Robert Poczobut
Katedra Filozofii, Uniwersytet w Białymstoku

Ontyczny i normatywny wymiar logiki. Husserla dyskusja z psychologizmem a współczesny kognitywizm*

Czysta logika w najbardziej ogólny sposób obejmuje idealne warunki możliwości nauki w ogóle.

Edmund Husserl

Dostrzeżenie, że obiekty matematyczne i logiczne mają realizację fizyczną w żywych istotach, stanowi w dziejach nauki przełom, którego skala dorówna zapewne teorii ewolucji, odkryciu kodu genetycznego czy konstrukcji komputera.

Witold Marciszewski

1. Wstęp

1.1. Filozofia XXI wieku nie będzie filozofią uprawianą w izolowanych szkołach, posługujących się hermetycznym językiem, skupionych wokół doktryny mistrza. Złożoność zagadnień filozoficznych wymaga prowadzenia badań w sposób: (a) problemowy; (b) analityczno-systematyczny; (c) zespołowy i interdyscyplinarny. Odpowiednio zmodernizowana fenomenologia może stać się integralną częścią tego typu badań. Wymaga to precyzyjnego sformułowania jej problemów oraz określenia metod ba-

* Artykuł stanowi poprawioną i znacznie rozszerzoną wersję referatu wygłoszonego na międzynarodowej konferencji *Aktualność Husserla* (w ramach II Zjazdu Polskiego Towarzystwa Fenomenologicznego, Warszawa 22. 11. 2003), a następnie na seminarium z filozofii nauki prowadzonym przez prof. M. Tempczyka (Toruń 7. 12. 2003). Treść referatu rozszerzyłem o prezentację oraz krytykę współczesnej wersji psychologizmu w filozofii logiki i matematyki, jaką sformułowano na gruncie *cognitive science of mathematics*.

dawczych, którymi się posługuje. Bez wyrafinowanej metateorii fenomenologia pozostanie zbiorem bardziej lub mniej pomysłowych komentarzy do prac Husserla, Ingardena czy Merleau-Ponty'ego. Będzie ruchem filozoficznym, lecz nie filozoficzną dyscypliną rozwijaną w sposób systematyczny. Najgorszy scenariusz dla fenomenologii polegałby na sprowadzeniu jej do egzegezy manuskryptów mistrza (do filozoficznej paleografii). Nie taka była intencja wybitnych twórców różnych wersji fenomenologii.

1.2. Czy Husserl jest filozofem aktualnym? Odpowiedź na to pytanie zależy od przyjętych kryteriów aktualności poglądów danego filozofa. W słabym sensie *filozof aktualny* to taki, którego idee i twierdzenia są wciąż dyskutowane (niezależnie od ich wartości poznawczej). W mocnym sensie *filozof aktualny* to taki, którego wyniki poznawcze stanowią trwały wkład w rozwój określonego działu filozofii (lub analizę jakiegoś problemu) oraz są punktem wyjścia programu realizowanego przez grupę badaczy. Husserl jest niewątpliwie filozofem aktualnym w pierwszym znaczeniu. Świadczą o tym liczne konferencje i komentarze poświęcone interpretacji jego dzieł. Skłaniam się do twierdzenia, że jest on filozofem aktualnym także w drugim znaczeniu. Decydują o tym analityczne i heurystyczne walory jego prac (zwłaszcza wczesnych). Wkład Husserla w rozwój epistemologii i filozofii umysłu doceniany jest nie tylko przez sympatyków fenomenologii. Z perspektywy filozofii języka oraz filozofii logiki i matematyki wciąż aktualna pozostaje Husserlowska krytyka psychologizmu, daleko wykraczająca poza wcześniejsze analizy B. Bolzany i G. Fregego. Z perspektywy powstającej współcześnie neurofenomenologii i neurokognitywnej teorii świadomości inspirujące są przeprowadzone przez Husserla wnikliwe analizy różnych odmian świadomości i intencjonalności. Pełnią one ważną funkcję heurystyczną wobec teorii *stricte* naukowych budowanych obecnie w ramach kognitywistyki. Pod wieloma względami są dla nich nie tylko inspiracją, lecz także wyzwaniem.

1.3. W wielu wypadkach wyniki uzyskane przez Husserla zasługują na systematyczne, a nie tylko apologetyczno-komentujące rozwinięcie. Ważne jest, aby takie kontynuacje prowadzić w sposób maksymalnie krytyczny, w konfrontacji z wszelkimi relewantnymi rezultatami uzyskiwanymi w ramach filozofii analitycznej i multidyscyplinarnej kognitywistyki. Pozwoliłoby to wyprowadzić Husserlowską fenomenologię z zaklętego kręgu „sztuki tylko dla wtajemniczonych". Nie należy jednak oczekiwać, że można tego dokonać z zachowaniem całego inwentarza idei fenomenologicznych, które często nie uzyskują poziomu jasności i precyzji niezbędnego do intersubiektywnej oceny ich wartości poznawczej.

W artykule skupiam się na wybranych aspektach Husserlowskiej krytyki psychologizmu w logice, którą następnie kontrastuję z wybranymi poglądami współczesnych kognitywistów. Przed przystąpieniem do realizacji tego zadania zwracam uwagę na sposób, w jaki Husserl określa relację filozofii do nauk szczegółowych pod koniec I tomu *Badań logicznych*. Ujęcie to, a przynajmniej niektóre jego aspekty, pozostaje wciąż aktualne. Rekonstruując stanowisko Husserla kieruję się zasadą życzliwości. Pomijam twierdzenia, które dziś uznalibyśmy za anachroniczne, natomiast akcentuję te argumentacje, które mogą stanowić inspirację dla filozofów współczesnych.

2. Nauka a filozofia w świetle *Badań logicznych*

2.1. W punkcie wyjścia swoich rozważań Husserl odróżnia naukę rozumianą jako zespół czynności poznawczych od nauki jako wytworu tychże czynności (s. 274)[1]. W obu wypadkach jedno z podstawowych pytań filozoficznych dotyczących nauki wiąże się z warunkami możliwości jej istnienia: *jak możliwa jest nauka*? Ponieważ poznanie naukowe ma charakter teoretyczny w tym sensie, że jest zawsze wyrażone za pomocą określonych teorii, zatem filozof pyta: *jak możliwa jest teoria naukowa*? Skoro poszczególne twierdzenia składające się na teorie naukowe roszczą pretensje do prawdziwości, otrzymujemy kolejne pytanie: *jak możliwa jest prawda*? (s. 284). Istotne jest to, że mówiąc o zbiorze warunków możliwości (nauki, teorii, prawdy) Husserl wyróżnia dwa ich rodzaje: (a) warunki realne (psychologiczne, antropologiczne) związane z kondycją poznawczą określonej klasy podmiotów poznania oraz (b) warunki idealne, które dalej dzieli na noetyczne (związane z ideą poznania jako takiego) i logiczne. Oto komentarz Husserla (s. 287):

> (...) pytając o idealne warunki możliwości poznania w ogóle, a zwłaszcza poznania teoretycznego, ostatecznie dochodzimy do pewnych praw, które podstawę swą mają jedynie w treści poznania, *resp.* w pojęciach kategorialnych, którym ona podlega, i są tak abstrakcyjne, że nie zawierają w sobie

[1] Wszystkie odnośniki, jeśli nie zaznaczono inaczej, dotyczą I tomu *Badań logicznych* w przekładzie J. Sidorka (Warszawa: PWN, 2006).

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

już niczego z poznania jako aktu podmiotu poznającego. Właśnie te prawa, *resp.* podbudowujące je pojęcia kategorialne, stanowią to, co można rozumieć przez warunki możliwości teorii w ogóle w sensie obiektywno-idealnym.

2.2. Zdaniem Husserla filozof nigdy nie przejmuje kompetencji badacza-specjalisty w zakresie logiki, matematyki czy nauk empirycznych. Stara się raczej osiągnąć wgląd bądź zrozumienie tego, czym są podstawowe kategorie teoretyczne tych dyscyplin. Praca badacza-specjalisty oraz praca filozofa mają zatem charakter komplementarny: są to wzajemnie uzupełniające się i współzależne grupy czynności poznawczych. Można w tym wypadku mówić o swoistym podziale pracy, który Husserl ilustruje na przykładzie matematyka i filozofa matematyki (s. 302, 303):

> Natura rzeczy zdecydowanie wymaga tu podziału pracy. Konstrukcja teorii, ścisłe i metodyczne rozwiązanie wszelkich problemów formalnych zawsze pozostaną właściwą domeną matematyka. (...) Matematyk w rzeczywistości nie jest czystym teoretykiem, lecz tylko zręcznym technikiem, niejako konstruktorem, który zapatrzony w związki formalne, buduje teorie niczym dzieła sztuki technicznej. Tak jak praktyczny mechanik może konstruować maszyny, nie mając ostatecznego wglądu w istotę przyrody i rządzących nią praw, tak też matematyk może konstruować teorie liczb, wielkości, wnioskowań, mnogości, nie mając ostatecznego wglądu w istotę teorii w ogóle i w istotę warunkujących ją pojęć i praw. Podobnie mają się wszak sprawy we wszystkich „naukach szczegółowych".

2.3. Filozofowi nie wystarcza konstatacja, że dzięki teoriom naukowym osiągamy lepszą orientację w świecie, ani to, że znajomość określonych praw i prawidłowości umożliwia dokonywanie udanych przewidywań i trafnych wyjaśnień. Filozof w aktach ideacji stara się ująć istotę tego, czym jest: prawo, norma, forma logiczna, liczba, czas, przestrzeń, przyczyna i skutek, poznanie, myślenie, świadomość *etc.* Poznanie filozoficzne jest więc naturalną kontynuacją i uzupełnieniem poznania naukowego. Samo istnienie nauki jest problem filozoficznym, dlatego rozważania na temat tego, czym jest nauka, mają nieredukowalnie filozoficzny aspekt (s. 304). Badanie podstawowych kategorii naszego myślenia oraz kategorii zakładanych przez teorie naukowe jest domeną czystej logiki i ontologii. Husserl używa tu określenia „formalne kategorie przedmiotowe" i podaje następujące ich przykłady: przedmiot, stan rzeczy, jedność, wielość, liczba, odniesienie i powiązanie (s. 292). Przynajmniej we wczesnym okresie swej twórczości Husserl z jednej strony mocno akcentował istnienie problemów ontologicznych uwikłanych w teorie naukowe (nauka jest ważna dla filozofii), z drugiej zaś strony podkreślał metodologiczną oraz treściową odrębność problemów filozoficznych. W tym kontekście wciąż aktualna pozostaje następująca wypowiedź (s. 302–304):

> *Badanie filozoficzne zakłada całkiem inne metody i dyspozycje, tak jak stawia sobie całkiem inne cele. Nie chce ono wtrącać się w sprawy badacza specjalisty, lecz tylko uzyskać wgląd w sens i istotę jego osiągnięć, w odniesieniu do metody i do rzeczy. (...) Badanie filozoficzne uzupełnia naukowe osiągnięcia przyrodnika i matematyka. Ars inventiva badacza specjalisty i krytyka poznania filozofa, to uzupełniające się wzajemnie czynności naukowe, dzięki którym dochodzi dopiero do pełnej jedności teoretycznej.*

3. Forma logiczna

3.1. Husserl miał dobrą orientację, jeśli chodzi o funkcjonujące w jego czasach filozoficzne interpretacje logiki. Zdawał sobie również sprawę z tego, że problemów filozofii logiki nie da się postawić ani rozstrzygnąć w obrębie samej logiki. Ich ujęcie wymaga spojrzenia na logikę z szerszej perspektywy. We wprowadzeniu do I tomu *Badań logicznych* (s. 25–26) za szczególnie doniosłe uznał cztery problemy:

- Czy logika jest dyscypliną czysto teoretyczną, czy stosowaną, czy też jest zwykłą umiejętnością praktyczną?
- Czy logika jest nauką niezależną od innych dyscyplin (w szczególności od psychologii i metafizyki)?
- Czy logika jest nauką formalną, którą interesuje wyłącznie *forma* poznania, czy również jego *materia*?
- Czy logika jest dyscypliną aprioryczną i dedukcyjną, czy też empiryczną i indukcyjną?

Odpowiedź na powyższe pytania zależy w dużej mierze od tego, jak wyznaczymy przedmiot logiki oraz jaką przyjmiemy interpretację jej twierdzeń. Jeśli chodzi o pierwsze pytanie, to *prima facie* nie ma sprzeczności w przyjęciu tezy, że istnieje zarówno logika teoretyczna, logika stosowana, jak też logika interpretowana jako klasa sprawności, umiejętności czy dyspozycji logicznych (tzw. logika przyrodzona[2]). Jeśli cho-

[2] W. Marciszewski (1991, s. 32) określa *logikę przyrodzoną* jako „układ dyspozycji umysłu uzdalniających go do przetwarzania informacji z zachowaniem ich prawdziwości, nawet gdy ta informacja nie jest wyrażona w jakimkolwiek języku (systemie symboli), będąc

dzi o drugie pytanie, to każda próba odpowiedzi na nie powinna zakładać dokładnie zdefiniowane pojęcie zależności jednej nauki od drugiej (ewentualnie wielu rodzajów takich zależności). Stawiając trzecie pytanie, musimy odwołać się do określonej koncepcji formy logicznej, zaś sformułowanie czwartego pytania zakłada określoną koncepcję poznania apriorycznego.

3.2. Autor *Badań logicznych* zwraca uwagę (s. 36), iż podobnie, jak możliwe są rozmaite dyscypliny naukowe zajmujące się odkrywaniem prawd dotyczących świata, tak samo możliwa jest *nauka o nauce*, jak prowizorycznie określa logikę. Uzasadnienia, dowody, przewidywania i wyjaśnienia formułowane na gruncie nauk empirycznych zakładają obowiązywalność określonych dyrektyw logicznych wyrażających aprioryczne prawa. Husserl formułuje tę myśl w nieco metaforyczny sposób (s. 38):

> Gdziekolwiek uzasadniając wznosimy się od danych poznań do nowych, tam też w drogach, jakimi przebiega uzasadnienie, tkwi pewna forma, wspólna temu i niezliczonym innym uzasadnieniom i pozostająca w pewnym stosunku do ogólnego prawa, pozwalającego za jednym zamachem uprawomocnić wszystkie te uzasadnienia.

Logiczne schematy inferencyjne uczestniczą we wszelkich procedurach dowodowych i uzasadniających przeprowadzanych na gruncie dowolnej dyscypliny naukowej (od fizyki matematycznej po psychologię empiryczną). Jak wiemy z logiki współczesnej, każdy system logiki można budować w postaci systemu praw (metodą aksjomatyczną) bądź jako system reguł (np. metodą dedukcji naturalnej). Przy czym każdej regule odpowiada określone prawo[3].

---

zapisaną jedynie w tworzywie biologicznym." Warto dodać, że niektórzy kognitywiści (np. J. Fodor) oraz teoretycy informacji (np. M. Lubański) przyjmują szerokie rozumienie *języka* jako dowolnej struktury kodującej informację. Zakłada się tutaj, że *każde* przetwarzanie informacji odbywa się przy udziale *jakiegoś* zbioru symboli (naturalnych lub sztucznych), a więc ma charakter językowy. W tym właśnie kontekście Fodor wprowadza pojęcie *języka myśli*.

[3] J. M. Bocheński (1993, s. 110–111) na temat reguł i praw logicznych pisze: „Prawo jest zdaniem stwierdzającym *co jest*; reguła nie jest zdaniem (w sensie logicznym – R. P.), ale wskazówką, nakazem powiadającym, jak można albo powinno się *działać*. (...) W logice reguła musi być sformułowana w metajęzyku; prawa logiczne zaś mogą być przedmiotowe lub metajęzykowe. Zasadnicza różnica między prawami i regułami jest taka, że prawa są prawdziwe lub fałszywe, natomiast reguły mogą być słuszne czy sprawne, ale ściśle mówiąc, nie są prawdziwe, ani fałszywe. Jeśli chodzi o nasze rozumienie stosunku między

3.3. Cechą charakterystyczną praw logiki i związanych z nimi dyrektyw jest możliwość stosowania ich niezależnie od specyfiki dziedzin przedmiotowych poszczególnych dyscyplin nauki. Logika jest „czysta" w tym sensie, że – jak pisze Husserl – jej prawa/reguły są „uwolnione od wszelkiego odniesienia do jakiegokolwiek ograniczonego obszaru poznania" (s. 39). Niezależność formy logicznej od jakiegokolwiek konkretnego obszaru wiedzy (od materii poznania) umożliwia istnienie logiki jako nauki o nauce. Bez tej niezależności formy logicznej istniałyby tylko logiki odpowiadające poszczególnym dyscyplinom, a nawet poszczególnym teoriom naukowym. Tymczasem jest faktem, że te same formy logiczne odkrywamy we wnioskowaniach dotyczących dowolnych dziedzin przedmiotowych (s. 42).

3.4. Współcześnie mówi się w tym kontekście o uniwersalności lub/i przedmiotowej neutralności logiki. Idea ta była wielokrotnie krytykowana przez zwolenników różnych wersji pluralizmu logicznego, zgodnie z którym teorie naukowe dotyczące osobliwych obszarów przedmiotowych (np. mikroświata lub przedmiotów fikcyjnych) mogą wymagać istotnie różnych logik. W odniesieniu do mechaniki kwantowej takie postulaty sformułowali jeszcze w latach 30-tych Birkhoff i von Neumann. Jednak do dnia dzisiejszego zdania są podzielone, czy rzeczywiście logika zakładana przez teorie dotyczące mikroświata musi być nieklasyczna (wielowartościowa, parakonsystentna czy jeszcze inna)[4].

U Husserla problem wielości logik w zasadzie się nie pojawia. Przyjmuje on jako założenie nie podlegające dyskusji, iż te same schematy inferencyjne (formy/struktury logiczne) odkrywamy we wnioskowaniach przeprowadzanych na gruncie matematyki, fizyki, chemii czy psychologii empirycznej. Można jednak przypuszczać, że wiedza o istnieniu logik nieklasycznych nie miałaby wpływu na ocenę psychologizmu, podobnie jak istnienie geometrii nieeuklidesowych nie stanowiło

regułami a prawami w logice, ważną intuicję zawdzięczamy stoikom. Mawiali oni, że argument otrzymany przez podstawienie w regule (a zatem i sama reguła) jest sprawny wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwe jest zdanie warunkowe, którego poprzednik jest iloczynem jego przesłanek, a następnik – jego wnioskiem. (...) Ta zasada pozwala więc przekładać system złożony z reguł na system składający się z praw, i odwrotnie. Rzecz to w naszej sprawie ważna, jako że ontologia była zwykle systemem praw, podczas gdy logikę formułowano często jako system reguł."

[4] Zagadnienie to omawiam szczegółowo w książce *Spór o zasadę niesprzeczności. Studium z zakresu filozoficznych podstaw logiki*, Lublin: TN KUL, 2000.

dlań argumentu na rzecz stanowiska psychologistycznego w filozofii matematyki.

3.5. Kluczowe dla zrozumienia stanowiska Husserla jest odróżnienie czystej formy/struktury wnioskowania od jej realizacji (implementacji) w konkretnych procesach/czynnościach wnioskowania. Ta sama forma logiczna może mieć wiele jednostkowych realizacji we wnioskowaniach przeprowadzanych przez różnych ludzi oraz przez tego samego człowieka w różnym czasie (i nie tylko przez ludzi, lecz także przez odpowiednio oprogramowane maszyny matematyczne). Podlegająca wielorakiej realizacji forma logiczna (wzięta *in specie*) jest obiektem abstrakcyjnym (idealnym). Logika, w przeciwieństwie do psychologii empirycznej, nie zajmuje się konkretnymi procesami/czynnościami umysłowymi realizowanymi przez ludzi bądź maszyny. Chociaż w procesach tych implementowane są abstrakcyjne formy, algorytmy czy zasady przetwarzania informacji, to logika jako dyscyplina teoretyczna bada czyste (wyabstrahowane) formy/struktury, co czyni ją pokrewną czystej matematyce.

4. Prawa a dyrektywy i normy: problem psychologizmu

4.1. Husserl przyjmuje, iż logika (zwłaszcza tzw. logika stosowana) jest – w pewnym sensie – dyscypliną normatywną. Jednakże samo wskazanie na normatywny wymiar logiki nie wystarcza w dyskusji z psychologizmem. Autor *Badań logicznych* przytacza interesującą wypowiedź M. Drobischa z *Neue Darstellung der Logik*, która pozwala uchwycić problem, o jaki tutaj chodzi (s. 57–58):

> Myślenie może w dwojakim sensie być przedmiotem badania naukowego (...). Istnieją (...) zarówno przyrodnicze prawa myślenia, jak i jego prawa normatywne (...), którymi ma się ono kierować, ażeby prowadzić do prawdziwych wyników. Przebadanie przyrodniczych praw myślenia jest zadaniem psychologii, natomiast ustalenie praw normatywnych jest zadaniem logiki.

4.2. Dlaczego, zdaniem Husserla, powyższa dystynkcja nie wystarcza jako argument przeciwko psychologizmowi? Otóż psychologista zgodziłby się, że logika ma charakter normatywny, jednak interpretowałby ten fakt psychologistycznie, tzn. starałby się wyprowadzić obowiązywalność norm logicznych ze struktury ludzkiego umysłu (psychiki). Przyjrzyjmy się tej kwestii nieco bliżej.

Zdaniem Husserla każda dyscyplina normatywna opiera się na pewnej dyscyplinie teoretycznej. Z każdą normą związana jest abstrakcyjna treść, której badaniem zajmuje się określona dyscyplina teoretyczna. Uzasadnienie obowiązywalności jakiejkolwiek normy (dyrektywy) wymaga odwołania się do praw odpowiedniej dyscypliny teoretycznej (s. 62–72). Wiemy, że arytmetyka tłumaczy praktyczną umiejętność liczenia, a także skuteczność określonych algorytmów obliczeniowych. Na przykład matematyczne prawo, które głosi, że iloczyn sumy i różnicy dwóch dowolnych liczb równa się różnicy ich kwadratów, tłumaczy i uzasadnia obowiązywalność następującej dyrektywy: aby obliczyć iloczyn sumy i różnicy dwóch liczb, należy utworzyć różnicę ich kwadratów. W podobny sposób geometria teoretyczna tłumaczy i uzasadnia praktyczną umiejętność mierzenia pól, zaś poszczególne działy fizyki teoretycznej dają podstawy określonym technologiom, tłumacząc zarazem ich powodzenie i skuteczność. To samo można powiedzieć o prawach teoretycznej chemii czy biologii i ich zastosowaniach. Analogicznie jest w wypadku logiki. Każdemu prawu logiki odpowiada reguła inferencyjna mówiąca, w jaki sposób należy postępować (wnioskować), aby od prawdziwych przesłanek przechodzić do prawdziwych wniosków. Przy czym w abstrakcyjnych prawach czystej logiki nie są bezpośrednio obecne żadne elementy normatywne. Zawierają je dopiero dyrektywy określonej logiki stosowanej wyrażone w odpowiedniej stylizacji.

4.3. Problem psychologizmu w logice, jak go rozumie Husserl, pojawia się wówczas, gdy stawiamy następujące pytanie:

> Do jakiego typu praw należy się odwołać, aby uzasadnić (wyjaśnić, uprawomocnić) obowiązywalność logicznych dyrektyw/norm wnioskowania?

Psychologista nie twierdzi, że logika nie ma charakteru normatywnego. Utrzymuje jedynie, że racji obowiązywalności dyrektyw logicznych dostarczają empiryczne prawa psychologii, a nie prawa domniemanej czystej logiki. Logika w sensie właściwym jest psychologią stosowaną. Psychologistycznie zinterpretowane prawa logiki (jako *prawa myślenia* w odróżnieniu od Fregowskich *praw myśli* lub *praw prawdziwości*) są w gruncie rzeczy prawami krypto-przyrodniczymi. Używając pojęć współczesnej metodologii nauk powiedzielibyśmy, że są to prawa wyższego rzędu z klauzulą *ceteris paribus*, czyli takie prawa, które obowiązują, o ile spełniony jest określony układ warunków towarzyszących. Występowanie błędów logicznych ich nie falsyfikuje, gdyż błędy logiczne popełniamy na skutek udziału rozmaitych czynników (zewnętrznych lub wewnętrznych) zaburzających nasze procesy umysłowo-poznawcze.

4.4. Psychologizm w filozofii logiki jest odmianą empiryzmu. W. R. Hamilton wprost twierdził, że skoro prawa logiki są identyczne z prawami przyrodniczymi, zatem logika jest czymś w rodzaju *fizyki myślenia*. Z kolei zdaniem G. Heymansa, schematy inferencyjne wyrażające prawa myślenia są podobne do wzorów chemicznych. Logika jest zatem czymś w rodzaju *chemii myślenia*. Niektórzy współcześni przedstawicieli neuronauk twierdzą, że logika, którą się posługujemy, jest rezultatem określonej organizacji naszych mózgów. Systemy poznawcze o innych mózgach lub strukturach mózgopodobnych najprawdopodobniej dysponowałyby również inna logiką (por. dalsze uwagi na ten temat).

4.5. Zdaniem skrajnych empirystów w logice nie ma prawd koniecznych, których negacja byłaby niemożliwa do pomyślenia[5]. Negacja prawd logicznych jest co najwyżej „trudna do pomyślenia" (dotyczy to nawet prawa niesprzeczności). Niektóre asocjacje są tak głęboko ustalone w strukturze neuronowej naszych mózgów, iż tworzą to, co nazywamy „podstawowymi prawami ludzkiego umysłu" (J. S. Mill). Jeżeli prawom logiki nie przysługuje cecha konieczności, to ludzki umysł nie musi funkcjonować według niezmiennego zbioru praw/reguł/algorytmów. To, jaka logika rządzi ludzkimi procesami poznawczymi, jest co najmniej częściowo wyznaczone przebiegiem ewolucji gatunku *homo sapiens* i w tym zakresie ma charakter przygodny. Inne możliwe ścieżki ewolucyjne generowałyby inne możliwe systemy poznawcze, które z kolei generowałyby inne możliwe logiki. Można co najwyżej twierdzić, że z określonym rodzajem systemu poznawczego stowarzyszony jest określony rodzaj logiki. Jednak i to twierdzenie wymaga uzasadnienia. Ostatecznie empirysta przyjmuje, że uzasadnienie obowiązywalności norm logicznych (lub szerzej: norm poznawczych) opiera się na zasadach (prawach) organizacji ewolucyjnie wygenerowanych systemów umysłowo-poznawczych.

---

[5] Współczesne stanowiska empirystyczne w logice (w wersji K. Ajdukiewicza i V. W. O. Quine'a) omawiam w artykule *Empirystyczne interpretacje praw logiki*, „Filozofia Nauki" 5 (1997), nr 4, s. 43–56.

5. Prawa empiryczne a prawa czystej logiki i matematyki

5.1. W przekonaniu Husserla kardynalny błąd psychologistów polega na tym, iż nie respektują oni (należałoby dodać: w sposób zamierzony) dystynkcji na logikę czystą i stosowaną. W konsekwencji nie odróżniają również (s. 94):

- praw idealnych (apriorycznych) od praw realnych (empirycznych),
- norm ugruntowanych w prawach czystej logiki od norm ugruntowanych empirycznie,
- konieczności logicznej od konieczności realnej (empirycznej, nomologicznej, fizycznej),
- ścisłej ogólności od empirycznej generalizacji,
- zależności treściowych (racji logicznych) od związków przyczynowo-skutkowych.

5.2. Już Frege zwracał uwagę, że w innym znaczeniu używamy słowa „prawo" mówiąc o prawach logiki i matematyki, w innym zaś, gdy mówimy o empirycznych prawach psychologii. Mamy w tym wypadku do czynienia z różnicami występującymi zarówno na poziomie przedmiotowym (specyfika obiektów), jak i na poziomie metodologicznym (specyfika praw). Prawa psychologiczne dotyczą związków współistnienia i następstwa realnych zdarzeń psychofizycznych zachodzących w ludzkich organizmach. W przeważającej mierze są to prawa przyczynowe. Psychologia empiryczna nie dostarcza praw ścisłych, a jedynie indukcyjnych uogólnień dotyczących domniemanych prawidłowości zachodzących w dziedzinie zjawisk psychicznych (najczęściej o charakterze statystycznym). Z punktu widzenia metodologii nauk generalizacje psychologiczne mają zawsze charakter probabilistyczny i jako takie podlegają rewizji (nie są bezwyjątkowe).

5.3. Wyraźnie kontrastuje to z charakterystyką praw sylogistyki, rachunku zdań, arytmetyki liczb naturalnych czy geometrii nieeuklidesowych. Prawa czystej logiki i matematyki są pozbawione treści empirycznej w tym sensie, iż nie zakładają ani nie przekreślają istnienia żadnego konkretnego faktu empirycznego[6] (s. 95–101). W ich sformułowaniach nie ma również odwołań do żadnych czynności umysłowo-poznawczych, dlatego

[6] Podobne uwagi wypowiada L. Wittgenstein w swoim *Traktacie*. Powszechnie znany jest fakt, że Wittgenstein czytał Husserla i wyrażał się o jego pracach z dużym uznaniem.

– jak pisze Husserl (s. 101) – „wykluczone jest, by prawa logiczne były prawami psychicznych czynności albo ich wytworów".

Własności metodologiczne praw psychologicznych, jak również specyfika ich przedmiotu, sprawiają, iż wykluczone jest, aby mogły one stanowić podstawę praw czystej logiki i matematyki (oraz pochodnych względem nich dyrektyw). Zdaniem Husserla analogia między czystą logiką i czystą matematyką jest w tym wypadku bardzo instruktywna, ponieważ niemal wszystko, co da się powiedzieć o relacji między matematyką a psychologią, można również powiedzieć o relacji między logiką a psychologią (s. 207).

Psychologizm w matematyce – analogicznie do psychologizmu w logice – polegałby na próbie uprawomocnienia praw matematycznych za pomocą praw psychologii empirycznej. Nikt jednak nie uznaje teorii matematycznych (np. teorii liczb) za fragment psychologii, chociaż bez liczenia nie mielibyśmy liczb, zaś bez sumowania sum. Husserl ironizuje, że matematyk mógłby się tylko roześmiać, gdyby ktoś zaproponował mu studia psychologiczne w celu rzekomo głębszego zrozumienia jego ustaleń teoretycznych. Świat (dziedzina dyskursu) czystej logiki i matematyki oraz świat (dziedzina dyskursu) psychologii są po prostu radykalnie odrębne, co nie musi oznaczać, że procesy umysłowe nie są rządzone regułami logicznymi (s. 207–211).

5.4. Chociaż pojęcia, prawa i teorie logiczne (matematyczne) tworzone są przy współudziale złożonych czynności umysłowych, nie wynika stąd możliwość ich uprawomocnienia za pomocą empirycznych ustaleń psychologii czy neurobiologii (jak współcześnie sugeruje G. Edelman, a także G. Lakoff i R. Núñez). Wyjaśnienie ludzkiej kompetencji logiczno-matematycznej nie jest tym samym, co wyjaśnienie obowiązywalności praw i dyrektyw logiczno-matematycznych.

Żadne prawo logiki czystej nie dotyczy wprost sądów w sensie psychologicznym, rozumianych jako realne czynności spełniane przez określony organizm w procesach poznawczych. Nie oznacza to jednak, że prawa logiki nie mogą być (czy też nie są) implementowane w strukturze układu nerwowego jako zasady/algorytmy przetwarzania informacji. Przyjęcie jakiejś wersji realizmu logiczno-matematycznego nie wymaga odrzucenia tzw. logiki przyrodzonej czy cerebralnej (w sensie von Neumanna, Chomsky'ego, Fodora czy Marciszewskiego). To, czego dotyczą prawa czystej logiki i matematyki oraz jaka jest podstawa ich obowiązywalności, to jeden problem. Czy i w jakim sensie niektóre spośród tych praw są ewolucyjnie implementowane w ludzkich i pozaludzkich systemach poznawczych, to problem drugi.

Kluczowa w argumentacji Husserla jest dystynkcja między tym, co realne (czasoprzestrzenne, jednostkowe) i tym, co idealne (abstrakcyjne, uniwersalne). Podział ten dotyczy: praw, sądów, przedmiotów i stanów rzeczy. Jest to podział o charakterze ontologiczno-epistemologiczno-metodologicznym. Tylko konsekwentna eliminacja obiektów idealnych/abstrakcyjnych z uniwersum dyskursu logiki i matematyki (bądź ich redukcja do realnych obiektów czasoprzestrzennych) stwarzałaby możliwość realizacji programu empirystycznego w filozofii logiki i matematyki.

6. Psychologizm w logice a relatywizm gatunkowy

6.1. Tezę relatywizmu gatunkowego Husserl formułuje w następujący sposób (poniżej podaję ją w formie parafrazy modyfikującej formę, lecz zachowującej treść):

> Dla każdego gatunku istot zdolnych do wydawania sądów prawdą jest to, co wyznacza charakterystyczna dlań konstytucja oraz związane z nią prawa myślenia. Osobniki należące do różnych gatunków bądź typów struktur fizycznych mogą uznawać za prawdziwe wykluczające się zbiory twierdzeń, zaś ich systemy poznawcze mogą funkcjonować w oparciu o różne logiki. (por. s. 148)

Innymi słowy, relatywista gatunkowy utrzymuje, że empiryczne prawa myślenia mogą się zmieniać wraz z gatunkiem lub typem struktury fizycznej, w której są implementowane. Nasza (ludzka) logika wyraża jedynie strukturę naszego (ludzkiego) myślenia. Przytaczając to twierdzenie Husserl jednocześnie zwraca uwagę, że ograniczenie zakresu obowiązywalności praw logiki do określonego gatunku lub typu struktury fizycznej całkowicie zmienia ich sens. W takim wypadku należałoby raczej mówić o psychologicznych prawach myślenia (czy też zasadach przetwarzania informacji), a nie o prawach logiki czystej.

6.2. Być może psychologiczne *prawa myślenia* rzeczywiście podlegają gatunkowym zróżnicowaniom. Jednak mówienie o prawach logiki wyłącznie jak o prawach myślenia jest nietrafne. Idealne (abstrakcyjne) prawa czystej logiki obowiązują dla każdej możliwej świadomości oraz dla

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

każdego systemu poznawczego o dowolnej konstrukcji psychofizycznej (s. 228). Wszelkie istoty o zbliżonych zdolnościach ejdetycznych sformułowałyby w przybliżeniu ten sam zbiór idealnych prawd logicznych i matematycznych. Ewentualne różnice zachodziłyby na poziomie notacji lub sposobu konstrukcji systemu teoretycznego, lecz nie na poziomie ich abstrakcyjnego (idealnego) sensu.

6.3. W swojej argumentacji Husserl zakłada bardzo mocne (absolutystyczne) pojęcie prawdy. Jego zdaniem coś jest prawdą „niezależnie od tego, czy uchwytują ją w swoich sądach ludzie czy nieludzie, aniołowie czy bogowie" (s. 149). Prawa logiki czystej są prawami idealnymi ugruntowanymi w idealnym sensie pojęć prawdy, sądu, przedmiotu i własności. Pojęcia te zakładane są przez wszystkie nauki, dlatego prawa logiki czystej należą do warunków ich możliwości (s. 152). Nie jest możliwe uprawianie jakiejkolwiek nauki ani realizacja jakiejkolwiek czynności poznawczej poza logiką, gdyż poza logiką jest tylko absurd. Jeśli ktoś twierdzi inaczej, posługuje się innymi pojęciami prawdy, logiki i znaczenia.

6.4. Na uwagę zasługuje to, że zdaniem autora *Badań logicznych* możliwe jest istnienie wielu różnych form życia psychicznego i umysłowego. Jednak zmiana konstytucji gatunkowej nie pociąga za sobą zmiany praw logiki czystej, gdyż obowiązują one w każdym świecie fizycznie i psychologicznie możliwym. Przekonanie to w sposób dobitny wyraża następująca wypowiedź Husserla (s. 183–184):

> Aniołowie uprawiający matematykę mogą mieć inne metody liczenia niż my – ale czy inne aksjomaty i teorematy? (...) Niedorzeczne staje się mówienie o zmiennych prawach myślenia dopiero wtedy, gdy rozumie się przez nie prawa czysto logiczne i matematyczne. (...) Są to czysto teoretyczne prawdy idealne, zakorzenione jedynie w swej zawartości znaczeniowej i nigdy poza nią nie wykraczające. Nie może ich przeto dotknąć żadna rzeczywista czy fikcyjna zmiana w świecie.

6.5. Odróżnienie psychologicznych praw myślenia od praw logiki czystej Husserl ilustruje na przykładzie dwóch wersji prawa niesprzeczności (PN). Psychologiczna wersja PN głosi, że:

> U tej samej jednostki albo w tej samej świadomości podczas dowolnie krótkiego odcinka czasu nie mogą utrzymywać się kontradyktoryczne akty przeświadczenia.

Tę wersję PN Husserl uznaje za wątpliwą generalizację empiryczną, która zapewne nie jest spełniona przez wszystkich ludzi w każdym czasie i w dowolnych okolicznościach. Natomiast zupełnie inny charakter ma następująca wersja prawa niesprzeczności (jego treść podaję w formie parafrazy):

> W odniesieniu do dowolne wybranej pary kontradyktorycznych aktów przeświadczenia – należących do tej samej jednostki albo rozłożonych na różne, współistniejących w tym samym czasie albo rozdzielonych przez dowolnie długie odcinki czasu – obowiązuje z absolutną mocą i bez wyjątków prawo, że oba człony każdej z par nie są prawdziwe. (por. 111–112)

Prawo to obowiązuje dla każdego podmiotu poznającego istniejącego w dowolnym czasie, niezależnie od jego specyficznej konstytucji psychofizycznej. Idealna, transempiryczna niemożliwość prawdziwości twierdzeń (klasycznie) sprzecznych nie ma nic wspólnego z faktem empirycznym polegającym na akceptowaniu lub odrzucaniu sądów przez określone jednostki w danym czasie[7].

6.6. Czysta logika zajmuje się ustalaniem ponadczasowych praw, które w swej treści nie zależą od takiej czy innej historii naturalnej danego gatunku ani od psychofizycznej konstytucji jego przedstawicieli. Zależność zachodzi tutaj w odwrotnym kierunku: procesy ewolucyjne doprowadziły do ukształtowania umysłów/mózgów zdolnych do poznania tego rodzaju praw, ponieważ wszystko, co zachodzi w dowolnym świecie empirycznie/fizycznie możliwym, spełnia te prawa.

Prawa logiki czystej można formułować w stylizacji semantycznej (jak najczęściej robi Husserl) bądź w stylizacji ontologicznej. W drugim wypadku prawa czystej logiki oraz czystej matematyki stają się prawami ontologii formalnej określającej idealne ramy tego, co może się wydarzyć w dowolnym świecie empirycznie/fizycznie możliwym. W II tomie *Badań logicznych* (cz. I, s. 118) Husserl stwierdza, iż prawom logiki czystej odpowiadają prawa ontologiczne dotyczące przedmiotów w ogóle. Prawa te obejmują wszystkie twierdzenia o istnieniu oraz prawdzie, które można sformułować niezależnie od jakiejkolwiek konkretnej materii poznania. Normatywny wymiar logiki zostaje więc ściśle powiązany z jej wymiarem ontycznym.

---

[7] Współczesne dyskusje wokół prawa niesprzeczności, toczone głównie w kontekście logiki parakonsystentnej, omawiam w Poczobut (2000).

Gdyby istniały światy różniące się od naszego zestawem praw fizycznych i gdyby w światach takich mogły istnieć wyrafinowane systemy umysłowo-poznawcze, podzielałyby one z nami pewien zbiór twierdzeń formalno-ontologicznych (praw czystej logiki i matematyki). Jest to jedna z możliwych interpretacji radykalnego antypsychologizmu Husserla, raczej trudna do pogodzenia z jego późniejszym transcendentalnym idealizmem. Taką interpretację nasuwają niektóre wypowiedzi autora *Badań logicznych* sformułowane w kontekście dyskusji na temat obowiązywalności prawa niesprzeczności. Husserl wyraźnie nawiązuje w nich do poglądów Leibniza, które w tym czasie uważał za najbliższe poglądom własnym. Do nich nawiązał później także Kurt Gödel. Natomiast w zgoła odmiennym kierunku poszły badania współczesnych kognitywistów.

7. *Cognitive Science of Mathematics* a teoria umysłu ucieleśnionego[8]

7.1. George Lakoff i Rafael Núñez w interesującej pracy: *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* (2000) sformułowali podstawy ważnego działu kognitywistyki, nazwanego przez nich *cognitive science of mathematics*. Swoją koncepcję z zakresu filozofii logiki i matematyki autorzy określają mianem *mind-based mathematics* lub *theory of embodied mathematics*. Głównym obiektem swojej krytyki czynią koncepcje platonizujące (w rodzaju realizmu strukturalistycznego), które zakładają, że ma sens mówienie o logice i matematyce poza ludzkim umysłem oraz poza światem umysłowych konstruktów.

Czym jest kognitywistyka matematyki (KM) w ujęciu Lakoffa i Núñeza Autorzy podają kilka charakterystyk. Oto dwie spośród nich: (a) KM jest teorią empiryczną badającą matematyczne kompetencje umysłu ucieleśnionego; (b) KM jest działem kognitywistyki zajmującym się badaniem mechanizmów neuronowych i kognitywnych leżących u podstaw poznania matematycznego. Głównym celem KM jest wyjaśnienie, w jaki sposób powstają abstrakcyjne pojęcia matematyczne – od stosunkowo prostych, jak pojęcia zbioru i liczby, po bardziej złożone, jak pojęcie continuum, granicy, fraktala, liczby pozaskończonej, hiperzbioru itd. Po-

[8] Rozwinięcie wielu problemów zasygnalizowanych w tym i kolejnym paragrafie zawiera mój artykuł: *Umysł matematyczny. Czy kognitywista może być matematycznym realistą?*, „Poznańskie Studia z Filozofii Humanistyki" (w druku).

nieważ matematyka nie zajmuje się wprost umysłem, zatem nie może badać samej siebie *jako wytworu umysłu*. Niezbędne do realizacji tego celu są metody oraz aparat pojęciowy nauk kognitywnych. KM nie jest więc częścią matematyki ani metamatematyki. Jest to integralny składnik teorii umysłu ucieleśnionego.

7.2. Odnosząc się do tych ogólnych twierdzeń warto zwrócić uwagę na różnice między *umiarkowaną* i *radykalną* wersją KM. Na gruncie koncepcji umiarkowanej kognitywista bada czynności poznawcze zaangażowane w uprawianie matematyki, takie jak konceptualizacja obiektów i struktur matematycznych, rozumienie matematyczne, uczenie się teorii matematycznych, wyobraźnia i inteligencja matematyczna, mechanizmy odkryć matematycznych itp. Jedno z ważniejszych zadań KM polega na rozpoznaniu neurofizjologicznych mechanizmów poznania matematycznego oraz (neuro)obliczeniowej realizacji pojęć matematycznych (w naturalnych i sztucznych sieciach neuronowych). Zajmując się tymi problemami kognitywista nie formułuje jednak mocnych twierdzeń ontologicznych na temat natury i sposobu istnienia obiektów matematycznych (ani na temat domniemanej matematyczności czy niematematyczności świata fizycznego). Tymczasem Lakoff i Núñez bronią w swojej książce koncepcji znacznie bardziej radykalnej. W ramach teorii matematyki ucieleśnionej formułują mocne twierdzenia o charakterze ontologicznym, epistemologicznym i semantycznym. Proponują więc określoną filozofię matematyki, która ich zdaniem stanowi naturalną konsekwencję wyników badań kognitywistycznych.

7.3. W punkcie wyjścia autorzy odrzucają koncepcję matematyki nazywaną przez nich ironicznie *Romance of Mathematics*, którą streszczają następujące twierdzenia (Lakoff, Núñez 2000, s. XV, 339–340):

(a) Matematyka jest abstrakcyjna, bezcielesna, a jednak realna. Przedmioty matematyki istnieją niezależnie od umysłów. Matematyka wytworzona przez człowieka jest fragmentem matematyki transcendentnej wobec umysłu/mózgu.

(b) Matematyka jest składnikiem uniwersum fizycznego. Istnieją ciągi Fibonacciego ukryte w kwiatach, fraktale zrealizowane w płatkach śniegu, elipsy ucieleśnione w orbitach planet lub liczba π ukryta w sferycznym kształcie gwiazd, planet czy baniek mydlanych. Matematyka wyznacza strukturę nie tylko naszego uniwersum, ale każdego uniwersum możliwego.

(c) Logika i matematyka są konstytutywne dla struktury samego rozumu – nie tylko ludzkiego, ale wszelkiego możliwego rozumu. Logika matematyczna wyraża sam rdzeń wszelkiej racjonalności.
(d) Nauka matematyki jest zarazem nauką języka natury, ponieważ „księga natury została napisana w języku matematyki". Jeśli istnieją w kosmosie odpowiednio inteligentne istoty, z pewnością mają dostęp poznawczy do obiektów i struktur matematycznych.
(e) Matematyka jest królową nauk. Tym, co czyni określoną dyscyplinę badawczą autentyczną nauką, pozwalając przekroczyć jej poziom protonaukowej idiografii, jest zdolność do budowy matematycznych modeli oraz przeprowadzania matematycznych obliczeń i predykcji.

7.4. Własną propozycję autorów można streścić za pomocą następujących twierdzeń (Lakoff, Núñez 2000, s. 2–4, 349–351, 377–399):
(a) Matematyka jest wytworem ludzkiego umysłu uwarunkowanym i ograniczonym zasobami ludzkiej neurobiologii, ukształtowanym przez naturę naszych mózgów, ciał, systemów pojęciowych, a także przez czynniki o charakterze społeczno-kulturowym.
(b) Czynności poznawcze generujące zaawansowaną matematykę są przejawem naturalnych zdolności poznawczych wspólnych wszystkim ludziom. Jedną z nich jest zdolność do budowania metafor pojęciowych. Potencjał do uprawiania matematyki, nawet matematyki zaawansowanej, stanowi gatunkowe *universale*.
(c) Proste umiejętności obliczeniowe są wbudowane w ludzkie mózgi. Jak wiele innych ssaków, ludzie są zdolni np. do momentalnej percepcji niewielkiej liczby przedmiotów znajdujących się w ich otoczeniu. Jednak zdecydowana większość pojęć matematycznych nie jest wrodzona. Nie jest wrodzone pojęcie liczby 49, pojęcie zera, pojęcie zbioru pustego, pojęcie pierwiastka kwadratowego, pojęcie zbioru nieskończonego czy pojęcie liczby zespolonej.
(d) Pojęcia będące przedmiotem badań teorii matematycznych powstają w następstwie działań praktycznych, takich jak: liczenie i mierzenie, architektura, szacowanie ryzyka w hazardzie, grupowanie obiektów, manipulacja symbolami, rozgrywanie gier itp. Widziana z tej perspektywy matematyka jest istotnie ludzkim przedsięwzięciem wyłaniającym się z podstawowych czynności życiowych spełnianych przez ludzi.
(e) Matematyczna precyzja jest następstwem zdolności do tworzenia symboli. Zamiast operacji na matematycznych pojęciach, możemy

wykonywać operacje na reprezentujących je symbolach. Symbole umożliwiają wykonywanie precyzyjnych i wielokrotnie powtarzalnych operacji obliczeniowych.

(f) Metafory pojęciowe są neuronalnie ucieleśnionymi mechanizmami poznawczymi, pozwalającymi wykorzystywać strukturę pojęciową jednej dziedziny w rozumowaniach dotyczących innej dziedziny. Dzięki temu mechanizmowi matematycy mogą dokonywać transferu idei oraz metod obliczeniowych z jednej gałęzi matematyki do innej[9].

(g) Wyniki dotyczące określonej dziedziny badań oraz techniki obliczeniowe i dowodowe ustalone w obrębie wspólnoty badawczej matematyków zachowują stabilność w czasie i w przestrzeni, a także poprzez różne kultury. Stabilność matematyki ucieleśnionej jest konsekwencją posiadania przez ludzi względnie takich samych mózgów i podobnych relacji ze środowiskiem.

(h) Matematyka jest efektywna, jeśli chodzi o opis i przewidywanie niektórych aspektów świata fizycznego. Wyewoluowaliśmy w taki sposób, że nasze poznanie z grubsza odpowiada światu. Jednak każde dostosowanie, jakie zachodzi między matematyką i światem fizycznym, jest zapośredniczone i umożliwione przez ludzki umysł/mózg.

(i) Inteligencja matematyczna jest jedną z wielu form ludzkiej inteligencji, obok inteligencji muzycznej, literackiej, emocjonalnej, społecznej itp.

(j) Przedmioty matematyczne są ucieleśnionymi pojęciami ugruntowanymi w ludzkim doświadczeniu świata, wygenerowanymi za pomocą naturalnych mechanizmów poznawczych, takich jak schematy wyobrażeniowe i metafory pojęciowe. Ponieważ ludzka matematyka jest jedynym rodzajem matematyki, jaki znamy, obiekty matematyczne *mają naturę pojęciową* – są integralnymi składnikami naszych systemów pojęciowych[10].

---

[9] Kategoria metafory pojęciowej jest kluczowa dla rozważań Lakoffa i Núñeza. Oto jej charakterystyka podana przez autorów (s. 6): „Conceptual metaphor has a technical meaning: It is a grounded, inference-preserving cross-domain mapping – a neural mechanism that allows us to use the inferential structure of one conceptual domain (say, geometry) to reason about another (say, arithmetic). Such conceptual metaphors allow us to apply what we know about one branch of mathematics in order to reason about another branch."

[10] Zdaniem Lakoffa i Núñeza koncepcja matematyki ucieleśnionej jest niespójna z tradycyjnymi kierunkami filozofii matematyki: platonizmem, formalizmem i intuicjonizmem. Autorzy nie wchodzą jednak w analizę różnych wersji współczesnego realizmu matema-

8. Matematyczny umysł w matematycznym świecie

8.1. Lakoff i Núñez sformułowali kilka argumentów przeciwko koncepcji zakładającej istnienie transcendentnej wobec umysłu/mózgu rzeczywistości matematycznej. Ich krytyczne omówienie zawiera artykuł B. Voorheesa (2004, s. 86–88). W dalszym ciągu skupię się tylko na tzw. argumencie z przyczynowości. Jest to dobrze znany argument wysuwany przeciwko platonizmowi w filozofii matematyki (współcześnie dyskutowany m.in. przez H. Putnama i P. Benacerrafa). Jego treść jest następująca: Wszystkie ludzkie zdolności poznawcze należy wyjaśniać za pomocą określonych mechanizmów neurokognitywnych. Dotyczy to również mechanizmów odpowiedzialnych za realizację poznania matematycznego. Nie ma jednak teorii, która wyjaśniałaby, w jaki sposób ludzkie umysły/mózgi wchodzą w *przyczynowy kontakt poznawczy* ze światem transcendentnych przedmiotów i struktur matematycznych. Nikt nie pokazał, jak przebiega ścieżka przyczynowa umożliwiająca dostęp poznawczy do transcendentnych przedmiotów matematycznych[11]. Innymi słowy: nie ma przejścia od faktu istnienia matematycznych pojęć i teorii do twierdzenia

---

tycznego. Sprawę komplikuje również to, że Lakoff i Núñez własną koncepcję określają mianem *realizmu ucieleśnionego* oraz *realizmu ekologicznego*. Są to określenia, które mogą prowadzić do pewnych nieporozumień. Natomiast trafnie oddaje intencje autorów następująca wypowiedź: „Matematyka, jaką znamy, jest ludzką matematyką będącą wytworem ludzkiego umysłu. Skąd pochodzi matematyka? Pochodzi od nas! Chociaż to my ją tworzymy, matematyka nie jest jednak arbitralna – nie jest również historycznie przygodnym konstruktem społecznym. Tym, co czyni matematykę niearbitralną, jest wykorzystanie przez nią podstawowych mechanizmów pojęciowych ucieleśnionego umysłu (...). Matematyka jest produktem neuronalnych zdolności naszych mózgów, natury naszych ciał, naszej ewolucji, naszego środowiska oraz naszej społecznej i kulturowej historii". (Lakoff, Núñez 2000, s. 9)

[11] J. Barrow wskazuje na dwa rozwiązania powyższej trudności. Pierwsze polega na odrzuceniu przyczynowej teorii nabywania wiedzy. Drugie polega na przyjęciu, że istnieje (pośredni) związek przyczynowy między zrealizowanymi w świecie wzorcami matematycznymi a ludzkimi systemami poznawczymi. Jeśli matematyczne własności struktur występujących w świecie są przyczynowo efektywne, to poznając je możemy następnie rekonstruować także takie obiekty/struktury matematyczne, które nie mają fizycznych realizacji. Autor w następujący sposób komentuje pierwsze rozwiązanie: „(...) Przyczynowa teoria wiedzy nie ma wielkiego znaczenia dla fizyka matematycznego pokroju Penrose'a, gdyż znane mu są sytuacje, w których teoria kwantów dopuszcza zdarzenia bez przyczyn i pozwala wyprowadzić wiedzę o układzie, w którym nie ma żadnych zależności przyczynowych. Fizyk kwantowy, zaznajomiony z nielokalnością Einsteina-Podolsky'ego-Rosena i z potwierdzającymi ją doświadczeniami Alaina Aspecta, może bez żadnych skrupułów utrzymywać, że przyczynowa teoria wiedzy jest po prostu błędna". (Barrow 1996, s. 396)

o obiektywnym (pozaumysłowym) istnieniu przedmiotów matematycznych. Jedyny kontakt poznawczy, jaki w tym wypadku mamy, dotyczy konstruktów naszego umysłu/mózgu.

Voorhees (2004, s. 87) w swojej odpowiedzi na powyższy zarzut zwraca uwagę, że to, iż ludzka matematyka opiera się na zdolnościach poznawczych realizowanych przez określone mechanizmy neuronowe, nie implikuje, że nie mogą one dostarczać informacji na temat pozaumysłowych przedmiotów matematycznych. Zwolennicy realizmu matematycznego utrzymują, że problem istnienia i poznawalności przedmiotów matematycznych nie różni się zasadniczo od problemu istnienia i poznawalności przedmiotów percepcji zmysłowej. Podobnie jak percepcje zmysłowe są konstrukcjami naszego aparatu sensoryczno-kognitywnego, tak percepcje przedmiotów matematycznych są konstrukcjami modułów odpowiedzialnych za realizację poznania matematycznego. W obu wypadkach analiza zawartości informacyjnej takich konstruktów wyprowadza nas poza indywidualny umysł/mózg. Jednak nadal otwarte pozostaje pytanie: W jaki sposób w strukturach umysłu/mózgu – oraz pochodnych wobec nich konstruktach pojęciowych – kodowane są informacje na temat pozaumysłowych przedmiotów i struktur matematycznych?

J. Barrow (1996, s. 339, 347, 373) sugeruje, że jeśli przyroda jest matematyczna, wówczas staje się zrozumiałe, że ewolucja preferowała procesy umysłowe, które „dostrajały się" do jej matematycznych aspektów. Również to, że Egipcjanie, Grecy i Babilończycy rozwinęli różne działy matematyki z codziennych czynności w celu utrzymania i polepszenia poziomu życia, jest ważną wskazówką, pokazuje bowiem, że matematyka pozwala rozumieć mechanizmy otaczającego nas świata. Nie sposób zaprzeczyć, że wiele pojęć i kategorii matematycznych zostało wyabstrahowanych z przyrody. Skoro nasze umysły/mózgi wyniosły ze świata szczególną matematyczną umiejętność i stało się tak w następstwie procesów ewolucyjnych, zatem jest bardzo prawdopodobne, że nasze kategorie matematyczne odpowiadają – zapewne w jakimś przybliżeniu – temu, jaki jest świat. Oto ilustracja powyższej tezy (Barrow 1996, s. 370–371, przypis 8):

> Potęga struktur fraktalnych jest – jak podejrzewam – subtelną konsekwencją naturalnej selekcji. Obserwujemy, że świat obficie korzysta z fraktalnych algorytmów, tj. wyjściowy wzór jest kopiowany w coraz mniejszej skali. To nader łatwy do zrealizowania sposób powielania. Obserwujemy go w rozgałęzianiu się drzew od najtęższych konarów aż po najdrobniejsze gałązki, jak też w mikroskopijnych wzorach śnieżynek i kwiatów. Powodem, dla któ-

rego fraktalne struktury wygenerowane przez matematyków odznaczają się tak dużymi walorami estetycznymi, że prezentuje się je w największych galeriach świata, jest to, iż ujmują one podstawowe wzory, z których korzysta Przyroda w celu rozwinięcia otaczającej nas złożoności i które w procesie ewolucji przyzwyczailiśmy się lubić.

8.2. Jeden z głównych argumentów na rzecz realizmu matematycznego odwołuje się do niezwykłej skuteczności matematyki w naukach empirycznych. (Wigner 1991, s. 5–18) Realiści twierdzą, że odkrywane regularności przyrody mają matematyczne reprezentacje, ponieważ są realizacją określonych struktur matematycznych. Gdyby rzeczywiście tak było, to przynajmniej fizycznie zrealizowane struktury matematyczne istniałyby niezależnie od ludzkich umysłów. Wówczas matematyczność umysłu byłaby pochodną strukturalnych własności świata pozaumysłowego. Co więcej: czynności umysłu matematycznego nie miałyby *wyłącznie* charakteru twórczego i konstrukcyjnego, lecz byłyby w istotnym zakresie również odkrywcze.

8.3. W jaki sposób Lakoff i Núñez odpowiadają na powyższy argument? Ich zdaniem w świecie fizycznym nie występują żadne obiekty, struktury ani prawa matematyczne. W świecie pozaumysłowym występują jedynie *regularności*. Chociaż prawa fizyki formułuje się w języku matematyki, to sama matematyka jest tylko narzędziem konceptualizacji owych regularności. Dosłownie rzecz biorąc w świecie nie ma układów kartezjańskich, przestrzeni fazowych czy przestrzeni Hilberta. Nie znajdziemy w nim liczb naturalnych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych ani pozaskończonych. Liczby istnieją wyłącznie w naszych umysłach. Są to narzędzia pojęciowe wykorzystywane np. do obliczania trajektorii poruszających się ciał. Przekonanie wielu fizyków i matematyków, że obiekty matematyczne istnieją niezależnie od ludzkiego umysłu, wynika z przypisywania przedmiotom matematycznym cech przedmiotów fizycznych, co jest *błędem kategorialnym*. Takim samym błędem jest przypisywanie przedmiotom fizycznym cech przedmiotów matematycznych.

Ludzie wykorzystują matematykę do tworzenia reprezentacji regularności fizycznych oraz obliczania przyszłych stanów układów fizycznych. Jednak obiekty matematyczne istnieją tylko i wyłącznie w umysłach jako ucieleśnione pojęcia (informacyjne stany neuronowe naszych mózgów). Nie ma struktur matematycznych ucieleśnionych w regularno-

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

ściach świata. Regularności nie są matematyczne *same w sobie*, a jedynie na skutek ich konceptualizacji. Matematyczność świata fizycznego nie jest jego cechą wewnętrzną, lecz relacyjną. Matematyczny – *par excellence* – jest tylko ludzki umysł (w pewnym zakresie także umysły zwierzęce, ewentualnie umysły sztuczne). Propozycja Lakoffa i Núñeza jest więc próbą pojęciowej redukcji matematyki.

8.4. Powyższe stanowisko prowadzi do następującej trudności. Jak to możliwe, aby w umyśle ludzkim powstawały matematyczne struktury pojęciowe, za pomocą których w sposób niezwykle precyzyjny możemy wykrywać, modelować, wyjaśniać i przewidywać zachowanie układów fizycznych? Cóż takiego cechuje same regularności, że wymuszają na nas zastosowanie do ich opisu kategorii matematycznych? Niektórzy (np. T. Placek i J. Woleński) w sposób ostrożny nazywają ową cechę „matematyzowalnością". Inni (np. M. Heller) zwracają uwagę, że nie chodzi tu wyłącznie o *cechę dyspozycyjną* (podatność na matematyczny opis i matematyczne modelowanie), lecz o *cechę kategoryczną, konstytutywną dla samych regularności* – proces regularny to taki, który jest realizacją określonej struktury matematycznej, algorytmu bądź programu. Podstawą przekonania o *aktualnej* matematyczności świata jest powszechne występowanie własności liczbowych (wielkości) oraz zachodzenie liczbowych relacji, dzięki czemu możemy mówić o symetriach, przekształceniach, odwzorowaniach czy programach realizowanych w świecie fizycznym. (Barrow 1995, s. 227–228)

Problem genezy struktur i pojęć matematycznych w umyśle ma swój drugi nieeliminowalny biegun, którym jest świat. Mówiąc o genezie matematyki należy brać pod uwagę nie tylko to, jak tworzymy pojęcia i teorie matematyczne, ale również to, jak musi być zorganizowany świat, jakie muszą obowiązywać w nim prawa, aby procesy ewolucyjne mogły doprowadzić do powstania umysłów/mózgów zdolnych do tworzenia jego matematycznych modeli.

8.5. Zwolennicy realizmu matematycznego[12] formułują rozmaite argumenty wykazujące, że pojęciowa redukcja matematyki nie działa. Na zakończenie zwrócę uwagę na siedem takich argumentów. Każdy z nich

---

[12] Nie wchodzę tutaj w szczegóły dyskusji między zwolennikami różnych wersji realizmu matematycznego. Por. Wójtowicz (2003). Każda autentyczna wersja realizmu odrzuca pojęciową redukcję matematyki.

stał się przedmiotem szeroko zakrojonej dyskusji, która jak dotąd nie doprowadziła do szeroko akceptowanego, jednolitego rozwiązania:

(a) Regularności fizyczne mają cechy strukturalno-ilościowe, które dają się adekwatnie ująć tylko za pomocą kategorii matematycznych. Fizyka jest po prostu matematyką stosowaną. To samo dotyczy wszystkich zmatematyzowanych teorii empirycznych. Jak powiada Penrose (1997, s. 18–19): „im lepiej rozumiemy świat fizyczny, im lepiej poznajemy prawa natury, (....) tym dalej wkraczamy w świat matematyki i matematycznych pojęć".

(b) Matematyka pełni w naukach empirycznych rolę heurystyczną. Dzięki jej zastosowaniu uzyskujemy dostęp do takich aspektów świata, które w inny sposób byłyby poznawczo niedostępne. Funkcja prewidystyczna teorii empirycznych jest bezpośrednią konsekwencją zastosowań matematyki. Zrozumienie mechaniki kwantowej czy teorii strun jest całkowicie niemożliwe bez znajomości odpowiednich działów matematyki. Prawa fizyki formułowane w postaci równań matematycznych kodują informację o przyrodzie, która niejednokrotnie przerasta wiedzę twórców takich równań (np. słynne równania Einsteina, Schrödingera, Diraca).

(c) Istnieje duża grupa teorii matematycznych, które początkowo wchodziły w skład tzw. matematyki czystej. Ku zaskoczeniu samych matematyków znajdowano dla nich zastosowanie do opisu świata empirycznego (geometrie nieeuklidesowe, teoria grup). Pozornie całkowicie abstrakcyjne struktury, będące swobodnym wytworem umysłów matematycznych, mają fizyczne realizacje. Nie zmienia to faktu, że tylko niewielki podzbiór struktur matematycznych wykorzystuje się do opisu świata (matematyka jest *empirycznie nadmiarowa*).

(d) Abstrakcja i idealizacja matematyczna pełnią funkcję poznawczą. Pominięcie pewnych parametrów umożliwia ujęcie strukturalnych niezmienników zjawisk fizycznych adekwatnie reprezentowanych przez kategorie matematyki.

(e) W matematyce występują odkrycia równoległe, co wskazuje na obiektywny element zawarty w jej przedmiocie, niezależny od umysłu badacza. Matematycy pracujący niezależnie w różnych kulturach, używający różnych oznaczeń oraz technik dowodowych, kierowani różnymi motywami, często dochodzą do tych samych wyników: twierdzeń i/lub prawd matematycznych. (Barrow 1995, s. 228)

(f) Wiele, nawet nieskończenie wiele struktur matematycznych, wykracza poza nasz gatunkowy horyzont poznawczy[13]. Uniwersum prawd matematycznych rozpada się na takie, które są praktycznie obliczalne, obliczalne tylko w zasadzie (ale nie w czasie, jakim dysponuje nasz Wszechświat) oraz zasadniczo nieobliczalne. Istnieją obiektywne granice związane z poznawalnością struktur i prawd matematycznych. Matematyka ewidentnie przekracza informacyjną zawartość naszych mózgów i umysłów. Sytuacja nie zmieniłaby się nawet wówczas, gdybyśmy do obliczeń wykorzystali każdą cząstkę elementarną istniejącą we Wszechświecie. Do wyczerpującego poznania niektórych struktur matematycznych nie wystarcza nie tylko moc obliczeniowa ludzkich mózgów, ale również moc obliczeniowa całego Wszechświata[14].

(g) Istnienie komputerowych symulacji procesów fizycznych jest wskaźnikiem ich algorytmicznej ściśliwości. Jest to obliczeniowa wersja twierdzenia o matematyczności przyrody. Możliwość symulacji opiera się na subtelnej i głębokiej cesze świata – na obliczalności funkcji matematycznych wyrażających znane prawa fizyki[15]. Zdaniem Barrowa (1995, s. 259) „świat jest pojmowalny aktualnie i potencjalnie, gdyż na pewnym poziomie jest w szerokim zakresie algorytmicznie ściśliwy. To jest najgłębszy powód, dla którego matematyka może funkcjonować jako opis fizycznego świata"[16].

---

[13] Penrose (1993, s. 159) utrzymuje, a jest to twierdzenie powszechnie podzielane przez matematyków, że „matematyka jest nieskończoną strukturą, której nigdy nie będziemy w stanie w pełni ogarnąć."

[14] Używając kategorii wypracowanych przez Romana Ingardena powiedzielibyśmy, że wszystkie obiekty matematyczne są strukturalnie i radykalnie transcendentne wobec naszego umysłu (świadomości), natomiast niektóre spośród nich są także transcendentne w sensie *transcendencji dostępu poznawczego.*

[15] Nie zmienia to w niczym faktu, że świat nie jest w pełni i pod każdym względem algorytmicznie ściśliwy. Barrow (1995, s. 239) skłania się do ontologicznej (w duchu realizmu matematycznego) interpretacji twierdzeń limitacyjnych. Jego zdaniem „wszelkie ograniczenia wnioskowania matematycznego, takie jak te odkryte przez Gödla, nie są tylko ograniczeniami kategorii naszego umysłu, lecz istotnymi własnościami rzeczywistości, a zatem ograniczeniami nałożonymi na jakąkolwiek próbę zrozumienia najgłębszej natury Wszechświata."

[16] Funkcje obliczalne są operacjami matematycznymi, które mogą być symulowane przez realne urządzenia, wytwory świata fizycznego zbudowane z cząstek elementarnych powiązanych prawami przyrody. Sam fakt istnienia komputerów bywa traktowany jako argument na rzecz matematyczności świata. Oto sformułowanie tego argumentu pochodzące od Barrowa (1996, s. 349): „Komputer to zespół wybranych materialnych elementów Wszechświata, zestawionych w układ, którego naturalna ewolucja w czasie zgodnie

8.6. Aby w naszych umysłach mogły powstawać struktury będące reprezentacjami struktur występujących w świecie pozaumysłowym, oba elementy tej relacji – umysł i świat – muszą być odpowiednio zorganizowane. Matematykę odnajdujemy nie tylko w naszych umysłach i świecie pozaumysłowym. Także *relacje* zachodzące między umysłem i światem są realizacjami matematycznych transformacji, przekształceń i odwzorowań. Wiele wskazuje na to, że dojrzała teoria umysłu będzie teorią zmatematyzowaną[17].

Podobnie jak na początku XX wieku argumenty sformułowane przez Husserla (a wcześniej przez Fregego i Bolzanę) przeciwko psychologistycznej redukcji logiki i matematyki okazały się mocniejsze od argumentów wysuwanych przez obrońców psychologizmu, tak współczesna debata na temat różnych wersji realizmu matematycznego pokazuje, że pojęciowa redukcja logiki i matematyki po prostu nie działa. Kognitywista może być matematycznym realistą.

Bibliografia

Auslander J. (2001), *Embodied Mathematics*, „American Scientist", 89, s. 366–377.

Barrow J. D. (1995), *Teorie Wszystkiego. W poszukiwaniu ostatecznego wyjaśnienia*, tłum. J. Czerniawski, T. Placek. Kraków: Wydawnictwo ZNAK.

Barrow J. D. (1996), *Π razy drzwi. Szkice o liczeniu, myśleniu, i istnieniu*, tłum. K. Lipszyc. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Barrow J. D. (2005), *Kres możliwości? Granice poznania i poznanie granic*, tłum. H. Turczyn-Zalewska. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Biłat A. (2004), *Ontologiczna interpretacja logiki. U podstaw ontologii logicznej*, Lublin: Wydawnictwo UMCS.

---

z prawami przyrody symuluje pewne operacje matematyczne. Prostych przykładów jest bardzo wiele. Ruch wahadła w polu ciążenia ziemskiego może posłużyć do zbudowania komputera, który zlicza w pewien regularny sposób. Urządzenie to nazywamy zegarem. Rozpad pierwiastka promieniotwórczego powoduje wyczerpywanie się jego zasobów na sposób, który symuluje określoną operację matematyczną, zwaną funkcją wykładniczą. Widzimy zatem, że samo istnienie komputerów świadczy o tym, iż świat jest w pewnym sensie matematyczny."

[17] Znane są matematyczne teorie reprezentacji umysłowych (A. Chmielecki) i przestrzeni pojęciowych (P. Gärdenfors). Bada się matematyczne modele świadomości fenomenalnej (D. Chalmers). Powstają prace z zakresu geometrii umysłu (W. Duch) oraz formalne teorie struktury świadomości i intencjonalności (J. Paśniczek, E. Marbach). Istnieje projekt (o ile wiem, wciąż niezrealizowany) psychoontologii formalnej (J. Perzanowski).

Bigaj T. (1997), *Matematyka a świat realny*, Warszawa: Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii UW.

Bocheński J. M. (1993), *Logika i ontologia*, tłum. D. Gabler, [w:] tenże, *Logika i filozofia. Wybór pism*, Warszawa: PWN, BFW.

Changeux J. P., Connes A. (1995), *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*, Princeton: Princeton University Press.

Dehaenne S. (1999), *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*, London – New York – Auckland: Penguin Books.

Dębiec J. (2002), *Mózg a matematyka*, Kraków – Tarnów: OBI-Biblos.

Ernest P. (1998), *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, Albany, NY: SUNY Press.

Heller M., Życiński J., Michalik A. (red.) (1992), *Matematyczność przyrody*. Kraków – Tarnów: OBI-Biblos.

Henderson D. W. (2002), *Where mathematics comes from: How the embodied mind origins mathematics into being*, „The Mathematical Intelligencer", 24. No. 1, s. 75–86.

Husserl E. (2000), *Badania logiczne*, t. II, cz. I, tłum. J. Sidorek, Warszawa: PWN, BKF.

Husserl E. (2006), *Badania logiczne*, t. 1, *Prolegomena do czystej logiki*, tłum. J. Sidorek, BKF, Warszawa: PWN.

Lakoff G., Núñez R. (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

Maddy P. (1990), *Realism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Marciszewski W. (1991), *Logika z retorycznego punktu widzenia*, Biblioteka Myśli Semiotycznej, t. 13, Warszawa: Wyd. UW.

Murawski R. (red.) (2002), *Współczesna filozofia matematyki*. Warszawa: PWN.

Penrose R. (1993), *Świat fizyczny wyłania się z matematyki*, „Filozofia Nauki", 1, nr 1, s. 153–161.

Penrose R. (1995), *Nowy umysł cesarza. O komputerach, umyśle i prawach fizyki*, tłum. P. Amsterdamski. Warszawa: PWN.

Penrose R. (1997), *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, tłum. P. Amsterdamski. Warszawa: Prószyński i S-ka.

Penrose R. (2000), *Cienie umysłu. Poszukiwanie naukowej teorii świadomości*, tłum. P. Amsterdamski, Poznań: Wydawnictwo Zysk i S-ka.

Poczobut R. (1997), *Empirystyczne interpretacje praw logiki*, „Filozofia Nauki", 5, nr 4, s. 43–56.

Poczobut R. (2000), *Spór o zasadę niesprzeczności. Studium z zakresu filozoficznych podstaw logiki*, Lublin: TN KUL.

Poczobut (2007), *Umysł matematyczny. Czy kognitywista może być matematycznym realistą?*, „Poznańskie Studia z Filozofii Humanistyki" (w druku).

Wigner E. P. (1991), *Niepojęta skuteczność matematyki w naukach przyrodniczych*, tłum. J. Dembek, „Zagadnienia Filozoficzne w Nauce", XIII, s. 5–18.

Voorhees B. (2004), *Embodied Mathematics. Comments on Lakoff & Núñez*, „Journal of Consciousness Studies", 11, No. 9, s. 83–88.

Wójtowicz K. (2003), *Spór o istnienie w matematyce*, Warszawa: Wydawnictwo *Semper*.