gamma_1,\gamma_2)}{\xi(\gamma_1,\gamma_1)} = -\frac{1}{1} = -1$, a więc $\alpha_2 = \gamma_2 - \alpha_1 = [-1, 1, 0]$. Ponownie ze wzorów (15.1) i (15.2) uzyskujemy, że $\alpha_3 = \gamma_3 + a_1 \circ \alpha_1 + a_2 \circ \alpha_2$ oraz $a_1 = -\frac{\xi(\alpha_1,\gamma_3)}{\xi(\alpha_1,\alpha_1)} = -\frac{\xi(\gamma_1,\gamma_3)}{\xi(\gamma_1,\gamma_1)} = 0$, $a_2 = -\frac{\xi(\alpha_2,\gamma_3)}{\xi(\alpha_2,\alpha_2)}$. Ale $\xi(\alpha_2, \gamma_3) = \xi(\gamma_2 - \gamma_1, \gamma_3) = \xi(\gamma_2, \gamma_3) - \xi(\gamma_1, \gamma_3) = 2 - 0 = 2$ oraz $\xi(\alpha_2, \alpha_2) =$

$= \xi(\gamma_2 - \gamma_1, \gamma_2 - \gamma_1) = \xi(\gamma_2, \gamma_2) - 2\xi(\gamma_1, \gamma_2) + \xi(\gamma_1, \gamma_1) = 2 - -2 \cdot 1 + 1 = 1$, więc $a_2 = -2$ oraz $\alpha_3 = [0, 0, 1] - 2 \circ [-1, 1, 0] = = [2, -2, 1]$. Zatem szukaną bazą prostopadłą naszej przestrzeni jest $([1, 0, 0], [-1, 1, 0], [2, -2, 1])$. $\square$

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

Literatura

[1] R. R. Andruszkiewicz, *Wykłady z algebry liniowej I*, Wydawnictwo UwB, Białystok 2005.
[2] G. Banaszak, W. Gajda, *Elementy algebry liniowej cz. II*, WNT, Warszawa 2002.
[3] A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa 1976.
[4] L. Jeśmianowicz, J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1976.
[5] A. I. Kostrykin, *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa 1984.
[6] A. I. Kostrykin, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1995.
[7] A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1972.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021