dr hab. Józef Rogowski, prof. UwB
Uniwersytet w Białymstoku, Wydział Ekonomiczny

MODEL WZROSTU REGIONU

1. Wstęp

Teoria wzrostu gospodarczego jest dość dobrze opisana w literaturze. Rys historyczny można znaleźć w [Barro, Sala-i-Martin 1999, rozdz. 1-3], a także w [Czerwiński 1973], gdzie akcent został położony na stronę matematyczną. Należy zauważyć, że w większości przypadków modele te opisują wzrost gospodarki narodowej jako całości (bez podziału na regiony). Pierwsze modele wzrostu dotyczyły gospodarek zamkniętych, czyli bez uwzględniania handlu zagranicznego oraz były one jednosektorowe (jedyny wytwarzany produkt mógł być jednocześnie dobrem konsumpcyjnym i inwestycyjnym, a zatem i czynnikiem produkcji). Opisywały one w różny sposób funkcję produkcji. Model Harroda-Domara[1] przyjmował stałe współczynniki kapitało- i pracochłonności, czyli nie dopuszczał substytucji kapitału rzeczowego i pracy, a modele np. Solowa i Swana[2] – funkcje neoklasyczne. Poza tym modele przyjmują różne funkcje konsumpcji: od założenia stałej krańcowej skłonności do konsumpcji (model Harroda-Domara) do zastosowania teorii użyteczności (model Ramsey'a)[3]. Uogólnienia polegały na opisie gospodarki wielosektorowej (np. modele oparte na teoriach przepływów międzygałęziowych Leontiewa czy von Neumanna)[4], a także na uwzględnianiu handlu zagranicznego, czyli na *otwieraniu* gospodarki[5]. Wymienione tu modele traktowały gospodarkę jako jedność. Jeżeli pojawiały się regiony, to jako ilustracja problemu agregacji, szczególnie w rozważaniach opartych na analizie input-output[6].

Niniejsza praca stanowi kolejną próbę[7] wprowadzenia regionów w uproszczony sposób do modelu Harroda-Domara. W związku z tym w p. 2 przypomnimy zarys najprostszego modelu H-D. Z kolei w p. 3 gospodarka narodowa zostaje podzielona na dwa regiony, z których pierwszy jest słabo rozwinięty, a drugi – silny gospodarczo.

[1] Zob.: [Allen 1975, s. 202 i dalsze].
[2] Zob.: [Barro, Sala-i-Martin 1999, s. 16 i dalsze; Allen 1975, s. 258 i dalsze].
[3] Zob.: [Barro, Sala-i-Martin 1999, s. 59 i dalsze].
[4] Zob. np.: [Czerwiński 1973, rozdz. 5].
[5] Zob. [Barro, Sala-i-Martin 1999, rozdz. 3].
[6] Zob. np.: [Starzeński 1978, s. 23 i dalsze].
[7] Zob.: [Rogowski 2003].

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

2. Jednosektorowy model jednoczynnikowy (Harroda-Domara)[8]

Jak już wspomniano o tym wyżej, zakładamy, że gospodarka jest zamknięta, produkowany jest jeden produkt, który może być zarówno konsumowany przez gospodarstwa domowe, jak i inwestowany przez przedsiębiorstwa. Innymi słowy, zachodzi następujący podział produkcji Y na środki konsumpcyjne C i inwestycyjne I:

(1) $Y = C + I$.[9]

Dla prostoty analizy przyjmujemy brak deprecjacji kapitału, z czego wynika, że inwestycje brutto są tożsame z inwestycjami netto, czyli

(2) $$I = \frac{dK}{dt},$$

gdzie K oznacza zasób kapitału.

Przy tworzeniu produkcji pomijamy tu pracę, natomiast zakładamy, że kapitałochłonność v jest stała:

(3) $$Y = \frac{1}{v}K.$$

Z drugiej strony gospodarstwa domowe otrzymują dochód w wysokości Y, który jest dzielony na konsumpcję C i oszczędności S:

(4) $Y = C + S$.

O konsumpcji i oszczędnościach zakładamy, że krańcowe do nich skłonności są stałe, czyli

(5) $C = cY$ oraz $S = sY$,

gdzie c oraz s=1-c są krańcowymi skłonnościami do konsumpcji i oszczędności, odpowiednio.

Model Harroda-Domara stanowią równania (1)-(5). Z porównania (1) i (4) otrzymamy dobrze znany warunek równowagi zrównujący oszczędności z inwestycjami:

(6) $S = I$,

co przy podstawieniu (5), (3) oraz (2) w (6) doprowadza nas do następującego równania różniczkowego:

(7) $$\frac{dK}{dt} = \frac{s}{v}K,$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

---

[8] Zob.: [Czerwiński 1973, s. 41 i dalsze].

[9] Zmienne modelu są funkcjami czasu, ale dla skrócenia zapisu opuszczamy w zapisie zmienną czasową t.

$$K = K_0 e^{\frac{s}{v}t}, \tag{8}$$

gdzie K_0 jest zasobem kapitału w momencie początkowym $t=0$.

Podstawiając (8) do (2), (3) i (5) otrzymujemy równania opisujące zmiany inwestycji, produkcji/dochodu oraz konsumpcji i oszczędności:

$$I = I_0 e^{\frac{s}{v}t}, \tag{9}$$

$$Y = Y_0 e^{\frac{s}{v}t},$$

$$S = S_0 e^{\frac{s}{v}t}$$

oraz $C = C_0 e^{\frac{s}{v}t}$,

gdzie wskaźnik *0* oznacza wartość odpowiedniej wielkości w momencie początkowym $t=0$.

Wspólne tempo wzrostu g, czyli $g = \frac{s}{v}$, nazywamy gwarantowaną stopą wzrostu.

3. Model typu Harroda-Domara dla regionów

Powyżej przedstawiono dobrze znany z literatury podstawowy model Harroda-Domara, w którym zakładano brak handlu zagranicznego. To założenie podtrzymujemy w dalszym ciągu. Jednak w tym miejscu przyjmujemy podział gospodarki na dwa regiony *A i B o* porównywalnej liczbie ludności, z których jeden (*A*) jest dużo słabiej rozwinięty gospodarczo niż drugi (*B*)[10]. Również i tu nie bierzemy pod uwagę siły roboczej, innymi słowy traktujemy jej zasób jako prawie nieograniczony.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

Y_A, Y_B – produkcja/dochody

S_A, S_B – oszczędności

I_A, I_B – inwestycje

K_A, K_B – zasoby kapitału w regionach *A* i *B*, odpowiednio.

Przyjmując oznaczenia z punktu poprzedniego otrzymujemy

[10] W niniejszej pracy nie rozważamy definicji regionu. Traktujemy to pojęcie bardziej abstrakcyjnie, o czym świadczy przyjęty podział na regiony i założenia na ich temat.

(10) $Y = Y_A + Y_B$

(11) $K = K_A + K_B$

(12) $I = I_A + I_B$

(13) $S = S_A + S_B$,

co przy założeniu występowania równowagi w skali makro, czyli $I = S$, mamy równanie

(14) $I_A + I_B = S_A + S_B$.

Przyjmujemy, że w obu regionach mamy do czynienia ze stałymi, choć niekoniecznie równymi, krańcowymi skłonnościami do konsumpcji (c_A, c_B) i do oszczędności ($s_A = 1 - c_A$, $s_B = 1 - c_B$). Daje nam to następujące równania oszczędności

(15) $S_A = s_A Y_A$ oraz

(16) $S_B = s_B Y_B$.

Podobnie jak w punkcie poprzednim, przyjmujemy stałe, choć niekoniecznie takie same, współczynniki kapitałochłonności (v_A, v_B) w regionach:

(17) $Y_A = \frac{1}{v_A} K_A$

(18) $Y_B = \frac{1}{v_B} K_B$.

Ponadto z definicji inwestycji (podtrzymujemy założenie o braku deprecjacji kapitału) otrzymujemy:

(19) $I_A = \frac{dK_A}{dt}$

(20) $I_B = \frac{dK_B}{dt}$.

Jeżeli przyjmiemy, że o poziomie rozwoju gospodarczego regionu świadczy dochód *per capita*, to przy podobnej liczbie ludności i podobnym tempie przyrostu naturalnego w regionach, możemy przyjąć za kryterium rozwoju dochód globalny. Zatem nasze założenie, że region *A* jest słabiej rozwinięty niż *B* jest równoważne nierówności

(21) $Y_A < Y_B$

Kluczowym założeniem przyjętym w pracy jest ciążenie kapitału (oszczędności) do regionu silniejszego, a zatem występuje przepływ z regionu A do regionu B[11]. Oznaczmy ten *eksport* symbolem $S_{A \to B}$. Otrzymamy zatem następujące warunki równowagi w obu regionach[12]:

$$I_A = S_A - S_{A \to B} \tag{22}$$

$$I_B = S_B + S_{A \to B}\,. \tag{23}$$

Po wstawieniu równań (15)-(20) do (22) i (23) powstaje układ równań różniczkowych, opisujący akumulację kapitału w obu regionach:

$$\begin{cases} \dfrac{dK_A}{dt} = \dfrac{s_A}{v_A} K_A - S_{A \to B} \\ \dfrac{dK_B}{dt} = \dfrac{s_B}{v_B} K_B + S_{A \to B} \end{cases}. \tag{24}$$

Zauważyć należy, że w przypadku braku przepływu oszczędności z regionu A do regionu B, czyli $S_{A \to B} = 0$, otrzymujemy następujące wielkości kapitału w obu regionach:

$$\begin{cases} K_A = K_{A0} e^{\frac{s_A}{v_A} t} \\ K_B = K_{B0} e^{\frac{s_B}{v_B} t} \end{cases}, \tag{25}$$

czyli obserwujemy wzrosty według stóp gwarantowanych. Przypadek ten nie jest interesujący, gdyż w rzeczywistości regiony izolowane w jednej gospodarce raczej nie występują.

Załóżmy teraz, że przepływ oszczędności z regionu mniej rozwiniętego do rozwiniętego bardziej jest stały w czasie. Otrzymujemy wówczas, podobnie jak wyżej, akumulację kapitału w obu regionach według stóp gwarantowanych:

$$\begin{cases} K_A = \left(K_{A0} - \dfrac{v_A}{s_A} S_{A \to B} \right) e^{\frac{s_A}{v_A} t} + \dfrac{v_A}{s_A} S_{A \to B} \\ K_B = \left(K_{B0} + \dfrac{v_B}{s_B} S_{A \to B} \right) e^{\frac{s_B}{v_B} t} - \dfrac{v_B}{s_B} S_{A \to B} \end{cases}. \tag{26}$$

W obu powyższych przypadkach oba regiony się rozwijają, bo z naszych za-

[11] Powyższe założenia są przytoczone za [Rogowski 2003].

[12] Zauważmy, że w ten sposób zapewniony też jest warunek równowagi (14) dla całej gospodarki.

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

łożeń wynika, że produkcja, dochód i inwestycje rosną według tych samych stóp co kapitał, czyli według stóp gwarantowanych: $\frac{s_A}{v_A}$ w regionie A oraz $\frac{s_B}{v_B}$ w B.

W [Rogowski 2003] analizowano rozwiązanie układu (24), gdy przepływ kapitału z regionu *biedniejszego* do *bogatszego* jest wprost proporcjonalny do dochodu w regionie B, czyli $S_{A\to B} = \kappa Y_B$. Otrzymano tam wynik mówiący, że przy realistycznych założeniach region *biedniejszy* od pewnego momentu zacznie się *kurczyć*, dochodząc do kapitału, produkcji i oszczędności zerowych. Oznacza to, że konieczne jest zasilanie zewnętrzne (hz lub inwestycje publiczne), jeżeli region mniej rozwinięty ma też się rozwijać. W przypadku inwestycji publicznych finansowanych z podatków rozwój regionu bardziej rozwiniętego będzie wolniejszy.

Kolejnym założeniem o kształtowaniu się przepływu oszczędności z A do B jest przyjęcie, że ten strumień jest wprost proporcjonalny do różnicy w poziomie rozwoju obu regionów, rozumianych jako dochody *per capita*. Przy założeniu, że liczba ludności w nich jest podobna, to różnica poziomów może być traktowana jako różnica dochodów, czyli

$$S_{A\to B} = \kappa\left(Y_B - Y_A\right). \tag{27}$$

W tym przypadku układ (24) zamienia się w układ równań różniczkowych (28) opisujących kształtowania się kapitału w obu regionach.

$$\begin{cases} \dfrac{dK_A}{dt} = \dfrac{s_A + \kappa}{v_A} K_A - \dfrac{\kappa}{v_B} K_B \\ \dfrac{dK_B}{dt} = \dfrac{s_B + \kappa}{v_B} K_B - \dfrac{\kappa}{v_A} K_A \end{cases} \tag{28}$$

Należy zauważyć, że zasób kapitału w regionie A nie będzie się zmieniał, jeżeli $\frac{dK_A}{dt} = 0$, czyli gdy

$$\frac{s_A + \kappa}{v_A} K_A - \frac{\kappa}{v_B} K_B = 0 \tag{29}$$

oraz będzie wzrastał, gdy

$$\frac{s_A + \kappa}{v_A} K_A - \frac{\kappa}{v_B} K_B > 0. \tag{30}$$

Analogicznie, zasób kapitału w regionie B będzie stały, gdy

$$\frac{s_B + \kappa}{v_B} K_B - \frac{\kappa}{v_A} K_A = 0 \tag{31}$$

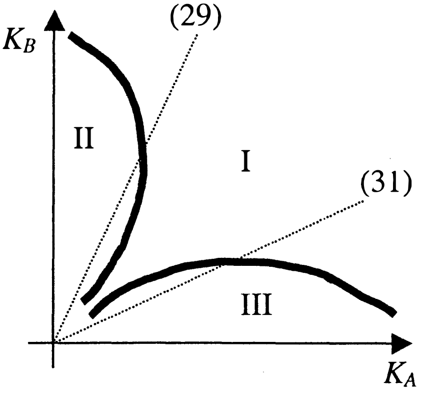
oraz będzie się powiększał, gdy

$$\frac{s_B + \kappa}{v_B} K_B - \frac{\kappa}{v_A} K_A > 0 \qquad (32)$$

Równania i nierówności (29-32) pozwalają narysować przestrzeń fazową, czyli wykresy zmian zasobów kapitałów w obu regionach (zob. rys. 1). Numery przy prostych oznaczają równania je opisujące. Z nierówności (30) i (32) wynika, że w obszarze I oba zasoby rosną, czyli oba regiony się rozwijają. Natomiast w obszarze II rośnie zasób kapitału w regionie *B*, a maleje w regionie *A*, co oznacza rozwój *B* i regres *A*. W części III rysunku 1 sytuacja jest odwrotna. Można więc zauważyć, że teoretycznie oba regiony mogą razem być w fazie wzrostowej (I), po czym od pewnego momentu jeden z nich zaczyna się cofać, możliwa jest nawet zamiana ról obu regionów. Patrząc na to realistycznie, region słabszy zacznie się od pewnego momentu cofać. Zatem wniosek jest podobny, jak wyżej: aby nie dopuścić do takiej sytuacji, niezbędne są inwestycje zewnętrzne.

Rysunek 1.

Przykładowe trajektorie zasobów kapitału w regionach *A i B*



W celu otrzymania rozwiązania analitycznego załóżmy dodatkowo, że w obu regionach mamy takie same krańcowe skłonności do oszczędzania i równe sobie współczynniki kapitałochłonności. Innymi słowy przyjmujemy założenie

$$s = s_A = s_B, \; v = v_A = v_B. \qquad (33)$$

Wówczas układ (28) przyjmie postać następującą:

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{dK_A}{dt} = \dfrac{s+\kappa}{v}K_A - \dfrac{\kappa}{v}K_B \\ \dfrac{dK_B}{dt} = \dfrac{s+\kappa}{v}K_B - \dfrac{\kappa}{v}K_A \end{cases}.$$

Po zsumowaniu i odjęciu równań z (34) uzyskać można

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\left(K_A + K_B\right)}{dt} = \dfrac{s}{v}\left(K_A + K_B\right) \\ \dfrac{d\left(K_B - K_A\right)}{dt} = \dfrac{s+2\kappa}{v}\left(K_B - K_A\right) \end{cases},$$

co prowadzi nas do funkcji pokazujących kształtowanie się sumy i różnicy zasobów kapitałów w obu regionach:

$$(36)\qquad \begin{cases} K_A + K_B = \left(K_{A0} + K_{B0}\right)e^{\frac{s}{v}t} \\ K_B - K_A = \dfrac{s+2\kappa}{v}\left(K_{B0} - K_{A0}\right)e^{\frac{s+2\kappa}{v}t} \end{cases}.$$

W całej gospodarce zasób kapitału rośnie według gwarantowanej stopy wzrostu, natomiast różnica również rośnie wykładniczo i to ze stopą wzrostu większą od gwarantowanej, $\dfrac{s+2\kappa}{v} > \dfrac{s}{v}$. Musi zatem nastąpić moment, od którego zasób kapitału w regionie A zacznie maleć i dojdzie do 0.

W celu wyznaczenia funkcji kształtowania się zasobów kapitału w regionach należy dodać i odjąć stronami równania w układzie (36). Otrzymamy wówczas:

$$(37)\qquad \begin{cases} K_B = \dfrac{1}{2}\left(K_{B0} + K_{A0} + \left(K_{B0} - K_{A0}\right)e^{\frac{2\kappa}{v}t}\right)e^{\frac{s}{v}t} \\ K_A = \dfrac{1}{2}\left(K_{B0} + K_{A0} - \left(K_{B0} - K_{A0}\right)e^{\frac{2\kappa}{v}t}\right)e^{\frac{s}{v}t} \end{cases}.$$

Można zatem zauważyć, że region bardziej rozwinięty (B) będzie się rozwijał w dalszym ciągu w tempie większym od gwarantowanego:

$$(38)\qquad \frac{d\ln K_B}{dt} = \frac{s}{v} + \frac{2\kappa}{v}\frac{K_{B0} - K_{A0}}{\left(K_{B0} + K_{A0}\right)e^{-\frac{2\kappa}{v}t} + K_{B0} - K_{A0}},$$

co oznacza wzrost tempa akumulacji kapitału w regionie B do wartości granicznej równej $\frac{s+2\kappa}{v}$, czyli stopy wzrostu różnicy zasobów kapitału (zob. (36)).

Inaczej przebiega akumulacja w regionie mniej rozwiniętym (A). Jej przebieg w czasie pokazuje pochodna funkcji K_A:

$$\text{(39)}\qquad \frac{dK_A}{dt}=\frac{1}{2}\left(\left(K_{B0}+K_{A0}\right)\frac{s}{v}-\left(K_{B0}-K_{A0}\right)\frac{s+2\kappa}{v}e^{\frac{2\kappa}{v}t}\right)e^{\frac{s}{v}t}.$$

Należy zauważyć, że zasób kapitału w tym regionie rośnie, jeżeli

$$\text{(40)}\qquad t<\frac{v}{2\kappa}ln\left(\frac{s}{s+2\kappa}\frac{K_{B0}+K_{A0}}{K_{B0}-K_{A0}}\right),$$

po czym następuje regres. Czyli w czasie równym prawej stronie nierówności (40) zasób kapitału jest największy. Z analizy drugiego równania z układu (37) wynika, że analizowany zasób osiągnie wartość zerową w momencie

$$\text{(41)}\qquad t=\frac{v}{2\kappa}ln\frac{K_{B0}+K_{A0}}{K_{B0}-K_{A0}}.$$

Otrzymaliśmy zatem wzrost obu regionów w czasie t spełniającym nierówność (40) (obszar I na rys. 1), po czym region B rośnie dalej, a w regionie A zaczyna występować regres (obszar II na rys. 1). Tempo zmian zasobu kapitału w regionie mniej rozwiniętym dopóki jest on dodatni wynosi

$$\text{(42)}\qquad \frac{d\,ln\,K_A}{dt}=\frac{s}{v}-\frac{2\kappa}{v}\frac{K_{B0}-K_{A0}}{\left(K_{B0}+K_{A0}\right)e^{-\frac{2\kappa}{v}t}-\left(K_{B0}-K_{A0}\right)}.$$

Należy zauważyć, że tempo to różni się od gwarantowanej stopy wzrostu *in minus* więcej niż od niej różni się *in plus* stopa wzrostu zasobu kapitału w regionie bardziej rozwiniętym (por. (38) z (42)).

4. Wnioski

Zauważmy, że przedstawiony model pokazuje, że istnieją warunki, przy których oba regiony mogą się rozwijać, chociaż różnica między nimi będzie się powiększać i w końcu mniej rozwinięty zacznie się *cofać*. Co więcej, w pewnym momencie zasób kapitału spadnie do 0, czyli nastąpi całkowita dekapitalizacja.

W modelu tu przedstawionym nie analizowaliśmy roli rządu i samorządu (wydatków i systemu podatkowego). Bez ich pomocy (transferów finansowych) nie uda się nie tylko zmniejszyć dystansu dzielącego oba regiony, ale również nie uniknie się procesu dekapitalizacji w regionie mniej rozwiniętym.

Również w modelu nie uwzględniono roli handlu zagranicznego i inwestycji zagranicznych. Szczególnie roli tych ostatnich nie można przecenić. Pamiętać jed-

Zdigitalizowano i udostępniono w ramach projektu pn.
Rozbudowa otwartych zasobów naukowych Repozytorium Uniwersytetu w Białymstoku,
dofinansowanego z programu „Społeczna odpowiedzialność nauki" Ministra Edukacji i Nauki na podstawie umowy SONB/SP/512497/2021

nak należy, że przedstawiony w pracy model jest konstrukcją abstrakcyjną i bardzo uproszczoną. Należałoby zatem ten model rozwinąć w kierunku bardziej realistycznych założeń, pozwalających zbudować na tej podstawie modele ekonometryczne. Rozwój ten powinien pójść w kierunku uwzględnienia handlu zagranicznego, szczególnie w przypadku regionów przygranicznych – handlu przygranicznego, roli rządu i samorządu, liczby ludności i jej ewolucji. Można też wzorem modelu Ramsey'a zdefiniować wielkość konsumpcji gospodarstw domowych zgodnie z teorią użyteczności. Co więcej, nie można też pomijać problemu lokalizacji inwestycji.

Literatura

Allen R.G.D. [1975], *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*, PWN, Warszawa.

Barro J.R., Sala-i-Martin X. [1999], *Economic Growth*, The MIT Press.

Czerwiński Z. [1973], *Podstawy matematycznych modeli wzrostu gospodarczego*, PWE, Warszawa.

Rogowski J. [2003], *Ogólny model tworzenia kapitału w regionie w warunkach równowagi*, w druku.

Starzeński O. [1978], *Ekonometryczno-predyktywne modele nakładów i wyników*, PWN, Warszawa.

Streszczenie

W pracy przedstawione zostały różne wersje modelu wzrostu regionu oparte o model wzrostu Harroda-Domara. Głównym założeniem jest przepływ oszczędności z regionu mniej rozwiniętego do regionu rozwiniętego w wyższym stopniu. Otrzymany wynik pokazuje, że bez zewnętrznych źródeł zasilania (zagranica, rząd, samorządy) różnica rozwoju między obydwoma regionami będzie się powiększała, z tym że w pewnym momencie region *biedniejszy* osiągnie rozwój największy, po czym zacznie się cofać. Wydaje się, że bez zasilania zewnętrznego tego zjawiska nie da się uniknąć, przynajmniej przy przyjętych założeniach modelowych.

MODEL OF THE REGION'S GROWTH

Summary

In the paper the different versions of model of regional growth based on the Harrod-Domar's growth model are presented. The existence of the flow savings from the less developed region to the higher developed one is the main assumption. The obtained result shows that the difference between the regions will increase and there is a phase in which the region less developed reaches the highest development and later this region will regress. It could be seemed that without any outside capital flow this situation will be observed, of course by the model assumptions.