UNIWERSYTET w BIAŁYMSTOKU

Instytut Matematyki

Ryszard R. Andruszkiewicz

WYKŁADY Z ALGEBRY OGÓLNEJ

I

Białystok 2005

ISBN 83-7431-031-6

Korekta
Marcin Łuba

Redakcja techniczna i skład komputerowy
Ryszard R. Andruszkiewicz

Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku
15-097 Białystok, ul. M. Skłodowskiej-Curie 14,
tel. (085) 745 70 58, 745 70 59

Druk i oprawa:
Mazowieckie Zakłady Graficzne s.c.
tel. (086) 275 41 31

Spis treści

Wstęp

Niniejsza książka jest podręcznikiem do przedmiotu **Algebra ogólna I** wykładanego w Instytucie Matematyki Uniwersytetu w Białymstoku w oparciu o następujący program:

grupy : definicje i przykłady grup,
ge'a,
twierdzenie Cayley'a,
ilorazowe,

pierścienie :
ilorazowe,
nicze twierdzenie algebry,
Gaussa,

ciała :
całkowitości,
stopień rozszerzenia ciał, rozszerzenia

Wieloletnie doświadczenia autora związane z wykładaniem algebry ogólnej pokazały,
tom.
w trakcie piętnastu wykładów w sposób przystępny dla słuchaczy bez dysponowania dobrymi materiałami dydaktycznymi. Okazało się też, że odsyłanie studentów do literatury nie jest (z wielu powodów) skutecznym rozwiązaniem problemu. Właśnie dlatego powstał ten skrypt. W oparciu o materiał tu umieszczony można sprawnie prowadzić wykłady ubogacając je dodatkowymi przykładami,

nymi,
mami, itp.

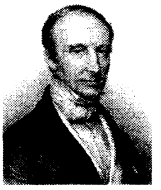
Wskazane jest aby Czytelnik był obeznany z podstawowym kursem elementarnej teorii liczb oraz z podstawowym kursem algebry liniowej.

W podręczniku liczbami naturalnymi będziemy nazywali dodatnie liczby całkowite,
oznaczali przez $\mathbb{N}$. Zatem $\mathbb{N} = \{1, 2,$
symbolem $\square$.

Autor dziękuje mgr Marcinowi Łubie za pomoc w składzie komputerowym tego podręcznika.

Autor

Emil Artin
(1898 – 1962)

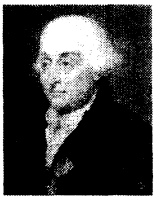


Augustin-Louis Cauchy
(1778 – 1857)

Evariste Galois
(1811 – 1832)

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

David Hilbert
(1862 – 1943)



Joseph Louis Lagrange
(1736 – 1813)

Emma Amalie Noether
(1882 – 1935)

Henri Poincare
(1845 – 1912)

Ludwig Sylow
(1832 – 1918)

Joseph Wedderburn
(1882 – 1948)

Rozdział 1

Pojęcie grupy

1.1 Określenie grupy

Definicja 1. *Działaniem* w niepustym zbiorze A nazywamy każde odwzorowanie zbioru $A \times A$ w zbiór A. Jeżeli $\circ$ jest działaniem w zbiorze A i $a, b \in A$, to $\circ((a, b))$ oznaczamy przez $a \circ b$ i nazywamy *wynikiem działania* $\circ$ na parze (a, b).

Działania będziemy oznaczali symbolami: $\circ$, $\cdot$, $+$, $\oplus$, itd.

Definicja 2. *Systemem algebraicznym* nazywamy układ postaci $(A, \circ_1, \ldots, \circ_n, e_1, \ldots, e_k)$, w którym A jest niepustym zbiorem, $\circ_1, \ldots, \circ_n$ są działaniami w A oraz $e_1, \ldots, e_k \in A$ są wyróżnionymi elementami zbioru A.

Działaniu w zbiorze skończonym A można przyporządkować tabelkę wpisując w lewym górnym rogu oznaczenie działania i wypisując dwukrotnie elementy zbioru A: raz w pierwszym rzędzie poziomym i raz w pierwszym rzędzie pionowym, a następnie wpisując na przecięciu rzędu poziomego odpowiadającego elementowi a i rzędu pionowego odpowiadającego elementowi b wynik omawianego działania na parze (a, b). Odwrotnie, każda tabelka, która w pierwszym rzędzie poziomym i pierwszym rzędzie pionowym zawiera wszystkie elementy danego skończonego zbioru A napisane tylko jeden raz, a na pozostałych miejscach ma wpisane w dowolny sposób pewne elementy zbioru A,

określa w A działanie. Wynikiem tego działania na parze (a, b) jest element stojący w rzędzie poziomym odpowiadającym a i rzędzie pionowym odpowiadającym b. Wynika stąd w szczególności, że w zbiorze n-elementowym można określić dokładnie n^{n^2} różnych działań.

Niech $\circ$ będzie działaniem w zbiorze A. Powiemy, że
(1) działanie $\circ$ jest *łączne*, jeżeli $\forall_{a,b,c\in A}\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,
(2) działanie $\circ$ jest *przemienne*, jeżeli $\forall_{a,b\in A}\ a \circ b = b \circ a$,
(3) $e \in A$ jest *elementem neutralnym* działania $\circ$, jeżeli $\forall_{a\in A}\ e \circ a = a \circ e = a$.

Można wykazać, że jeśli działanie $\circ$ w zbiorze A jest łączne, to wynik tego działania na układzie elementów $a_1, \ldots, a_n \in A$ nie zależy od sposobu rozmieszczenia nawiasów. Na przykład

$$(a_1 \circ (a_2 \circ a_3)) \circ a_4 = (a_1 \circ a_2) \circ (a_3 \circ a_4) = a_1 \circ (a_2 \circ (a_3 \circ a_4)) = \\ = a_1 \circ ((a_2 \circ a_3) \circ a_4) = ((a_1 \circ a_2) \circ a_3) \circ a_4.$$

Pozwala to na pomijanie nawiasów i używanie zapisu $a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n$ dla dowolnej liczby naturalnej n.

Uwaga 1. Łatwo zauważyć, że działanie w zbiorze skończonym jest przemienne wtedy i tylko wtedy, gdy jego tabelka jest symetryczna względem głównej przekątnej. W szczególności w zbiorze n-elementowym istnieje dokładnie $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ różnych działań przemiennych.

Uwaga 2. Każde działanie w zbiorze A może posiadać co najwyżej jeden element neutralny. Rzeczywiście, niech e i f będą elementami neutralnymi działania $\circ$ w zbiorze A. Wtedy w szczególności $e \circ a = a$ oraz $b \circ f = b$ dla dowolnych $a, b \in A$. Podstawiając $a = f$ i $b = e$ uzyskamy stąd, że $e \circ f = f$ i $e \circ f = e$, skąd $e = f$.

Definicja 3. *Grupą* nazywamy system algebraiczny $(G, \circ, e)$ spełniający następujące warunki (aksjomaty):
(G1.) $\forall_{a,b,c\in G}\ (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,
(G2.) $\forall_{a\in G}\ e \circ a = a \circ e = a$,
(G3.) $\forall_{a\in G} \exists_{x\in G}\ a \circ x = x \circ a = e$.

Definicja 4. Grupę $(G, \circ, e)$ nazywamy *abelową*, jeżeli działanie $\circ$ jest przemienne.

Nazwa *grupa abelowa* pochodzi od nazwiska norweskiego matematyka Nielsa Henrika Abela (1802-1829), który jako pierwszy prowadził systematyczne badania wykorzystujące własności grup przemiennych.

Uwaga 3. W dowolnej grupie $(G, \circ, e)$ zachodzą następujące *prawa skracania równości*:
(I) $\forall_{a,b,c\in G}\ [a\circ b = a\circ c \Rightarrow b = c]$ oraz (II) $\forall_{a,b,c\in G}\ [b\circ a = c\circ a \Rightarrow b = c]$.

Rzeczywiście, na mocy **(G3)** istnieje $x \in G$ taki, że $x\circ a = a\circ x = e$, więc jeżeli $a \circ b = a \circ c$, to $x \circ (a \circ b) = x \circ (a \circ c)$, skąd z **(G1)** $(x \circ a) \circ b = (x \circ a) \circ c$, czyli $e \circ b = e \circ c$. Zatem z **(G2)** $b = c$, co dowodzi (I). Dowód (II) jest analogiczny.

Uwaga 4. Element x w aksjomacie **(G3)** jest wyznaczony jednoznacznie przez element a, gdyż jeżeli dodatkowo $y \in G$ spełnia warunek $a \circ y = y \circ a = e$, to $a \circ x = a \circ y$, więc z uwagi 3, $x = y$. Ten dokładnie jeden element x nazywamy *elementem odwrotnym (przeciwnym)* do a i oznaczamy przez a^{-1} (przez $-a$, gdy $\circ = +$). Z uwagi 3 wynika od razu, że x jest elementem odwrotnym do a wtedy i tylko wtedy, gdy $a \circ x = e$. Ponieważ $a^{-1} \circ a = e$, więc a jest elementem odwrotnym do a^{-1}, skąd mamy wzór

$$(a^{-1})^{-1} = a \text{ dla każdego } a \in G.$$

Ponadto dla dowolnych $a, b \in G$ zachodzi wzór:

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}.$$

Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = e$. Z łączności działania $\circ$ mamy $(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = ((a \circ b) \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = (a \circ (b \circ b^{-1})) \circ a^{-1} = (a \circ e) \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e$.

Przez prostą indukcję uzyskujemy stąd, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dla dowolnych elementów $a_1, \ldots, a_n$ grupy G zachodzi wzór:

$$(a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_n)^{-1} = a_n^{-1} \circ \ldots \circ a_2^{-1} \circ a_1^{-1}.$$

Uwaga 5. Niech $(G, \circ, e)$ będzie grupą i niech $a \in G$. Oznaczmy przez l_a odwzorowanie zbioru G w siebie dane wzorem $l_a(x) = a \circ x$

dla $x \in G$ oraz oznaczmy przez r_a odwzorowanie zbioru G w siebie dane wzorem $r_a(x) = x \circ a$ dla $x \in G$. Pokażemy, że wówczas l_a i r_a są bijekcjami G na G. Z uwagi 3 wynika od razu, że przekształcenia l_a i r_a są różnowartościowe. Ponadto dla każdego $b \in G$ jest $l_a(a^{-1} \circ b) = a \circ a^{-1} \circ b = e \circ b = b$ oraz $r_a(b \circ a^{-1}) = b \circ a^{-1} \circ a = b \circ e = b$, więc przekształcenia l_a i r_a są „na".

Rzędem grupy $(G, \circ, e)$ nazywamy moc zbioru G. Rząd grupy $(G, \circ, e)$ będziemy oznaczali przez $|G|$. Jeśli $|G|$ jest liczbą naturalną, to mówimy, że grupa $(G, \circ, e)$ jest *skończona*. Z uwagi 5 wynika, że jeżeli $(G, \circ, e)$ jest grupą skończoną, to w każdym wierszu i w każdej kolumnie tabelki działania $\circ$ występują wszystkie elementy zbioru G.

1.2 Całkowita potęga elementu grupy

I. Niech $(G, \cdot, e)$ będzie grupą. Wówczas dla $a \in G$, a^{-1} jest elementem odwrotnym do a. Całkowitą potęgę elementu a określamy następująco:

1. $a^0 = e$,
2. $a^1 = a$,
3. $a^{n+1} = a^n \cdot a$ dla $n = 1, 2, \ldots$
4. $a^{-n} = (a^{-1})^n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Zatem dla $n = 1, 2, \ldots$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$$

Można udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych m, n i dla każdego $a \in G$ zachodzą wzory:

$$(1)\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \text{ oraz } (2)\ (a^n)^m = a^{nm}.$$

Ponadto jeżeli $a, b \in G$ są takie, że $a \cdot b = b \cdot a$, to dla dowolnego całkowitego n zachodzi wzór:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Zapis użyty w **I** nazywamy *multiplikatywnym* (od łacińskiego *mutiplicare* — mnożyć). W tym zapisie często element neutralny e oznacza się przez 1, chociaż nie musi to być liczba naturalna 1.

II. Niech $(G, +, 0)$ będzie grupą. Wówczas dla $a \in G$, $-a$ jest elementem przeciwnym do a. Całkowitą wielokrotność elementu a określamy następująco:

1'. $0 \cdot a = 0$,

2'. $1 \cdot a = a$,

3'.

4'. $(-n) \cdot a = n \cdot (-a)$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Taki zapis nazywamy *addytywnym* (od łacińskiego *addere* — dodawać) i z reguły jest on stosowany jedynie w przypadku grup abelowych. W tym zapisie element neutralny grupy jest oznaczany przez 0, chociaż nie musi to być liczba całkowita 0.

Z **I** wynika, że dla dowolnych liczb całkowitych m, n i dla każdego $a \in G$ zachodzą wzory:

$$(1)' \; n \cdot a + m \cdot a = (n + m) \cdot a \text{ oraz } (2)' \; n \cdot (m \cdot a) = (nm) \cdot a.$$

Jeżeli napiszemy *niech G będzie grupą*, to będziemy mieli na myśli grupę multiplikatywną z działaniem oznaczonym kropką, którą — tak jak w przypadku wyrażeń algebraicznych — często będziemy pomijać.

1.3 Przykłady grup

Przykład 1. Niech $G = \{a\}$ będzie dowolnym zbiorem jednoelementowym. W zbiorze tym można określić tylko jedno działanie: $a \cdot a = a$. Wówczas $(G, \cdot, a)$ jest grupą. Nazywamy ją *grupą trywialną*.

Przykład 2. Addytywne grupy liczbowe. Tak będziemy nazywać grupy, których elementami są pewne liczby zespolone, a działaniami — zwykłe dodawanie liczb. Najbardziej typowymi przykładami takich grup są: addytywna grupa liczb całkowitych $(\mathbb{Z}, +, 0)$ oznaczana przez $\mathbb{Z}^+$, wymiernych $(\mathbb{Q}, +, 0)$ oznaczana przez $\mathbb{Q}^+$, rzeczywi-

stych $(\mathbb{R}, +, 0)$ oznaczana przez $\mathbb{R}^+$ i zespolonych $(\mathbb{C}, +, 0)$ oznaczana przez $\mathbb{C}^+$.

Przykład 3. Multiplikatywne grupy liczbowe. Elementami takich grup są pewne niezerowe liczby zespolone, natomiast działaniem — zwykłe mnożenie liczb. Wśród nich najbardziej typowymi są:

$$(\{-1,1\}, \cdot, 1),\ (\mathbb{Q}^*, \cdot, 1),\ (\mathbb{R}^*, \cdot, 1),\ (\mathbb{C}^*, \cdot, 1),\ (\mathbb{C}_n, \cdot, 1),\ (\mathbb{C}_\infty, \cdot, 1),$$

gdzie $K^* = K \setminus \{0\}$ dla $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, natomiast $\mathbb{C}_n$ jest zbiorem wszystkich zespolonych pierwiastków stopnia n z 1, tzn.

$$\mathbb{C}_n = \{\cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{n} :\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

i wreszcie $\mathbb{C}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_n$. Z algebry liniowej wiemy, że $|\mathbb{C}_n| = n$. Ważnym przykładem z punktu widzenia klasyfikacji grup abelowych są grupy $\mathbb{C}_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}_{p^n}$, dla liczb pierwszych p.

Przykład 4. Jeżeli V jest przestrzenią liniową nad ciałem K, to V z dodawaniem wektorów $+$ i wyróżnionym elementem θ (wektor zerowy) tworzy grupę abelową $(V, +, \theta)$. Stąd mamy np. grupy $(K^n, +, \theta)$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Przykład 5. Jeżeli K jest ciałem, to $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ tworzy grupę abelową. Nazywamy ją grupą multyplikatywną ciała K i oznaczamy przez K^*.

Przykład 6. Addytywna grupa reszt modulo m. Niech m będzie dowolną liczbą naturalną i niech $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. W zbiorze $\mathbb{Z}_m$ określamy *dodawanie modulo* m, $\oplus_m$ przyjmując, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_m$:

$$a \oplus_m b = \text{reszta z dzielenia } a + b \text{ przez } m.$$

W oparciu o własności kongruencji łatwo wykazać, że $(\mathbb{Z}_m, +, 0)$ jest grupą abelową i $|\mathbb{Z}_m| = m$. Grupę tę będziemy oznaczali przez $\mathbb{Z}_m^+$.

Przykład 7. Multiplikatywna grupa reszt modulo m. Przy oznaczeniach przykładu 6 niech

$$\mathbb{Z}_m^* = \{k \in \mathbb{Z}_m : \ NWD(k, m) = 1\}.$$

W zbiorze $\mathbb{Z}_m^*$ określamy *mnożenie modulo* m, $\odot_m$ przyjmując, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_m^*$:

$$a \odot_m b = \text{reszta z dzielenia } a \cdot b \text{ przez } m.$$

W oparciu o elementarną teorię liczb można łatwo wykazać, że dla $m > 1$, $(\mathbb{Z}_m^*, \odot_m, 1\}$ tworzy grupę abelową. Grupę tę będziemy oznaczali przez $\mathbb{Z}_m^*$. Z elementarnej teorii liczb wiadomo, że $|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$, gdzie φ jest funkcją Eulera.

Przykład 8. Niech K będzie ciałem i niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $GL_n(K)$ oznacza zbiór wszystkich odwracalnych macierzy kwadratowych stopnia n nad K. Wówczas z algebry liniowej wiadomo, że macierz kwadratowa A stopnia n nad K należy do $GL_n(K)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) \neq 0$. Stąd łatwo wyprowadzić (przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego), że $GL_n(K)$ ze zwykłym mnożeniem macierzy i macierzą jednostkową I_n tworzy grupę. Oznaczamy ją przez $GL_n(K)$. Dla $n \geqslant 2$ ta grupa nie jest abelowa. Rzeczywiście, niech A oznacza macierz, która ma jedynkę na głównej przekątnej oraz na drugim miejscu w pierwszym wierszu, a na pozostałych miejscach same zera i niech B oznacza macierz, która ma same jedynki na głównej przekątnej oraz na drugim miejscu w pierwszej kolumnie. Wtedy $\det(A) = \det(B) = 1$, więc $A, B \in GL_n(K)$. Ale $A \cdot B \neq B \cdot A$, gdyż macierze $A \cdot B$ i $B \cdot A$ mają inne elementy stojące w lewym górnym rogu.

Przykład 9. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Oznaczmy przez $S(X)$ zbiór wszystkich bijekcji $f : X \longrightarrow X$. Niech $\circ$ oznacza składanie przekształceń w $S(X)$, tzn. dla $f, g \in S(X)$ i $x \in X$: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Niech ponadto id_X oznacza przekształcenie tożsamościowe zbioru X na siebie. Ze wstępu do matematyki wynika, że wówczas $(S(X), \circ, id_X)$ tworzy grupę. Nazywamy ją *grupą symetryczną* zbioru X i oznaczamy przez $S(X)$. Można wykazać, że jeśli zbiór X ma co najmniej 3 elementy, to grupa $S(X)$ nie jest abelowa. Jeżeli $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, to zamiast $S(\{1, 2, \ldots, n\})$ piszemy S_n i S_n nazywamy *grupą permutacji* zbioru n-elementowego. Oczywiście $|S_n| = n!$.

Przykład 10. Izometrią płaszczyzny Π nazywamy każde odwzorowanie Π na Π zachowujące odległość punktów. Jeżeli $F \subseteq \Pi$, to izometrią własną figury F nazywamy taką izometrię f płaszczyzny Π, że $f(F) = F$. Niech $\circ$ oznacza składanie przekształceń i niech I będzie przekształceniem tożsamościowym Π na siebie. Wówczas dla każdej figury $F \subseteq \Pi$ zbiór $\mathbb{I}(F)$ wszystkich izometrii własnych figury F tworzy grupę ze względu na składanie przekształceń z wyróżnionym elementem id_Π. Dla $n = 3, 4, \ldots$ przez D_n będziemy oznaczali grupę izometrii własnych n-kąta foremnego. Łatwo zauważyć, że $|D_n| = 2n$ oraz grupa D_n nie jest abelowa. Ponadto grupa $\mathbb{I}(\Pi)$ jest nieskończona i nie jest abelowa.

Rozdział 2

Podgrupa grupy

Definicja 1. *Podgrupą* grupy $(G, \cdot, e)$ nazywamy taki podzbiór $H \subseteq G$, że $e \in H$, $h^{-1} \in H$ dla każdego $h \in H$ oraz $h_1 \cdot h_2 \in H$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$.

Przykład 1. Centrum grupy. Zbiór

$$Z(G) = \{a \in G : \ a \cdot g = g \cdot a \ \text{ dla każdego } g \in G\}$$

nazywamy *centrum* grupy G. Pokażemy, że $Z(G)$ jest podgrupą grupy G. Ponieważ dla każdego $g \in G$ jest $g \cdot e = e \cdot g = g$, więc $e \in Z(G)$. Niech $h \in Z(G)$. Wtedy dla każdego $g \in G$ jest $h \cdot g = g \cdot h$, skąd $g = h^{-1}gh$ oraz $h^{-1} \cdot g = g \cdot h^{-1}$, a więc $h^{-1} \in Z(G)$. Weźmy dowolne $h_1, h_2 \in Z(G)$. Wtedy dla dowolnego $g \in G$, $(h_1h_2)g = = h_1(h_2g) = h_1(gh_2) = (h_1g)h_2 = (gh_1)h_2 = g(h_1h_2)$, skąd $h_1h_2 \in Z(G)$. Zatem $Z(G)$ jest podgrupą grupy G. Zauważmy jeszcze, że grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $G = Z(G)$.

Z definicji 1 mamy od razu, że każda podgrupa H grupy $(G, \cdot, e)$ tworzy grupę ze względu na ograniczenie do H działania $\cdot$. Na odwrót, niech $(G, \cdot, e)$ będzie grupą i niech H będzie takim podzbiorem G, że H tworzy grupę ze względu na ograniczenie do H działania $\cdot$. Wtedy istnieje $f \in H$ będące elementem neutralnym grupy H. Zatem $f \cdot f = f$, skąd $f = e$, czyli $e \in H$. Ponadto z założenia $h_1 \cdot h_2 \in H$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$. Niech $h \in H$. Wtedy istnieje $x \in H$ takie, że $h \cdot x =$

$= x \cdot h = e$. Ale $h, x \in G$, więc $x = h^{-1}$, skąd $h^{-1} \in H$. Wobec tego H jest podgrupą grupy G. W ten sposób udowodniliśmy następujące

Stwierdzenie 1. *Niech $(G, \cdot, e)$ będzie grupą. Podzbiór $H \subseteq G$ jest podgrupą grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy H tworzy grupę ze względu na ograniczenie do H działania $\cdot$.* □

Przykład 2. Ze stwierdzenia 1 wynika od razu, że G i $\{e\}$ są podgrupami grupy $(G, \cdot, e)$. Pierwszą z nich nazywamy *podgrupą niewłaściwą*, zaś drugą -- *trywialną*. Z definicji podgrupy wynika też, że **podgrupa trywialna jest jedyną podgrupą jednoelementową grupy** G.

Stwierdzenie 2. *Niepusty podzbiór $H \subseteq G$ jest podgrupą grupy $(G, \cdot, e)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$.*

Dowód. Niech H będzie podgrupą grupy $(G, \cdot, e)$. Weźmy dowolne $h_1, h_2 \in H$. Wtedy $h_2^{-1} \in H$, skąd $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.

Na odwrót, niech H będzie niepustym podzbiorem zbioru G takim, że $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$. Wtedy istnieje $x \in H$, skąd $e = x \cdot x^{-1} \in H$, czyli $e \in H$. Weźmy dowolne $h \in H$. Wtedy $h^{-1} = e \cdot h^{-1} \in H$, więc $h^{-1} \in H$. W końcu dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$ mamy, że $h_1 \cdot h_2 = h_1 \cdot (h_2^{-1})^{-1} \in H$, czyli $h_1 \cdot h_2 \in H$. Zatem H jest podgrupą grupy G. □

Przykład 3. Podgrupa cykliczna. Niech $(G, \cdot, e)$ będzie grupą i niech $a \in G$. Udowodnimy, że podzbiór

$$\langle a \rangle = \{a^k : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podgrupą grupy G zawierającą element a. Ponieważ $a = a^1$, więc $a \in \langle a \rangle$. W szczególności $\langle a \rangle \neq \emptyset$. Weźmy dowolne $h_1, h_2 \in \langle a \rangle$. Wtedy istnieją liczby całkowite k_1, k_2 takie, że $h_1 = a^{k_1}$ i $h_2 = a^{k_2}$. Zatem $h_1 \cdot h_2^{-1} = a^{k_1} \cdot (a^{k_2})^{-1} = a^{k_1} \cdot a^{-k_2} = a^{k_1 - k_2} \in \langle a \rangle$. Zatem ze stwierdzenia 2, $\langle a \rangle$ jest podgrupą grupy G oraz dodatkowo $a \in \langle a \rangle$. Niech H będzie dowolną podgrupą grupy G taką, że $a \in H$. Wtedy ze stwierdzenia 1 mamy, że $a^k \in H$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, czyli $\langle a \rangle \subseteq H$. Zatem $\langle a \rangle$ jest najmniejszą podgrupą grupy G

zawierającą element a. Nazywamy ją *podgrupą cykliczną generowaną przez element* a. Natomiast a nazywamy *generatorem* podgrupy $\langle a \rangle$.

Definicja 2. Powiemy, że grupa G jest *cykliczna*, jeżeli istnieje element $a \in G$ (zwany *generatorem* tej grupy) taki, że $G = \langle a \rangle$.

Stwierdzenie 3. *Każda grupa cykliczna jest abelowa.*

Dowód. Niech G będzie grupą cykliczną o generatorze a. Wtedy $G = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Weźmy dowolne $x, y \in G$. Wtedy istnieją $k, l \in \mathbb{Z}$ takie, że $x = a^k$ oraz $y = a^l$. Zatem $x \cdot y = a^k \cdot a^l = a^{k+l} = a^{l+k} = a^l \cdot a^k = y \cdot x$, czyli grupa G jest abelowa. □

Twierdzenie 1. *Niech H będzie podgrupą grupy skończonej G. Wtedy $|H|$ jest dzielnikiem $|G|$.*

Dowód. Dla dowolnego $g \in G$ niech

$$gH = \{g \cdot h : h \in H\}.$$

Ponieważ $g = g \cdot e$ i $e \in H$, więc $g \in gH$, skąd

$$G = \bigcup_{g \in G} gH. \tag{2.1}$$

Z prawa skracania równości w grupie wynika, że odwzorowanie $h \mapsto g \cdot h$ dla $h \in H$ jest bijekcją H na gH, czyli

$$|H| = |gH| \text{ dla każdego } g \in G. \tag{2.2}$$

Niech $a, b \in G$ będą takie, że $aH \cap bH \neq \emptyset$. Wtedy istnieją $h_1, h_2 \in H$ takie, że $a \cdot h_1 = b \cdot h_2$. Zatem $b = ah_1h_2^{-1}$ oraz dla dowolnego $h \in H$, $b \cdot h = a \cdot (h_1h_2^{-1}h) \in aH$, gdyż $h_1h_2^{-1}h \in H$. Stąd $bH \subseteq aH$. Ale zbiory aH i bH są skończone, więc z (2.2), $bH = aH$. Stąd i z (2.1) oraz ze skończoności grupy G wynika, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_k \in G$ takie, że zbiory $a_1H, a_2H, \ldots, a_kH$ są parami rozłączne oraz $G = \bigcup_{i=1}^{k} a_iH$. Zatem $|G| = \sum_{i=1}^{k} |a_iH| = k \cdot |H|$, czyli $|H|$ dzieli $|G|$. □

Stwierdzenie 4. *Niech $H \subseteq G$ będzie skończonym niepustym podzbiorem grupy $(G, \cdot, e)$. Wówczas H jest podgrupą grupy G wtedy i tylko wtedy, gdy $h_1 \cdot h_2 \in H$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$.*

Dowód. Jeśli H jest podgrupą grupy G, to $h_1 \cdot h_2 \in H$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$.

Na odwrót, załóżmy, że $h_1 \cdot h_2 \in H$ dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$. Ponieważ $H \neq \emptyset$, więc istnieje $x \in H$. Wtedy $x^2 = x \cdot x \in H$ i jeśli dla pewnego naturalnego n, $x^n \in H$, to także $x^{n+1} = x^n \cdot x \in H$. Zatem $\{x, x^2, x^3, \ldots\} \subseteq H$ i zbiór H jest skończony, więc istnieją liczby naturalne $m > n$ takie, że $x^m = x^n$. Stąd $x^{m-n} = e$ i $m - n \in \mathbb{N}$, więc $e \in H$. Ponadto z tego rozumowania wynika, że dla każdego $h \in H$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $h^n = e$ oraz $n > 1$. Zatem $h^{-1} = h^{n-1} \in H$. Stąd ostatecznie mamy, że H jest podgrupą grupy G. □

Wniosek 1. *Jeżeli rząd grupy G jest liczbą pierwszą, to grupa G jest cykliczna (a więc jest abelowa).*

Dowód. Niech liczba pierwsza p będzie rzędem grupy G. Ponieważ $p > 1$, więc istnieje $a \in G$, $a \neq e$. Zatem podgrupa $\langle a \rangle$ ma co najmniej dwa różne elementy: e i a oraz z twierdzenia 1, $|\langle a \rangle|$ dzieli liczbę pierwszą p. Zatem $|\langle a \rangle| = p$, czyli $|\langle a \rangle| = |G|$, skąd $G = \langle a \rangle$ i grupa G jest cykliczna. Zatem ze stwierdzenia 3 grupa G jest abelowa. □

Stwierdzenie 5. *Część wspólna dowolnej niepustej rodziny podgrup grupy G jest podgrupą grupy G.*

Dowód. Niech $\{H_t\}_{t \in T}$ będzie dowolną niepustą rodziną podgrup grupy $(G, \cdot, e)$. Wtedy $e \in H_t$ dla każdego $t \in T$, więc $e \in \bigcap_{t \in T} H_t$. Niech $h_1, h_2 \in \bigcap_{t \in T} H_t$. Wtedy $h_1, h_2 \in H_t$ dla każdego $t \in T$. Zatem ze stwierdzenia 2, $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H_t$ dla każdego $t \in T$. Stąd $h_1 \cdot h_2^{-1} \in \bigcap_{t \in T} H_t$. Zatem ze stwierdzenia 2, $\bigcap_{t \in T} H_t$ jest podgrupą grupy G. □

Przykład 4. Podgrupa generowana przez podzbiór grupy. Niech $X \subseteq G$ będzie dowolnym podzbiorem grupy $(G, \cdot, e)$. Oznaczmy przez $\mathcal{X}$ rodzinę wszystkich podgrup grupy G zawierających zbiór X.

Ponieważ $G \in \mathcal{X}$, więc rodzina $\mathcal{X}$ jest niepusta. Zatem ze stwierdzenia 5, $\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{X}} H$ jest podgrupą grupy G zawierającą zbiór X. Ponadto z określenia $\langle X \rangle$ wynika, że jeśli H jest podgrupą grupy G zawierającą zbiór X, to $H \in \mathcal{X}$ oraz $\langle X \rangle \subseteq H$. Zatem $\langle X \rangle$ jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podgrupą grupy G zawierającą zbiór X. Nazywamy ją *podgrupą generowaną przez podzbiór* X i oznaczamy przez $\langle X \rangle$. Natomiast X nazywamy *zbiorem generatorów podgrupy* $\langle X \rangle$. Oczywiście $\langle \emptyset \rangle = \{e\}$, bo $\{e\}$ jest najmniejszą podgrupą grupy G. Jeśli zaś zbiór X jest niepusty, to łatwo zauważyć, że $\langle X \rangle$ jest zbiorem wszystkich elementów postaci $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, gdzie $x_1, \ldots, x_n \in X$, $k_1, \ldots, k_n \in \{1, -1\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Jeśli zbiór X jest skończony i $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, to zamiast $\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle$ będziemy pisali $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Stwierdzenie 6. *Jeżeli a jest elementem grupy $(G, \cdot, e)$ i n jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $a^n = e$, to podgrupa $\langle a \rangle$ ma dokładnie n elementów oraz*

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}.$$

Dowód. Oczywiście $\{e, a, \ldots, a^{n-1}\} \subseteq \langle a \rangle$. Niech $h \in \langle a \rangle$. Wtedy istnieje liczba całkowita k taka, że $h = a^k$. Dzieląc z resztą liczbę k przez liczbę n uzyskamy, że $k = qn + r$ dla pewnych $q, r \in \mathbb{Z}$ takich, że $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Zatem $h = a^{qn+r} = a^{qn} \cdot a^r = (a^n)^q \cdot a^r = e^q \cdot a^r = a^r \in \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$. Stąd $\langle a \rangle \subseteq \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$ i ostatecznie $\langle a \rangle = \{e, a, \ldots, a^{n-1}\}$. Gdyby podgrupa $\langle a \rangle$ nie miała dokładnie n elementów, to istniałyby liczby całkowite k, s takie, że $0 \leqslant k < s < n$ oraz $a^s = a^k$. Ale wtedy $a^{s-k} = e$ i $s - k \in \mathbb{N}$ oraz $s - k < n$, więc otrzymalibyśmy sprzeczność z minimalnością liczby n. Kończy to dowód naszego stwierdzenia. □

Stwierdzenie 7. *Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech a będzie elementem grupy $(G, \cdot, e)$ takim, że podgrupa $\langle a \rangle$ ma dokładnie n elementów. Wówczas $a^n = e$ oraz $a^k \neq e$ dla dowolnej liczby naturalnej $k < n$.*

Dowód. Z dowodu stwierdzenia 4 wynika, że istnieje najmniejsza liczba naturalna s taka, że $a^s = e$. Wtedy ze stwierdzenia 6 podgrupa $\langle a \rangle$ ma dokładnie s elementów, skąd $s = n$ i nasze stwierdzenie jest udowodnione. □

Stwierdzenie 8. *Jeżeli* $a^2 = e$ *dla każdego elementu* a *grupy* $(G, \cdot, e)$, *to grupa* G *jest abelowa.*

Dowód. Weźmy dowolne $a, b \in G$. Wtedy $(ab)^2 = e$, $a^2 = e$ i $b^2 = e$. Zatem $abab = aabb$, skąd z praw skracania równości w grupie, $ba = ab$. Zatem grupa G jest abelowa. □

Stwierdzenie 9. *Każda skończona grupa nieabelowa ma rząd większy niż* 5.

Dowód. Niech G będzie grupą rzędu co najwyżej 5. Wtedy $|G| \in \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Jeśli $|G| = 1$, to $G = \{e\}$, więc G jest abelowa. Jeśli $|G| \in \{2, 3, 5\}$, to z wniosku 1 grupa G też jest abelowa. Niech dalej $|G| = 4$. Jeśli istnieje w G element a taki, że $\langle a \rangle = G$, to grupa G jest abelowa (bo jest grupą cykliczną). Załóżmy zatem, że $\langle a \rangle \neq G$ dla każdego $a \in G$. Weźmy dowolne $a \in G$, $a \neq e$. Wtedy podgrupa $\langle a \rangle$ ma co najmniej 2 różne elementy: e, a i jest różna od G, więc z twierdzenia 1, $|\langle a \rangle| = 2$. Zatem ze stwierdzenia 7, $a^2 = e$. Ponieważ dodatkowo $e^2 = e$, więc $a^2 = e$ dla każdego $a \in G$. Zatem ze stwierdzenia 8 grupa G jest abelowa i nasze stwierdzenie zostało udowodnione. □

Rozdział 3

Grupy cykliczne

3.1 Rząd elementu grupy

Definicja 1. Niech a będzie elementem grupy $(G, \cdot, e)$. Jeżeli istnieje liczba naturalna k taka, że $a^k = e$, to najmniejszą taką liczbę naturalną k nazywamy *rzędem elementu* a. W przeciwnym przypadku (tzn. gdy $a^n \neq e$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$) mówimy, że rząd elementu a jest równy ∞ (nieskończoność). Rząd elementu a oznaczamy przez $o(a)$.

Przykład 1. Zauważmy, że $o(-1) = 2$ w grupie $\mathbb{R}^*$, gdyż w tym przypadku $e = 1$ oraz $-1 \neq 1$ i $(-1)^2 = 1$. Natomiast w grupie $\mathbb{R}^+$ mamy, że $o(-1) = \infty$, bo wówczas $e = 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jest $n \cdot (-1) = -n \neq 0$.

Uwaga 1. Przykład 1 pokazuje, że należy być bardzo ostrożnym przy wyznaczaniu rzędu elementu grupy. Przede wszystkim musimy rozumieć naturę działania grupowego oraz wiedzieć jak wygląda element neutralny tej grupy.

Uwaga 2. Ze stwierdzeń 6 i 7 z poprzedniego rozdziału wynika od razu, że dla dowolnego elementu a skończonego rzędu grupy G zachodzi wzór:

$$o(a) = |\langle a \rangle|.$$

W szczególności z twierdzenia 1 z rozdziału 2 mamy, że **rząd dowolnego elementu grupy skończonej G jest dzielnikiem rzędu grupy G.**

Stwierdzenie 1. *Niech a będzie elementem skończonego rzędu grupy $(G, \cdot, e)$. Wtedy dla dowolnego całkowitego k:*

$$a^k = e \iff o(a) \mid k.$$

Dowód. Jeśli $o(a) \mid k$, to istnieje $s \in \mathbb{Z}$ takie, że $k = s \cdot o(a)$. Zatem $a^k = a^{s \cdot o(a)} = (a^{o(a)})^s = e^s = e$. Na odwrót, załóżmy, że $a^k = e$. Wtedy istnieją $q, r \in \mathbb{Z}$ takie, że $k = q \cdot o(a) + r$ i $0 \leqslant r < o(a)$. Stąd $e = a^k = a^{q \cdot o(a) + r} = a^{q \cdot o(a)} \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r$, czyli $a^r = e$. Ale $r < o(a)$, więc $r \notin \mathbb{N}$, czyli $r = 0$. Zatem $k = q \cdot o(a)$ i $o(a) \mid k$. □

Stwierdzenie 2. *Jeżeli a i b są elementami skończonych względnie pierwszych rzędów grupy G oraz $a \cdot b = b \cdot a$, to $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$.*

Dowód. Oznaczmy: $n = o(a)$, $m = o(b)$. Wtedy $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$ oraz $a^n = e$ i $b^m = e$. Z rozdziału 1 mamy, że $(ab)^k = a^k b^k$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. W szczególności $(ab)^{mn} = a^{mn} b^{mn} = e \cdot e = e$, skąd $l = o(ab) \leqslant mn$. Ale $e = (ab)^l = a^l b^l$, więc $e = (a^l b^l)^n = a^{ln} b^{ln} = e b^{ln} = b^{ln}$, czyli $b^{ln} = e$. Zatem ze stwierdzenia 1, $m \mid ln$. Ale $(m, n) = 1$, więc z zasadniczego twierdzenia arytmetyki, $m \mid l$. Analogicznie pokazujemy, że $n \mid l$. Ponieważ $m \mid l$ i $n \mid l$ oraz $(m, n) = 1$, więc $mn \mid l$, czyli $mn \leqslant l$. Ale wcześniej pokazaliśmy, że $l \leqslant mn$, więc ostatecznie $l = mn$, czyli $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$. □

Stwierdzenie 3. *Jeżeli a jest elementem nieskończonego rzędu grupy $(G, \cdot, e)$, to dla dowolnych liczb całkowitych k i l:*

$$a^k = a^l \iff k = l.$$

W szczególności grupa $\langle a \rangle$ jest nieskończona. Ponadto grupa $\langle a \rangle$ posiada dokładnie dwa generatory: a i a^{-1}.

Dowód. Załóżmy, że istnieją różne liczby całkowite k, l takie, że $a^k = a^l$. Bez zmniejszania ogólności możemy zakładać, że $k > l$. Wtedy $k - l \in \mathbb{N}$ i $a^{k-l} = e$, co przeczy temu, że $o(a) = \infty$. Implikacja odwrotna jest oczywista.

Ponieważ $a = (a^{-1})^{-1} \in \langle a^{-1} \rangle$, więc $\langle a \rangle \subseteq \langle a^{-1} \rangle$. Ale $\langle a^{-1} \rangle \subseteq \langle a \rangle$, więc $\langle a^{-1} \rangle = \langle a \rangle$, czyli a^{-1} jest generatorem grupy $\langle a \rangle$. Ponadto z pierwszej części dowodu $a^{-1} \neq a$. Niech teraz $b \in \langle a \rangle$ będzie generatorem grupy $\langle a \rangle$. Wtedy istnieje liczba całkowita k taka, że $b = a^k$ oraz $a \in \langle a^k \rangle$. Zatem istnieje $l \in \mathbb{Z}$ takie, że $a = (a^k)^l = a^{kl}$. Zatem z pierwszej części dowodu $kl = 1$, skąd $k = 1$ lub $k = -1$ oraz $b = a$ lub $b = a^{-1}$. □

Lemat 1. *Niech a będzie elementem skończonego rzędu grupy G. Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej k:*

$$\langle a^k \rangle = \langle a^{(o(a),k)} \rangle.$$

Dowód. Oznaczmy $d = (o(a), k)$. Wtedy $d \mid k$, więc istnieje całkowite l takie, że $k = dl$, skąd $a^k = (a^d)^l \in \langle a^d \rangle$. Zatem $\langle a^k \rangle \subseteq \langle a^d \rangle$. Ponadto z elementarnej teorii liczb wiemy, że istnieją liczby całkowite x, y takie, że $d = o(a)x + ky$. Stąd $a^d = a^{o(a)x+ky} = a^{o(a)x} \cdot a^{ky} = e \cdot a^{ky} = (a^k)^y \in \langle a^k \rangle$. Zatem $\langle a^d \rangle \subseteq \langle a^k \rangle$ i ostatecznie $\langle a^d \rangle = \langle a^k \rangle$. □

Twierdzenie 1. *Niech a będzie elementem skończonego rzędu grupy $(G, \cdot, e)$. Wówczas:*

(i) dla dowolnego naturalnego dzielnika d liczby $o(a)$ zachodzi wzór:

$$o(a^d) = \frac{o(a)}{d},$$

(ii) dla dowolnej liczby całkowitej k zachodzi wzór:

$$o(a^k) = \frac{o(a)}{(o(a),k)}.$$

Dowód. (i) Zauważmy, że $\frac{o(a)}{d} \in \mathbb{N}$ i $(a^d)^{\frac{o(a)}{d}} = a^{d \cdot \frac{o(a)}{d}} = a^{o(a)} = e$. Zatem $k = o(a^d) \leqslant \frac{o(a)}{d}$. Ale $e = (a^d)^k = a^{dk}$, więc ze stwierdzenia 1 mamy, że $o(a) \mid dk$. Zatem $\frac{o(a)}{d} \mid k$, czyli $\frac{o(a)}{d} \leqslant k$ i ostatecznie $k = \frac{o(a)}{d}$.

(ii) Z lematu 1 mamy, że $\langle a^k \rangle = \langle a^{(o(a),k)} \rangle$. Ale $d = (o(a), k)$ jest naturalnym dzielnikiem $o(a)$, więc z (i) oraz z uwagi 2 uzyskujemy, że $\frac{o(a)}{(o(a),k)} = o(a^{(o(a),k)}) = |\langle a^{(o(a),k)} \rangle| = |\langle a^k \rangle| = o(a^k)$. □

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że $\langle a\rangle$ jest skończoną grupą cykliczną rzędu n. Niech d będzie dzielnikiem naturalnym liczby n. Wtedy w grupie $\langle a\rangle$ istnieje dokładnie $\varphi(d)$ elementów rzędu d i są one postaci $a^{\frac{n}{d}\cdot k}$, gdzie $k \in \{1,\ldots,d\}$ oraz $(k,d)=1$.*

Dowód. Niech $k \in \{1,\ldots,d\}$ będzie takie, że $(k,d)=1$. Wtedy $(\frac{n}{d}\cdot k, n) = (\frac{n}{d}\cdot k, \frac{n}{d}\cdot d) = \frac{n}{d}\cdot(k,d) = \frac{n}{d}\cdot 1 = \frac{n}{d}$. Zatem z twierdzenia 1, $o(a^{\frac{n}{d}\cdot k}) = \frac{n}{\frac{n}{d}} = d$.

Niech teraz $b \in \langle a\rangle$ będzie elementem rzędu d. Wtedy istnieje liczba naturalna $m \leqslant n$ taka, że $b = a^m$ oraz z twierdzenia 1, $d = o(a^m) = \frac{n}{(m,n)}$, skąd $(m,n) = \frac{n}{d}$. Ale $(m,n) \mid m$, więc istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $m = \frac{n}{d}\cdot k$. Ponadto $\frac{n}{d} = (m,n) = (\frac{n}{d}\cdot k, \frac{n}{d}\cdot d) = \frac{n}{d}\cdot(k,d)$, więc $(k,d)=1$. Ale $m \leqslant n$, więc $\frac{n}{d}\cdot k \leqslant n$, skąd $k \leqslant d$.

Jeśli $k,l \in \{1,\ldots,d\}$, $(k,d) = (l,d) = 1$ oraz $a^{\frac{n}{d}\cdot k} = a^{\frac{n}{d}\cdot l}$, to $a^{\frac{n}{d}\cdot(k-l)} = e$, więc ze stwierdzenia 1, $n \mid \frac{n}{d}\cdot(k-l)$, skąd $d \mid k-l$. Ale $k,l \in \{1,\ldots,d\}$, więc $k = l$. □

Wniosek 1. *Skończona grupa cykliczna $\langle a\rangle$ rzędu n posiada dokładnie $\varphi(n)$ generatorów i są one postaci: a^k, gdzie $k \in \{1,\ldots,n\}$ oraz $(k,n)=1$.*

Dowód. Element $b \in \langle a\rangle$ jest generatorem grupy $\langle a\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $o(b) = n$. Zatem z twierdzenia 2 grupa $\langle a\rangle$ posiada dokładnie $\varphi(n)$ generatorów i są one postaci: $a^{\frac{n}{n}\cdot k} = a^k$, gdzie $k \in \{1,\ldots,n\}$ oraz $(k,n)=1$. □

Twierdzenie 3. *Każda podgrupa grupy cyklicznej jest grupą cykliczną.*

Dowód. Niech $(G,\cdot,e)$ będzie grupą cykliczną o generatorze a i niech H będzie dowolną podgrupą grupy G. Jeśli $H=\{e\}$, to $H=\langle e\rangle$, czyli grupa H jest cykliczna. Załóżmy więc dalej, że $H \neq \{e\}$. Wtedy istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $e \neq a^k \in H$. Stąd $k \neq 0$ i $a^{-k} = (a^k)^{-1} \in H$. Zatem $k \in \mathbb{N}$ lub $-k \in \mathbb{N}$ i z zasady minimum istnieje najmniejsza liczba naturalna m taka, że $a^m \in H$. Wtedy $\langle a^m\rangle \subseteq H$. Weźmy dowolne $h \in H$. Istnieje $s \in \mathbb{Z}$ takie, że $h = a^s$. Ale $s = qm + r$ dla pewnych $q,r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < m$, więc $a^s = a^{qm+r} = a^{qm}\cdot a^r = (a^m)^q \cdot a^r$, skąd $a^r = a^s\cdot(a^m)^{-q} \in H$, czyli $a^r \in H$. Ponadto $0 \leqslant r < m$, więc z minimalności m, $r \notin \mathbb{N}$, czyli $r = 0$. Zatem $h = (a^m)^q \in \langle a^m\rangle$, czyli

$H \subseteq \langle a^m \rangle$ i ostatecznie $H = \langle a^m \rangle$. □

Twierdzenie 4. *Grupa cykliczna nieskończona $\langle a \rangle$ posiada nieskończenie wiele podgrup i są one postaci: $\langle a^n \rangle$, gdzie $n = 0, 1, \ldots$*

Dowód. Z twierdzenia 3 wynika, że każda podgrupa H grupy $\langle a \rangle$ jest postaci $H = \langle a^k \rangle$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Ale $a^k = (a^{-k})^{-1} \in \langle a^{-k} \rangle$, więc $\langle a^k \rangle \subseteq \langle a^{-k} \rangle$ oraz $\langle a^{-k} \rangle \subseteq \langle a^k \rangle$, bo $a^{-k} \in \langle a^k \rangle$, więc $\langle a^k \rangle = \langle a^{-k} \rangle$, czyli $H = \langle a^n \rangle$ dla pewnego $n = 0, 1, \ldots$

Niech $m, n \in \{0, 1, \ldots\}$ będą takie, że $\langle a^m \rangle = \langle a^n \rangle$. Wtedy $a^m \in \langle a^n \rangle$, więc istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $a^m = (a^n)^k = a^{nk}$. Zatem ze stwierdzenia 3, $m = nk$, czyli $n \mid m$. Analogicznie pokazujemy, że $m \mid n$. Stąd $m \mid n$ i $n \mid m$ oraz $n, m \in \{0, 1, \ldots\}$, więc $m = n$. □

Przykład 2. Ponieważ $\mathbb{Z}^+ = \langle 1 \rangle$ i $o(1) = \infty$, więc z twierdzenia 4 wynika, że wszystkimi podgrupami grupy $\mathbb{Z}^+$ są: $\langle n \rangle = \{n \cdot k : k \in \mathbb{Z}\}$ dla $n = 0, 1, \ldots$ Zauważmy, że podgrupa $\langle n \rangle$ jest nam dobrze znana już od szkoły podstawowej, gdyż jej elementami są wszystkie całkowite wielokrotności liczby n. Ponadto ze stwierdzenia 3 wynika, że grupa $\mathbb{Z}^+$ posiada dokładnie dwa generatory: 1 i -1.

Twierdzenie 5. *Wszystkimi podgrupami skończonej grupy cyklicznej $\langle a \rangle$ są podgrupy postaci $\langle a^d \rangle$, gdzie d przebiega wszystkie dzielniki naturalne liczby $o(a)$. W szczególności liczba wszystkich podgrup grupy $\langle a \rangle$ jest równa liczbie wszystkich dzielników naturalnych liczby $o(a)$.*

Dowód. Jeśli $\langle a^{d_1} \rangle = \langle a^{d_2} \rangle$ dla pewnych dzielników naturalnych d_1, d_2 liczby $o(a)$, to z twierdzenia 1 i z uwagi 2: $\frac{n}{d_1} = o(a^{d_1}) = |\langle a^{d_1} \rangle| = |\langle a^{d_2} \rangle| = o(a^{d_2}) = \frac{n}{d_2}$, czyli $d_1 = d_2$.

Niech H będzie dowolną podgrupą grupy $\langle a \rangle$. Wtedy z twierdzenia 3 istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $H = \langle a^k \rangle$. Ale z lematu 1, $\langle a^k \rangle = \langle a^{(o(a),k)} \rangle$ i $(o(a), k)$ jest dzielnikiem naturalnym liczby $o(a)$, więc twierdzenie zostało udowodnione. □

Uwaga 3. Z twierdzenia 5 wynika, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy zbiorem wszystkich podgrup skończonej grupy cyklicznej $\langle a \rangle$ i zbiorem wszystkich dzielników naturalnych liczby $o(a)$. W szczególności wynika stąd, że **dla każdej liczby**

naturalnej d dzielącej rząd skończonej grupy cyklicznej $\langle a\rangle$ istnieje dokładnie jedna podgrupa rzędu d grupy $\langle a\rangle$.

Stwierdzenie 4. *Jeżeli liczba naturalna n posiada co najmniej dwa różne, nieparzyste dzielniki pierwsze, to grupa $\mathbb{Z}_n^*$ nie jest cykliczna.*

Dowód. Z założenia istnieją różne, nieparzyste liczby pierwsze p, q oraz liczby naturalne α, β, m takie, że $n = p^\alpha q^\beta m$ oraz m nie jest podzielne ani przez p ani przez q. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika zatem, że istnieją $a, b \in \mathbb{Z}_n^*$ takie, że $a \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$, $a \equiv 1 \pmod{q^\beta m}$ oraz $b \equiv 1 \pmod{p^\alpha m}$ i $b \equiv -1 \pmod{q^\beta}$. Ponieważ liczby p i q są nieparzyste, więc $a \neq 1$ i $b \neq 1$. Gdyby $a = b$, to $1 \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$, skąd $p^\alpha | 2$ i mamy sprzeczność. Zatem $a \neq b$ i wobec tego $\{1, a\} \neq \{1, b\}$. Ponadto $a^2 \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ i $a^2 \equiv 1 \pmod{q^\beta m}$, więc $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$, skąd $a \odot_n a = 1$, czyli $o(a) = 2$ w grupie $\mathbb{Z}_n^*$, skąd $\langle a\rangle = \{1, a\}$. Podobnie pokazujemy, że $\langle b\rangle = \{1, b\}$. Zatem grupa $\mathbb{Z}_n^*$ posiada dwie różne podgrupy rzędu 2, więc z uwagi 3 ta grupa nie jest cykliczna. □

Uwaga 4. Z elementarnej teorii liczb wiadomo, że jeśli $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$, gdzie $p_1, \ldots, p_s$ są różnymi liczbami pierwszymi oraz $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, to liczba wszystkich dzielników naturalnych liczby n jest równa $\Theta(n) = (\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_s+1)$. Ponadto $\varphi(n) = \varphi(p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_s^{\alpha_s})$ i dla liczb pierwszych p oraz $\alpha \in \mathbb{N}$, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Przykład 3. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Wtedy $\mathbb{Z}_n^+ = \langle 1\rangle$ oraz $o(1) = n$. Zatem z wniosku 1 grupa $\mathbb{Z}_n^+$ posiada dokładnie $\varphi(n)$ generatorów i są nimi liczby naturalne $k \leqslant n$ względnie pierwsze z n. Ponadto podgrupy grupy $\mathbb{Z}_n^+$ są postaci: $\{0\}$ oraz $\langle d\rangle = \{0, d, 2d, \ldots, (\frac{n}{d} - 1)\cdot d\}$, gdzie $d < n$ jest dzielnikiem naturalnym liczby n. Zatem grupa $\mathbb{Z}_n^+$ posiada dokładnie $\Theta(n)$ wszystkich podgrup.

Lemat 2. *Niech a będzie elementem maksymalnego rzędu w skończonej grupie abelowej A. Wówczas $o(b) \mid o(a)$ dla każdego $b \in A$.*

Dowód. Załóżmy, że istnieje $b \in A$ takie, że $o(b)$ nie dzieli $o(a)$. Wtedy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby naturalne m, n niepodzielne przez p i nieujemne liczby całkowite α, β takie, że $\alpha < \beta$ oraz

$o(a) = p^\alpha m$ i $o(b) = p^\beta n$. Niech $x = a^{p^\alpha}$ i $y = b^n$. Wtedy z twierdzenia 1, $o(x) = m$ oraz $o(y) = p^\beta$. Ale $(m, p^\beta) = 1$, gdyż p nie dzieli m, więc ze stwierdzenia 2, $o(xy) = p^\beta m > p^\alpha m = o(a)$ i mamy sprzeczność. □

Twierdzenie 6. *Jeżeli A jest skończoną grupą abelową i dla każdej liczby naturalnej d dzielącej $|A|$ istnieje dokładnie jedna podgrupa rzędu d grupy A, to grupa A jest cykliczna.*

Dowód. Załóżmy, że przy tych założeniach grupa A nie jest cykliczna. Niech a będzie elementem maksymalnego rzędu w grupie A. Wtedy $\langle a \rangle \neq A$, więc istnieje $b \in A$ takie, że $b \notin \langle a \rangle$. Z lematu 2, $o(b) \mid o(a)$. Zatem z twierdzenia 5 istnieje w grupie $\langle a \rangle$ podgrupa H rzędu $o(b)$. Ale $|\langle b \rangle| = o(b)$, więc na mocy założenia $\langle b \rangle = H$, skąd $b \in H \subseteq \langle a \rangle$, czyli $b \in \langle a \rangle$ i mamy sprzeczność. Zatem grupa A jest cykliczna. □

Rozdział 4

Warstwy, dzielniki normalne

4.1 Warstwy grupy względem podgrupy

Niech H będzie podgrupą grupy $(G, \cdot, e)$. W zbiorze G wprowadzamy relacje $\sim_l$ oraz $\sim_r$ przyjmując, że dla dowolnych $a, b \in G$:

$$a \sim_l b \Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H, \tag{4.1}$$

$$a \sim_r b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H. \tag{4.2}$$

Ponieważ dla każdego $a \in G$ jest $a^{-1} \cdot a = e = a \cdot a^{-1}$ oraz $e \in H$, więc relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są zwrotne.

Ponadto dla dowolnych $a, b \in G$:

• jeżeli $a \sim_l b$, to $a^{-1} \cdot b \in H$, skąd $(a^{-1} \cdot b)^{-1} \in H$, czyli $b^{-1} \cdot a \in H$, więc $b \sim_l a$;

• jeżeli $a \sim_r b$, to $a \cdot b^{-1} \in H$, skąd $(a \cdot b^{-1})^{-1} \in H$, czyli $b \cdot a^{-1} \in H$, więc $b \sim_r a$.

Zatem relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są symetryczne.

W końcu, dla dowolnych $a, b, c \in G$:

• jeżeli $a \sim_l b$ i $b \sim_l c$, to $a^{-1} \cdot b \in H$ i $b^{-1} \cdot c \in H$, skąd $(a^{-1} \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot c) \in H$, czyli $a^{-1} \cdot c \in H$, więc $a \sim_l c$;

• jeżeli $a \sim_r b$ i $b \sim_r c$, to $a \cdot b^{-1} \in H$ i $b \cdot c^{-1} \in H$, skąd $(a \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot c^{-1}) \in H$, czyli $a \cdot c^{-1} \in H$, więc $a \sim_r c$.

Zatem relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są przechodnie.

Stąd wynika, że relacje $\sim_l$ i $\sim_r$ są relacjami równoważności w zbiorze G. Klasę abstrakcji relacji $\sim_l$ o reprezentancie $a \in G$ oznaczamy przez aH i nazywamy **warstwą lewostronną grupy G względem podgrupy H o reprezentancie a.**

1. Dla dowolnego $a \in G$ zachodzi wzór:

$$aH = \{a \cdot h : h \in H\}. \tag{4.3}$$

Dowód. Dla $h \in H$ mamy, że $a^{-1} \cdot (a \cdot h) = h \in H$, więc $a \sim_l a \cdot h$ oraz $a \cdot h \in aH$. Na odwrót, niech $g \in aH$. Wtedy $a \sim_l g$, skąd $a^{-1} \cdot g = h \in H$. Zatem $g = a \cdot h$. Zatem $aH = \{a \cdot h : h \in H\}$. □

Z własności klas abstrakcji relacji równoważności mamy od razu następujący **warunek równości warstw lewostronnych względem podgrupy H:**

2. Dla dowolnych $a, b \in G$:

$$aH = bH \Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H. \tag{4.4}$$

Zauważmy, że w szczególności dla $h \in H$ jest $hH = eH = H$.

Klasę abstrakcji relacji $\sim_r$ o reprezentancie $a \in G$ oznaczamy przez Ha i nazywamy **warstwą prawostronną grupy G względem podgrupy H o reprezentancie a.**

3. Dla dowolnego $a \in G$ zachodzi wzór:

$$Ha = \{h \cdot a : h \in H\}. \tag{4.5}$$

Dowód. Dla $h \in H$ mamy, że $a \cdot (h \cdot a)^{-1} = a \cdot a^{-1} \cdot h^{-1} = h^{-1} \in H$, więc $a \sim_r h \cdot a$ oraz $h \cdot a \in Ha$. Na odwrót, niech $g \in Ha$. Wtedy $a \sim_r g$, więc $g \sim_r a$, czyli $g \cdot a^{-1} = h \in H$, skąd $g = h \cdot a$. Zatem $Ha = \{h \cdot a : h \in H\}$. □

Z własności klas abstrakcji relacji równoważności mamy od razu następujący **warunek równości warstw prawostronnych grupy G względem podgrupy H:**

4. Dla dowolnych $a, b \in G$:

$$Ha = Hb \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H. \tag{4.6}$$

Zauważmy, że w szczególności dla $h \in H$ jest $Hh = He = H$.

Z podstawowych własności klas abstrakcji relacji równoważności wynika

5. Dowolne dwie warstwy lewostronne (prawostronne) grupy G względem podgrupy H są albo równe albo rozłączne.

6. Dowolne dwie warstwy lewostronne (prawostronne) grupy G względem podgrupy H są równoliczne.

Dowód. Niech $a, b \in G$. Rozważmy przekształcenie $f : H \longrightarrow aH$ dane wzorem $f(h) = a \cdot h$ dla $h \in H$. Z **1.** wynika, że f jest „na", zaś z prawa skracania równości w grupie mamy, że f jest różnowartościowe. Zatem zbiory aH i H są równoliczne. Analogicznie funkcja $g : H \longrightarrow Hb$ dana wzorem $g(h) = h \cdot b$ dla $h \in H$ jest „na" oraz jest różnowartościowa, więc zbiory Hb i H też są równoliczne. Zatem zbiory aH i Hb dla dowolnych $a, b \in G$ też są równoliczne. □

7. Zbiór $L_G(H)$ wszystkich warstw lewostronnych grupy G względem podgrupy H jest równoliczny ze zbiorem $P_G(H)$ wszystkich warstw prawostronnych grupy G względem podgrupy H.

Dowód. Z **1.** i **3.** mamy, że $L_G(H) = \{aH : a \in G\}$ oraz $P_G(H) = \{Hb : b \in G\}$. Niech $f : L_G(H) \longrightarrow P_G(H)$ będzie dane wzorem: $f(aH) = Ha^{-1}$ dla $a \in G$. Wówczas dla dowolnych $a, b \in G$ mamy, że $f(aH) = f(bH) \Leftrightarrow Ha^{-1} = Hb^{-1} \Leftrightarrow a^{-1} \cdot (b^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow aH = bH$ na mocy podanych wcześniej własności warstw. Oznacza to, że f jest funkcją i f jest funkcją różnowartościową. Ponadto dla $b \in G$ mamy, że $b = (b^{-1})^{-1}$, więc $Hb = f(b^{-1}H)$, czyli f jest „na". Zatem f jest bijekcją i zbiory $L_G(H)$ oraz $P_G(H)$ są równoliczne. □

Moc zbioru wszystkich warstw lewostronnych (prawostronnych) grupy G względem podgrupy H nazywamy **indeksem podgrupy** H **w grupie** G i oznaczamy przez $(G : H)$.

Twierdzenie Lagrange'a. *Jeżeli H jest podgrupą grupy skończonej G, to*

$$|G| = |H| \cdot (G : H). \tag{4.7}$$

W szczególności rząd podgrupy H jest dzielnikiem rzędu grupy G.

Dowód. Ponieważ zbiór G jest skończony więc z zasady abstrakcji wynika, że istnieją $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ takie, że warstwy $a_1H, a_2H, \ldots$ $\ldots, a_nH$ są parami rozłączne i ich suma daje zbiór G, czyli $G = \bigcup_{i=1}^{n} a_iH$. Ale H jest zbiorem skończonym, więc na mocy **6.** mamy, że $|a_iH| = |H|$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $n = (G : H)$, więc $|G| = |H| \cdot (G : H)$. □

4.2 Dzielnik normalny grupy

Definicja 1. Niech H będzie podgrupą grupy $(G, \cdot, e)$. Powiemy, że H jest *dzielnikiem normalnym* (podgrupą normalną) grupy G, jeżeli

$$gH = Hg \text{ dla każdego } g \in G. \tag{4.8}$$

Piszemy wtedy: $H \lhd G$.

Przykład 1. $\{e\} \lhd G$ i $G \lhd G$.

Przykład 2. Każda podgrupa zawarta w centrum grupy G jest jej dzielnikiem normalnym. Rzeczywiście, niech H będzie podgrupą grupy G zawartą w $Z(G)$. Wtedy dla każdego $g \in G$ mamy, że $gH = \{g \cdot h : h \in H\} = \{h \cdot g : h \in H\} = Hg$. Zatem $H \lhd G$. W szczególności $Z(G) \lhd G$.

Przykład 3. W grupie abelowej G każda podgrupa jest dzielnikiem normalnym (bo wtedy $Z(G) = G$ i każda podgrupa grupy G jest zawarta w $Z(G)$).

Przykład 4. Każda podgrupa H indeksu 2 grupy G jest dzielnikiem normalnym grupy G. Rzeczywiście, z **7.** wynika, że grupa G ma dokładnie dwie warstwy lewostronne i dokładnie dwie warstwy prawostronne względem podgrupy H. Ponieważ $eH = H = He$, więc jedną z warstw lewostronnych (prawostronnych) jest H, zaś drugą warstwą lewostronną (prawostronną) jest $G \setminus H$. Weźmy dowolne $g \in G$. Jeżeli $g \in H$, to $gH = H = Hg$. Jeśli $g \notin H$, to $gH \neq H$ i $Hg \neq H$, więc $gH = G \setminus H = Hg$, czyli $gH = Hg$. Zatem dla każdego $g \in G$ jest

$gH = Hg$, a więc $H \lhd G$. Np. każda podgrupa rzędu 4 grupy izometrii własnych kwadratu jest jej dzielnikiem normalnym. Zaś w grupie izometrii własnych trójkąta równobocznego podgrupa obrotów jest dzielnikiem normalnym (natomiast żadna podgrupa rzędu 2 nie jest dzielnikiem normalnym tej grupy).

Stwierdzenie 1. *Niech H będzie podgrupą grupy G. Wówczas równoważne są warunki:*

(i) $H \lhd G$;

(ii) $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$ dla dowolnych $g \in G$ i $h \in H$.

Dowód. (i)⇒(ii) Weźmy dowolne $g \in G$ oraz $h \in H$. Ponieważ $gH = Hg$ oraz $g \cdot h \in gH$, więc $g \cdot h \in Hg$. Zatem istnieje $k \in H$ takie, że $g \cdot h = k \cdot g$, skąd $g \cdot h \cdot g^{-1} = k \in H$.

(ii)⇒(i) Weźmy dowolne $g \in G$. Wtedy dla $h \in H$ mamy, że $g \cdot h \cdot g^{-1} = k \in H$. Zatem $g \cdot h = k \cdot g \in Hg$. Stąd $gH \subseteq Hg$. Ponadto $g^{-1} \cdot h \cdot g = h_1 \in H$, więc $h \cdot g = g \cdot h_1 \in gH$. Stąd $Hg \subseteq gH$ i ostatecznie $gH = Hg$ dla każdego $g \in G$. Zatem $H \lhd G$. □

Stwierdzenie 2. *Podgrupa H rzędu 2 grupy G jest jej dzielnikiem normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy H jest zawarta w centrum grupy G.*

Dowód. Jeżeli $H \subseteq Z(G)$, to z przykładu 2 mamy, że $H \lhd G$. Na odwrót, załóżmy, że $H \lhd G$. Ponieważ $|H| = 2$, więc istnieje $a \in H$ takie, że $o(a) = 2$ i wtedy $a \neq e$ oraz $a^2 = e$ i $H = \{e, a\}$. Weźmy dowolne $g \in G$. Wtedy ze stwierdzenia 1 mamy, że $g \cdot a \cdot g^{-1} \in H$. Jeśli $g \cdot a \cdot g^{-1} = e$, to $g \cdot a = g$, skąd $a = e$ i mamy sprzeczność. Zatem $g \cdot a \cdot g^{-1} = a$, skąd $g \cdot a = a \cdot g$. Zatem $a \in Z(G)$. Ale $e \in Z(G)$, więc ostatecznie $H \subseteq Z(G)$. □

Przykład 5. Część wspólna dowolnej niepustej rodziny dzielników normalnych grupy G jest dzielnikiem normalnym grupy G. Rzeczywiście, niech $\{H_i\}_{i \in I}$ będzie niepustą rodziną dzielników normalnych grupy G oraz niech $H = \bigcap_{i \in I} H_i$. Wtedy z rozdziału 2 mamy, że H jest podgrupą grupy G. Weźmy dowolne $g \in G$ i dowolne $h \in H$. Wtedy $h \in H_i$ dla każdego $i \in I$, więc ze stwierdzenia 1, $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H_i$ dla $i \in I$, czyli $g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$. Zatem ze stwierdzenia 1, $H \lhd G$.

Definicja 2. Iloczynem algebraicznym podgrup A, B grupy G nazywamy zbiór

$$AB = \{a \cdot b : a \in A, \ b \in B\}. \tag{4.9}$$

Stwierdzenie 3. *Jeżeli H jest podgrupą grupy G, zaś A jest dzielnikiem normalnym grupy G, to $AH = HA$ oraz AH jest podgrupą grupy G.*

Dowód. Weźmy dowolne $a \in A$ oraz $h \in H$. Wtedy ze stwierdzenia 1, $h \cdot a \cdot h^{-1} = b \in A$, skąd $h \cdot a = b \cdot h \in AH$. Zatem $HA \subseteq AH$. Ponadto ze stwierdzenia 1, $h^{-1} \cdot a \cdot h = c \in A$, więc $a \cdot h = h \cdot c \in HA$, więc $AH \subseteq HA$. Zatem $AH \subseteq HA$ i $HA \subseteq AH$, czyli $AH = HA$. Dalej, dla $a \in A$ mamy, że $a = e \cdot a \in HA$, bo $e \in H$, skąd $A \subseteq HA$. Analogicznie $H \subseteq HA$. Niech $a \in A$ oraz $h \in H$. Wtedy $(a \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot a^{-1} \in HA$. Ponadto dla $a, b \in A$ oraz $h, k \in H$ mamy, że $h \cdot b = c \cdot l$ dla pewnych $c \in A$ oraz $l \in H$, więc $(a \cdot h) \cdot (b \cdot k) = a \cdot (h \cdot b) \cdot k = a \cdot (c \cdot l) \cdot k = (a \cdot c) \cdot (l \cdot k) \in AH$. Zatem AH jest podgrupą grupy G. □

Przykład 6. Jeżeli A i B są dzielnikami normalnymi grupy G, to AB też jest dzielnikiem normalnym grupy G. Rzeczywiście, na mocy stwierdzenia 3 mamy, że AB jest podgrupą grupy G. Ponadto dla $g \in G$ oraz dla $a \in A$ i $b \in B$ mamy, że

$$g \cdot (a \cdot b) \cdot g^{-1} = (g \cdot a \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot b \cdot g^{-1}) \in AB,$$

bo $g \cdot a \cdot g^{-1} \in A$ oraz $g \cdot b \cdot g^{-1} \in B$. Zatem ze stwierdzenia 1 mamy, że $AB \lhd G$.

4.3 Komutant grupy

Niech G będzie grupą i niech $a, b \in G$. *Komutatorem elementów a, b* nazywamy element postaci

$$[a, b] = a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b. \tag{4.10}$$

Zauważmy, że dla dowolnych $a, b, c \in G$ zachodzą wzory:

$$[a,b]^{-1} = [b,a] \tag{4.11}$$

Dowód. Mamy, że $[a,b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = [b,a]$. □

$$c \cdot [a,b] \cdot c^{-1} = [cac^{-1}, cbc^{-1}] \tag{4.12}$$

Dowód. Mamy

$$c[a,b]c^{-1} = c(a^{-1}b^{-1}ab)c^{-1} = ca^{-1}c^{-1}cb^{-1}c^{-1}cac^{-1}cbc^{-1} =$$

$$(cac^{-1})^{-1}(cbc^{-1})^{-1}(cac^{-1})(cbc^{-1}) = [cac^{-1}, cbc^{-1}]. \square$$

$$a \cdot b = b \cdot a \iff [a,b] = e. \tag{4.13}$$

Dowód. Jeśli $ab = ba$, to $b^{-1}ab = a$, skąd $a^{-1}b^{-1}ab = e$, czyli $[a,b] = e$. Na odwrót, niech $[a,b] = e$. Wtedy $a^{-1}b^{-1}ab = e$, skąd $b^{-1}ab = a$ oraz $ab = ba$. □

Komutantem grupy G nazywamy zbiór G' wszystkich iloczynów wszystkich możliwych komutatorów utworzonych z elementów grupy G. Zatem G' składa się z elementów postaci: $[a,b]$, $[a,b] \cdot [c,d]$, $[a,b] \cdot [c,d] \cdot [g,h]$, itd. $(a,b,c,d,g,h,\ldots \in G)$. Zatem $e = [e,e] \in G'$ oraz dla $x, y \in G'$ istnieją komutatory $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ takie, że $x = x_1x_2\ldots x_n$ oraz $y = y_1y_2\ldots y_m$. Stąd

$$xy^{-1} = x_1x_2\ldots x_n y_m^{-1} y_{m-1}^{-1} \ldots y_1^{-1},$$

skąd na mocy (4.11) mamy, że $xy^{-1} \in G'$. Zatem G' jest podgrupą grupy G. Ponadto dla $g \in G$ mamy, że $gxg^{-1} = g(x_1x_2\ldots x_n)g^{-1} = (gx_1g^{-1})(gx_2g^{-1})\ldots(gx_ng^{-1}) \in G'$ na mocy (4.12). Wynika stąd, że $G' \lhd G$. Ponadto z określenia komutanta oraz z (4.13) wynika od razu, że grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $G' = \{e\}$.

Rozdział 5

Grupa ilorazowa, iloczyn prosty, homomorfizm

5.1 Grupa ilorazowa

Niech H będzie dzielnikiem normalnym grupy G. Oznaczmy przez G/H zbiór wszystkich warstw lewostronnych grupy G względem podgrupy H. Tak więc

$$G/H = \{gH : g \in G\} \tag{5.1}$$

oraz $|G/H| = (G : H)$. Ponadto, gdy grupa G jest skończona, to na mocy twierdzenia Lagrange'a $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

W zbiorze G/H wprowadzamy działanie $\circ$ przyjmując, że dla dowolnych $a, b \in G$:

$$(aH) \circ (bH) = (a \cdot b)H. \tag{5.2}$$

Uzasadnimy, że określenie działania $\circ$ jest poprawne, czyli, że nie zależy od wyboru reprezentantów warstw. Niech zatem $a, b, c, d \in G$ będą takie, że $aH = bH$ oraz $cH = dH$. Wtedy $a^{-1}b \in H$ oraz $c^{-1}d \in H$. Zatem $(ac)^{-1}(bd) = c^{-1}a^{-1}bd = (c^{-1}d)[d^{-1}(a^{-1}b)d] \in H$, gdyż $H \lhd G$. Zatem $(ac)H = (bd)H$.

Teraz uzasadnimy, że działanie $\circ$ jest łączne. W tym celu weźmy dowolne $a, b, c \in G$ i obliczmy:

$(aH)\circ[(bH)\circ(cH)] = (aH)\circ((b\cdot c)H) = (a\cdot(b\cdot c))H = ((ab)c)H = [(ab)H]\circ(cH) = [(aH)\circ(bH)]\circ(cH)$.

Sprawdzimy, że warstwa $eH = H$ jest elementem neutralnym działania $\circ$. Dla dowolnego $a \in G$ mamy, że $(aH)\circ H = (aH)\circ(eH) = (a\cdot e)H = aH = (e\cdot a)H = (eH)\circ(aH) = H\circ(aH)$. Ponadto $(aH)\circ(a^{-1}H) = (a\cdot a^{-1})H = eH = H$ oraz $(a^{-1}H)\circ(aH) = (a^{-1}\cdot a)H = eH = H$. Zatem warstwą odwrotną do warstwy (aH) jest warstwa $a^{-1}H$, czyli

$$(aH)^{-1} = a^{-1}H \text{ dla każdego } a \in G. \tag{5.3}$$

W ten sposób udowodniliśmy, że system algebraiczny $(G/H, \circ, H)$ jest grupą. Nazywamy ją *grupą ilorazową* względem dzielnika normalnego H. Jeżeli grupa G jest abelowa, to grupa ilorazowa G/H też jest abelowa, gdyż dla dowolnych $a, b \in G$ mamy, że $(aH)\circ(bH) = abH = baH = (bH)\circ(aH)$.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnej grupy G grupa ilorazowa G/G' jest grupą abelową. Ponadto dla dzielnika normalnego H grupy G mamy, że G/H jest grupą abelową wtedy i tylko wtedy, gdy $G' \subseteq H$.*

Dowód. Niech H będzie dzielnikiem normalnym grupy G. Wtedy dla dowolnych $a, b \in G$ mamy, że $[aH, bH] = (aH)^{-1}\circ(bH)^{-1}\circ(aH)\circ(bH) = (a^{-1}H)\circ(b^{-1}H)\circ(abH) = (a^{-1}b^{-1}H)\circ(abH) = a^{-1}b^{-1}abH = [a,b]H$. Zatem grupa G/H jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $[a,b] \in H$ dla dowolnych $a, b \in G$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $G' \subseteq H$ na mocy definicji komutanta grupy. W szczególności mamy stąd, że G/G' jest grupą abelową. □

Przykład 1. Można wykazać, że istnieje grupa G rzędu 12 taka, że $|G'| = 4$. Pokażemy, że wówczas w grupie G nie istnieje podgrupa rzędu 6 (będzie to oznaczało, że nie można odwracać twierdzenia Lagrange'a!). W tym celu załóżmy, że grupa G posiada podgrupę H rzędu 6. Wtedy z twierdzenia Lagrange'a mamy, że $(G : H) = \frac{|G|}{|H|} = \frac{12}{6} = 2$, więc z poprzedniego rozdziału $H \lhd G$. Ponadto $|G/H| = 2$, więc grupa G/H jest abelowa (a nawet cykliczna). Zatem z twierdzenia 1 mamy, że $G' \subseteq H$. Ale $|G'| = 4$ i $|H| = 6$

oraz 4 nie dzieli 6, więc mamy sprzeczność z twierdzeniem Lagrange'a. Zatem taka grupa G nie posiada podgrupy rzędu 6. □

5.2 Iloczyn prosty grup

Niech $(G_1, \cdot_1, e_1)$ i $(G_2, \cdot_2, e_2)$ będą dowolnymi grupami. W zbiorze $G = G_1 \times G_2$ wprowadzamy mnożenie „po współrzędnych" przyjmując, że dla dowolnych $a_1, b_1 \in G_1$, $a_2, b_2 \in G_2$:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2). \tag{5.4}$$

Niech ponadto $e = (e_1, e_2)$. Sprawdzimy, że $(G, \cdot, e)$ tworzy grupę. W tym celu weźmy dowolne $a_1, b_1, c_1 \in G_1$ oraz dowolne $a_2, b_2, c_2 \in G_2$. Wówczas:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \cdot [(b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2)] &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 \cdot_1 c_1, b_2 \cdot_2 c_2) = \\ = (a_1 \cdot_1 (b_1 \cdot_1 c_1), a_2 \cdot_2 (b_2 \cdot_2 c_2)) &= ((a_1 \cdot_1 b_1) \cdot_1 c_1, (a_2 \cdot_2 b_2) \cdot_2 c_2) = \\ = (a_1 \cdot_1 b_1, a_2 \cdot_2 b_2) \cdot (c_1, c_2) &= [(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)] \cdot (c_1, c_2),\end{aligned}$$

czyli działanie $\cdot$ jest łączne. Dalej,

$$(a_1, a_2) \cdot e = (a_1, a_2) \cdot (e_1, e_2) = (a_1 \cdot_1 e_1, a_2 \cdot e_2) = (a_1, a_2)$$

oraz

$$e \cdot (a_1, a_2) = (e_1, e_2) \cdot (a_1, a_2) = (e_1 \cdot_1 a_1, e_2 \cdot_2 a_2) = (a_1, a_2),$$

skąd wynika, że e jest elementem neutralnym działania $\cdot$. W końcu

$$(a_1, a_2) \cdot (a_1^{-1}, a_2^{-1}) = (a_1 \cdot_1 a_1^{-1}, a_2 \cdot_2 a_2^{-1}) = (e_1, e_2) = e$$

oraz

$$(a_1^{-1} \cdot_1 a_1, a_2^{-1} \cdot_2 a_2) = (e_1, e_2) = e,$$

czyli $(G, \cdot, e)$ jest grupą oraz

$$(a_1, a_2)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}) \text{ dla dowolnych } a_1 \in G_1, a_2 \in G_2. \tag{5.5}$$

Otrzymaną w ten sposób grupę oznaczamy przez $G_1 \times G_2$ i nazywamy *iloczynem prostym grup* G_1 i G_2. Z określenia mnożenia w iloczynie prostym grup wynika od razu, że **iloczyn prosty grup abelowych jest grupą abelową**.

Zauważmy, że podzbiory

$$\bar{G}_1 = \{(a, e_2) : a \in G_1\} \text{ oraz } \bar{G}_2 = \{(e_1, b) : b \in G_2\} \tag{5.6}$$

są dzielnikami normalnymi grupy G. Rzeczywiście, $e=(e_1,e_2)\in \bar{G}_1\cap\bar{G}_2$, dla $a, x \in G_1$ i $b, y \in G_2$ mamy

$$(a, e_2)\cdot(x, e_2)^{-1}=(a, e_2)\cdot(x^{-1}, e_2)=(a\cdot_1 x^{-1}, e_2\cdot_2 e_2)=(a\cdot_1 x^{-1}, e_2) \in \bar{G}_1$$

oraz

$$(e_1, b)\cdot(e_1, y)^{-1} = (e_1\cdot_1 e_1, b\cdot_2 y^{-1}) = (e_1, b\cdot_2 y^{-1}) \in \bar{G}_2,$$

skąd $\bar{G}_1$ i $\bar{G}_2$ są podgrupami grupy G. Ponadto dla $g \in G_1, h \in G_2$ mamy

$$(g, h)\cdot(a, e_2)\cdot(g, h)^{-1} = (g\cdot_1 a, h\cdot_2 e_2)\cdot(g^{-1}, h^{-1}) =$$

$$= (g\cdot_1 a\cdot_1 g^{-1}, h\cdot_2 e_2\cdot_2 h^{-1}) = (g\cdot_1 a\cdot_1 g^{-1}, e_2) \in \bar{G}_1$$

oraz

$$(g, h)\cdot(e_1, b)\cdot(g, h)^{-1} = (g\cdot_1 e_1, h\cdot_2 b)\cdot(g^{-1}, h^{-1}) =$$

$$= (g\cdot_1 e_1\cdot_1 g^{-1}, h\cdot_2 b\cdot_2 h^{-1}) = (e_1, h\cdot_2 b\cdot_2 h^{-1}) \in \bar{G}_2.$$

Zatem rzeczywiście $\bar{G}_1 \lhd G$ oraz $\bar{G}_2 \lhd G$.

Z określenia podgrup $\bar{G}_1$ i $\bar{G}_2$ wynika od razu, że

$$\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \{e\} \text{ oraz } \bar{G}_1\bar{G}_2 = G. \tag{5.7}$$

Niech teraz $a \in G_1$ i $b \in G_2$ będą elementami o skończonych rzędach równych odpowiednio n i m. Wykażemy, że wówczas element $g = (a, b) \in G$ ma rząd równy $[n, m]$. W tym celu zauważmy, że ponieważ $n \mid [n, m]$ i $m \mid [n, m]$, więc $a^{[n,m]} = e_1$ oraz $b^{[n,m]} = e_2$,

skąd $g^{[n,m]} = (a^{[n,m]}, b^{[n,m]}) = (e_1, e_2) = e$. Zatem $o(g) = k \in \mathbb{N}$ oraz $k \mid [n,m]$. Ponadto $e = g^k = (a^k, b^k)$, więc $a^k = e_1$ i $b^k = e_2$, skąd z własności rzędu elementu grupy wynika, że $n \mid k$ i $m \mid k$. Zatem z elementarnej teorii liczb $[n,m] \mid k$. W ten sposób wykazaliśmy, że $k \mid [n,m]$ oraz $[n,m] \mid k$, więc ponieważ k i $[n,m]$ są liczbami naturalnymi, to $k = [n,m]$. Z tych rozważań wynika od razu, że **iloczyn prosty skończonych grup cyklicznych o względnie pierwszych rzędach jest grupą cykliczną**.

5.3 Homomorfizmy grup i ich własności

Definicja 1. Niech $(G_1, \cdot_1, e_1)$ i $(G_2, \cdot_2, e_2)$ będą grupami. Przekształcenie $f : G_1 \longrightarrow G_2$ takie, że

$$f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b) \text{ dla dowolnych } a, b \in G_1 \tag{5.8}$$

nazywamy *homomorfizmem grupy G_1 w grupę G_2*, zaś zbiór

$$Ker(f) = \{x \in G_1 : f(x) = e_2\} \tag{5.9}$$

nazywamy *jądrem homomorfizmu f*. Jeżeli dodatkowo f jest różnowartościowe, to mówimy, że f jest *zanurzeniem grupy G_1 w grupę G_2*. Jeżeli zaś homomorfizm f jest bijekcją, to mówimy, że f jest *izomorfizmem grup*.

Definicja 2. Powiemy, że grupa G_2 jest *obrazem homomorficznym* grupy G_1, jeżeli istnieje homomorfizm f grupy G_1 na grupę G_2.

Definicja 3. Powiemy, że grupa G_1 *zanurza się w grupę G_2*, jeśli istnieje zanurzenie grup $f : G_1 \longrightarrow G_2$.

Definicja 4. Powiemy, że grupy G_1 i G_2 są *izomorficzne* i piszemy, $G_1 \cong G_2$, jeżeli istnieje izomorfizm grup $f : G_1 \longrightarrow G_2$.

Definicja 5. *Automorfizmem grupy G* nazywamy każdy izomorfizm grup $f : G \longrightarrow G$.

Własności homomorfizmów grup

1. *Złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem, tzn. jeżeli* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *i* $g : G_2 \longrightarrow G_3$ *są homomorfizmami grup, to* $g \circ f : G_1 \longrightarrow G_3$ *też jest homomorfizmem grup. W szczególności złożenie izomorfizmów jest izomorfizmem.*

Dowód. Rzeczywiście, dla dowolnych $a, b \in G_1$ mamy

$$(g \circ f)(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) = \\ = (g \circ f)(a)(g \circ f)(b). \square$$

2. *Jeżeli* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *jest izomorfizmem grup, to* $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ *też jest izomorfizmem grup.*

Dowód. Rzeczywiście, ponieważ f jest bijekcją, więc ze wstępu do matematyki f^{-1} istnieje, jest bijekcją oraz dla $x \in G_1$ i $y \in G_2$ mamy, że $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Weźmy dowolne $y_1, y_2 \in G_2$. Wtedy istnieją $x_1, x_2 \in G_1$ takie, że $y_1 = f(x_1)$ i $y_2 = f(x_2)$, więc $y_1 y_2 = f(x_1)f(x_2) = f(x_1 x_2)$, skąd $f^{-1}(y_1 y_2) = x_1 x_2 = f^{-1}(y_1)f^{-1}(y_2)$. $\square$

Z **1.** i **2.** oraz z tego, że przekształcenie tożsamościowe grupy G w grupę G jest jej automorfizmem wynika od razu

3. *Dla dowolnych grup* G_1, G_2, G_3*:*

a) $G_1 \cong G_1$,

b) jeśli $G_1 \cong G_2$, *to* $G_2 \cong G_1$,

c) jeśli $G_1 \cong G_2$ *i* $G_2 \cong G_3$, *to* $G_1 \cong G_3$. $\square$

Niech teraz $f : G_1 \longrightarrow G_2$ będzie homomorfizmem grup. Dla uproszczenia zapisu działania w obu grupach będziemy oznaczać tak samo. Podobnie elementy neutralne tych grup też oznaczymy przez e. Wówczas

4. $f(e) = e$.

Dowód. Rzeczywiście, $f(e) = f(e \cdot e) = f(e) \cdot f(e)$, skąd po skróceniu $e = f(e)$. $\square$

5. $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$ *dla każdego* $a \in G_1$.

Dowód. Rzeczywiście, $f(a^{-1}) \cdot f(a) = f(a^{-1} \cdot a) = f(e) = e$ na mocy **4.**, więc $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$. $\square$

6. $f(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \ldots \cdot f(a_n)$ *dla dowolnych* $a_1, \ldots, a_n \in G_1$ *oraz dla dowolnego* $n \geqslant 2$.

Dowód. Rzeczywiście, dla $n = 2$ teza wynika z definicji homomorfizmu, a jeżeli zachodzi ona dla pewnego naturalnego n oraz $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in G_1$, to $f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}) = f((a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}) = f(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot f(a_{n+1}) = f(a_1) \cdot \ldots \cdot f(a_n) \cdot f(a_{n+1})$. □

Z **5.** i **6.** wynika od razu, że

7. $f(a^k) = [f(a)]^k$ *dla dowolnych* $a \in G_1, k \in \mathbb{Z}$. □

8. *Jeżeli* $a \in G_1$ *jest elementem skończonego rzędu, to* $f(a)$ *też jest elementem skończonego rzędu oraz* $o(f(a)) \mid o(a)$.

Dowód. Rzeczywiście, niech $n = o(a)$. Wtedy $a^n = e$, skąd na mocy **4.** i **7.** $e = f(a^n) = [f(a)]^n$. Zatem istnieje liczba naturalna k taka, że $k = o(f(a))$ i z własności rzędu elementu grupy $k \mid n$, bo $[f(a)]^n = e$. □

9. $Ker(f) \lhd G_1$.

Dowód. Z **4.** mamy, że $e \in Ker(f)$. Jeśli $x, y \in Ker(f)$, to $f(x) = f(y) = e$, skąd $f(xy) = f(x)f(y) = e \cdot e = e$, czyli $xy \in Ker(f)$ oraz na mocy **5.** $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1} = e^{-1} = e$, czyli $x^{-1} \in Ker(f)$. Zatem $Ker(f)$ jest podgrupą grupy G_1. Ponadto dla $g \in G_1, h \in Ker(f)$ na mocy **6.** i **5.** mamy, że $f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)[f(g)]^{-1} = f(g)e[f(g)]^{-1} = e$, skąd $ghg^{-1} \in Ker(f)$. Zatem $Ker(f) \lhd G_1$. □

10. *Homomorfizm* f *jest zanurzeniem wtedy i tylko wtedy, gdy* $Ker(f) = \{e\}$.

Dowód. $\Rightarrow$ Niech $x \in Ker(f)$. Wtedy $f(x) = e = f(e)$, skąd $x = e$. Ale $e \in Ker(f)$, więc stąd $Ker(f) = \{e\}$.

$\Leftarrow$ Niech $a, b \in G_1$ będą takie, że $f(a) = f(b)$. Wtedy $e = f(a) \cdot [f(b)]^{-1} = f(a) \cdot f(b^{-1}) = f(ab^{-1})$, skąd $ab^{-1} \in Ker(f) = \{e\}$, czyli $ab^{-1} = e$. Zatem $a = b$ i f jest zanurzeniem. □

11. *Jeżeli* H *jest podgrupą grupy* G_1, *to* $f(H) = \{f(h) : h \in H\}$ *jest podgrupą grupy* G_2.

Dowód. Z **4.** mamy, że $e = f(e) \in f(H)$, gdyż $e \in H$. Niech $x, y \in f(H)$. Wtedy istnieją $a, b \in H$ takie, że $x = f(a)$ i $y = f(b)$. Zatem $a \cdot b^{-1} \in H$, skąd $f(a \cdot b^{-1}) \in f(H)$ oraz $x \cdot y^{-1} = f(a) \cdot [f(b)]^{-1} = f(a) \cdot f(b^{-1}) = f(a \cdot b^{-1})$, czyli $x \cdot y^{-1} \in f(H)$ i $f(H)$ jest podgrupą grupy G_2. □

12. *Jeżeli* K *jest podgrupą grupy* G_2, *to*

$$f^{-1}(K) = \{x \in G_1 : f(x) \in K\}$$

jest podgrupą grupy G_1.

Dowód. Ponieważ $e \in K$ i $e = f(e)$, więc $e \in f^{-1}(K)$. Niech $a, b \in f^{-1}(K)$. Wtedy $f(a), f(b) \in K$, skąd $f(ab^{-1}) = f(a) \cdot [f(b)]^{-1} \in K$, czyli $ab^{-1} \in f^{-1}(K)$. Zatem $f^{-1}(K)$ jest podgrupą grupy G_1. □

Jeżeli $f : G_1 \longrightarrow G_2$ jest izomorfizmem grup, to $|G_1| = |G_2|$ oraz każda własność grupy G_1 definiowana za pomocą działania w tej grupie jest zachowywana przez f. Z tego powodu **w algebrze utożsamia się grupy izomorficzne**.

5.4 Twierdzenie o izomorfizmie

Twierdzenie o izomorfizmie. *Jeżeli* $f : G_1 \longrightarrow G_2$ *jest homomorfizmem grup, to*

$$f(G_1) \cong G_1/Ker(f).$$

W szczególności, jeżeli f *jest „na", to* $G_2 \cong G_1/Ker(f)$.

Dowód. Z własności **11.** homomorfizmów mamy, że $f(G_1)$ jest podgrupą grupy G_2. Ponadto f odwzorowuje grupę G_1 na $f(G_1)$. Oznaczmy $Ker(f) = H$. Wtedy z własności **9.** homomorfizmów $H \lhd G_1$. Niech $F : G_1/H \longrightarrow f(G_1)$ będzie dane wzorem

$$F(xH) = f(x) \text{ dla } x \in G_1.$$

Wtedy dla $x, y \in G_1$ mamy

$$F(xH) = F(yH) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow [f(x)]^{-1} \cdot f(y) = e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^{-1}) \cdot f(y) = e \Leftrightarrow f(x^{-1} \cdot y) = e \Leftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H \Leftrightarrow xH = yH.$$

Zatem F jest dobrze określoną funkcją różnowartościową. Stąd F jest bijekcją. Ponadto

$$F((xH) \circ (yH)) = F((xy)H) = f(xy) = f(x) \cdot f(y) = F(xH) \cdot F(yH).$$

Zatem F jest izomorfizmem grup, czyli $f(G_1) \cong G_1/Ker(f)$. □

Uwaga 1. Niech $(G, \cdot, e)$ będzie grupą i niech $f : A \longrightarrow G$ będzie bijekcją zbioru A na zbiór G. W zbiorze A wprowadzamy działanie $\circ$ przy pomocy wzoru:

$$a \circ b = f^{-1}(f(a) \cdot f(b)) \text{ dla } a, b \in A.$$

Niech $\epsilon = f^{-1}(e)$. Wówczas $(A, \circ, \epsilon)$ jest grupą i f jest izomorfizmem grup, czyli $A \cong G$. Rzeczywiście, dla dowolnych $a, b, c \in A$ mamy

$$\begin{aligned} a \circ (b \circ c) = a \circ f^{-1}(f(b) \cdot f(c)) = f^{-1}(f(a) \cdot f(f^{-1}(f(b) \cdot f(c)))) = \\ = f^{-1}(f(a) \cdot (f(b) \cdot f(c))) = f^{-1}((f(a) \cdot f(b)) \cdot f(c)) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c = f^{-1}(f(a) \cdot f(b)) \circ c = f^{-1}(f(f^{-1}(f(a) \cdot f(b))) \cdot f(c)) = \\ = f^{-1}((f(a) \cdot f(b)) \cdot f(c)). \end{aligned}$$

Zatem działanie $\circ$ jest łączne. Ponadto dla $a \in A$ mamy, że $a \circ \epsilon = f^{-1}(f(a) \cdot f(\epsilon)) = f^{-1}(f(a) \cdot e) = f^{-1}(f(a)) = a$ oraz $\epsilon \circ a = f^{-1}(f(\epsilon) \cdot f(a)) = f^{-1}(e \cdot f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a$, więc ϵ jest elementem neutralnym działania $\circ$. W końcu dla $a \in A$ oraz dla $x = f^{-1}([f(a)]^{-1})$ mamy

$$a \circ x = f^{-1}(f(a) \cdot f(f^{-1}([f(a)]^{-1}))) = f^{-1}(f(a) \cdot [f(a)]^{-1}) = f^{-1}(e) = \epsilon$$

oraz

$$x \circ a = f^{-1}(f(f^{-1}([f(a)]^{-1})) \cdot f(a)) = f^{-1}([f(a)]^{-1} \cdot f(a)) = f^{-1}(e) = \epsilon,$$

więc każdy element $a \in A$ jest odwracalny i ostatecznie $(A, \circ, \epsilon)$ tworzy grupę. □

Rozdział 6

Przykłady homomorfizmów. Grupy permutacji I

6.1 Przykłady homomorfizmów grup

Przykład 1. Niech $ABCD$ będzie prostokątem, który nie jest kwadratem. Oznaczmy przez a symetralną odcinka AB oraz przez b symetralną odcinka BC. Niech O będzie punktem przecięcia prostych a i b. Wówczas grupa K izometrii własnych tego prostokąta składa się z dokładnie czterech elementów: e (przekształcenie tożsamościowe), S_a, S_b, S_O. Tabelka działania $\circ$ wygląda następująco:

$\circ$	e	S_a	S_b	S_O
e	e	S_a	S_b	S_O
S_a	S_a	e	S_O	S_b
S_b	S_b	S_O	e	S_a
S_O	S_O	S_b	S_a	e

.

Zatem K jest grupą abelową, którą nazywa się *grupą czwórkową Kleina*. Niech teraz G będzie niecykliczną grupą rzędu 4. Wówczas z rozdziału 2 $x^2 = e$ dla każdego $x \in G$. Wówczas G jest grupą abelową oraz $G = \{e, x, y, z\}$, przy czym $x^2 = y^2 = z^2 = e$ oraz $yx = xy \neq e, x, y$, skąd $xy = z$. Podobnie $zx = xz = y$ oraz $zy = yz = x$. Na mocy uwagi 1 z rozdziału 5 mamy zatem, że $f : G \longrightarrow K$ takie, że $f(e) = e$,

$f(x) = S_a$, $f(y) = S_b$, $f(z) = S_O$ jest izomorfizmem grup. W ten sposób wykazaliśmy, że istnieje tylko jedna z dokładnością do izomorfizmu niecykliczna grupa rzędu 4 (mianowicie jest nią grupa czwórkowa Kleina).

Przykład 2. Dla dowolnych grup G_1, G_2 przekształcenie $f : G_1 \longrightarrow G_2$ dane wzorem

$$f(x) = e \text{ dla } x \in G_1$$

jest homomorfizmem grup. Nazywamy go *homomorfizmem trywialnym.*

Przykład 3. Niech G będzie grupą i $g \in G$. Wtedy przekształcenie $f : G \longrightarrow G$ dane wzorem

$$f(x) = g \cdot x \cdot g^{-1} \text{ dla } x \in G$$

jest automorfizmem grupy G, gdyż dla $a, b \in G$ jest $f(a \cdot b) = g \cdot (a \cdot b) \cdot g^{-1} = (g \cdot a \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot b \cdot g^{-1}) = f(a) \cdot f(b)$ oraz przekształcenie $h : G \longrightarrow G$ dane wzorem: $h(x) = g^{-1} \cdot x \cdot g$ dla $x \in G$ jest odwrotne do f. Taki automorfizm f nazywamy *automorfizmem wewnętrznym.*

Przykład 4. Niech H będzie dzielnikiem normalnym grupy G i niech $\pi : G \longrightarrow G/H$ będzie odwzorowaniem danym wzorem

$$\pi(x) = xH \text{ dla } x \in G.$$

Wówczas dla dowolnych $a, b \in G$ mamy, że $\pi(ab) = (ab)H = (aH) \circ (bH) = \pi(a) \circ \pi(b)$, więc π jest homomorfizmem grup. Ponadto $G/H = \{aH = \pi(a) : a \in G\}$, więc π jest „na". Dla $a \in G$ mamy, że $a \in Ker(\pi) \Leftrightarrow \pi(a) = H \Leftrightarrow aH = H \Leftrightarrow a \in H$, więc $Ker(\pi) = H$. Taki homomorfizm π nazywamy *epimorfizmem naturalnym.*

Przy okazji zauważmy, że każdy dzielnik normalny grupy G jest jądrem pewnego homomorfizmu określonego na tej grupie. Stąd wobec własności **9.** homomorfizmów mamy, że **dzielniki normalne grupy G są to dokładnie jądra homomorfizmów określonych na grupie G.** Z twierdzenia o izomorfizmie wynika stąd zatem, że **każdy obraz homomorficzny grupy G jest izomorficzny z grupą ilorazową G/H dla pewnego $H \lhd G$.**

Przykład 5. Opiszemy wszystkie homomorfizmy określone na nieskończonej grupie cyklicznej G o generatorze a w dowolną grupę B. Z własności rzędu elementu grupy mamy, że $o(a) = \infty$. Zatem każdy element grupy G może być jednoznacznie zapisany w postaci a^k dla pewnego całkowitego k. Niech $f : G \longrightarrow B$ będzie homomorfizmem grup. Oznaczmy $b = f(a)$. Wtedy z własności **7.** homomorfizmów będziemy mieli, że $f(a^k) = b^k$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Na odwrót, weźmy dowolny element $b \in B$ i niech

$$f(a^k) = b^k \text{ dla wszystkich } k \in \mathbb{Z}. \tag{6.1}$$

Wtedy z własności potęgowania w grupie mamy, że f jest homomorfizmem grupy G w grupę B, $f(a) = b$ oraz $f(G) = \langle b \rangle$. Wynika stąd, że istnieje dokładnie $|B|$ różnych homomorfizmów $f : G \longrightarrow B$. Jeśli $o(b) = \infty$, to dla całkowitych k mamy, że $b^k = e \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow a^k = e$, więc f jest zanurzeniem. Jeśli zaś $o(b) = n \in \mathbb{N}$, to dla całkowitych k mamy, że $f(a^k) = e \Leftrightarrow b^k = e \Leftrightarrow n \mid k$, skąd $Ker(f) = \langle a^n \rangle$. Ponadto homomorfizm f dany wzorem (6.1) jest „na" wtedy i tylko wtedy, gdy b jest generatorem grupy B. Jeżeli $B = \langle b \rangle$ oraz $o(b) = \infty$, to homomorfizm f dany wzorem (6.1) jest izomorfizmem. W szczególności udowodniliśmy więc następujące

Twierdzenie 2. *Każde dwie nieskończone grupy cykliczne $\langle a \rangle$ i $\langle b \rangle$ są izomorficzne. Ponadto przekształcenie $f : \langle a \rangle \longrightarrow \langle b \rangle$ dane wzorem* (6.1) *jest izomorfizmem grup.* □

Przykład 6. Opiszemy wszystkie homomorfizmy określone na skończonej grupie cyklicznej $\langle a \rangle$ rzędu n w dowolną grupę B. Niech $f : \langle a \rangle \longrightarrow B$ będzie homomorfizmem grup. Oznaczmy $b = f(a)$. Wtedy z własności **8.** homomorfizmu mamy, że $o(b) \mid o(a)$ oraz z własności **7.** homomorfizmu mamy, że $f(a^k) = b^k$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Na odwrót, niech $b \in B$ będzie takie, że $o(b) \mid o(a)$. Wówczas przekształcenie f dane wzorem (6.1) jest dobrze określone, bo dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}$ mamy, że jeśli $a^k = a^l$, to $a^{k-l} = e$, skąd $o(a) \mid k-l$. Ale $o(b) \mid o(a)$, więc stąd $o(b) \mid k-l$ i $b^{k-l} = e$, czyli $b^k = b^l$. Natomiast z własności potęgowania w grupie mamy, że takie f jest homomorfizmem grup. Ponadto taki homomorfizm f jest „na" wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle b \rangle = B$ oraz

dla całkowitych k mamy, że $a^k \in Ker(f) \Leftrightarrow b^k = e \Leftrightarrow o(b) \mid k$, więc $Ker(f) = \langle a^{o(b)} \rangle$. Stąd dla b takiego, że $o(b) = o(a)$ jest $Ker(f) = \{e\}$, czyli f jest wtedy zanurzeniem grup. W ten sposób udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 3. *Każde dwie grupy cykliczne skończone $\langle a \rangle$ i $\langle b \rangle$ tego samego rzędu są izomorficzne. Ponadto przekształcenie $f : \langle a \rangle \longrightarrow \langle b \rangle$ dane wzorem* (6.1) *jest izomorfizmem grup.* □

Uwaga 2. Z twierdzenia 3 i z przykładu 1 wynika, że z dokładnością do izomorfizmu istnieją tylko dwie grupy rzędu 4. Mianowicie grupa czwórkowa Kleina i grupa cykliczna $\mathbb{Z}_4^+$. Ponadto z twierdzenia 3 mamy, że $\mathbb{C}_n^* \cong \mathbb{Z}_n^+$.

Uwaga 3. Z przykładu 4 mamy, że $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}_n^+$ dane wzorem $f(k) = k \cdot 1$ dla $k \in \mathbb{Z}$ jest homomorfizmem grupy $\mathbb{Z}^+$ na grupę $\mathbb{Z}_n^+$ oraz $Ker(f) = \langle n \rangle$. Zatem z twierdzenia o izomorfizmie mamy

$$\mathbb{Z}_n^+ \cong \mathbb{Z}^+ / \langle n \rangle.$$

Twierdzenie 4. *Niech $f : G \longrightarrow A$ będzie homomorfizmem grupy skończonej G w grupę A. Wówczas $|f(G)|$ dzieli $|G|$. Jeżeli dodatkowo A jest grupą skończoną, to $|f(G)|$ dzieli $(|G|, |A|)$.*

Dowód. Z twierdzenia o izomorfizmie mamy, że $f(G) \cong G/Ker(f)$, skąd na mocy twierdzenia Lagrange'a $|f(G)| = |G/Ker(f)| = \frac{|G|}{|Ker(f)|}$, a więc $|f(G)| \mid |G|$. Jeżeli dodatkowo grupa A jest skończona, to z twierdzenia Lagrange'a $|f(G)|$ dzieli $|A|$, więc z elementarnej teorii liczb $|f(G)|$ dzieli $(|G|, |A|)$. □

Przykład 7. Pokażemy, że nie istnieje nietrywialny homomorfizm grupy D_3 izometrii własnych trójkąta równobocznego w grupę $\mathbb{Z}_{15}^+$. W tym celu załóżmy, że istnieje nietrywialny homomorfizm $f : D_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_{15}^+$. Wtedy $|f(D_3)| > 1$ oraz z twierdzenia 4, $|f(D_3)| \mid |(6, 15) = 3$, więc $|f(D_3)| = 3$ oraz z twierdzenia o izomorfizmie i z twierdzenia Lagrange'a $|Ker(f)| = 2$. Ale $Ker(f) \lhd D_3$ i grupa D_3 nie posiada dzielnika normalnego rzędu 2, więc mamy sprzeczność.

Przykład 8. Pokażemy, że jeśli zbiory A i B są równoliczne, to grupy symetryczne $S(A)$ i $S(B)$ też są izomorficzne. Rzeczywiście, niech $f : A \longrightarrow B$ będzie bijekcją. Określamy $F : S(A) \longrightarrow S(B)$ wzorem $F(\phi) = f \circ \phi \circ f^{-1}$ dla $\phi \in S(A)$. Wtedy ze wstępu do matematyki mamy, że $F(\phi)$ jest bijekcją jako złożenie bijekcji, czyli $F(\phi) \in S(B)$ dla $\phi \in S(A)$. Ponadto dla dowolnych $\phi_1, \phi_2 \in S(A)$ mamy

$$F(\phi_1 \circ \phi_2) = f \circ (\phi_1 \circ \phi_2) \circ f^{-1} =$$
$$= (f \circ \phi_1 \circ f^{-1}) \circ (f \circ \phi_2 \circ f^{-1}) = F(\phi_1) \circ F(\phi_2),$$

więc F jest homomorfizmem grup. Ponadto $G : S(B) \longrightarrow S(A)$ dane wzorem $G(\psi) = f^{-1} \circ \psi \circ f$ dla $\psi \in S(B)$ jest przekształceniem odwrotnym do F. Zatem F jest izomorfizmem grup.

Twierdzenie 5 (Cayley'a). *Każda grupa G zanurza się w grupę symetryczną $S(G)$.*

Dowód. Niech dla $g \in G$: $l_g(x) = gx$ dla $x \in G$. Wtedy, jak wiemy l_g jest bijekcją zbioru G na siebie, więc $l_g \in S(G)$. Niech $F(g) = l_g$ dla $g \in G$. Wtedy dla $g, h, x \in G$ mamy, że $(F(gh))(x) = l_{gh}(x) = (gh)x = g(hx) = gl_h(x) = l_g(l_h(x)) = (l_g \circ l_h)(x) = (F(g) \circ F(h))(x)$, skąd $F(gh) = F(g) \circ F(h)$ i F jest homomorfizmem grup. Jeżeli $g \in Ker(F)$, to $l_g(x) = x$ dla $x \in G$, czyli $gx = x$ dla $x \in G$. Zatem $g = e$. Stąd z własności **10.** homomorfizmów mamy, że F jest zanurzeniem grup. □

Z twierdzenia Cayley'a i z przykładu 8 wynika od razu następujący

Wniosek 1. *Każda grupa skończona rzędu n zanurza się w grupę permutacji S_n zbioru n-elementowego $\{1, 2, \ldots, n\}$.* □

6.2 Grupy permutacji

Niech $n \geqslant 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Niech $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Każdą permutację $f \in S_n$ można zapisać w postaci dwuwierszowej

tablicy

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(i) & \dots & f(n) \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

w której w pierwszym wierszu umieszczone są wszystkie elementy zbioru X_n (najczęściej w porządku rosnącym), zaś w drugim wierszu umieszczone są kolejne obrazy tych elementów przy odwzorowaniu f. Niech $X_f = \{x \in X_n : f(x) \neq x\}$. Wtedy dla $x \in X_n$ jest $x \neq f(x)$, skąd $f(x) \neq f(f(x))$, więc $f(x) \in X_f$. Stąd $f(X_f) \subseteq X_f$, a ponieważ f jest różnowartościowe i zbiór X_f jest skończony, więc $f(X_f) = X_f$. Z tego powodu w zapisie permutacji f pomijamy zazwyczaj te i, dla których $f(i) = i$. Np. zamiast $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ można pisać $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Przy tej notacji dla permutacji f mamy wzór:

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Ponadto

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Inwersje

Inwersją permutacji $f \in S_n$ nazywamy taki podzbiór dwuelementowy $\{i, j\}$ zbioru X_n, że $i < j$ oraz $f(i) > f(j)$. Zbiór wszystkich inwersji permutacji $f \in S_n$ oznaczamy przez I_f. Np. $I_e = \emptyset$, więc $|I_e| = 0$, czyli **permutacja tożsamościowa nie posiada inwersji**.

Przykład 9. Niech $i, j \in X_n$, $i < j$. Oznaczmy przez (i, j) permutację zbioru X_n, która zamienia miejscami elementy i, j oraz nie zmienia pozostałych elementów zbioru X_n (takie permutacje nazywamy *transpozycjami*). Zatem

$$(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Stąd $I_{(i,j)} = \{\underbrace{\{i,i+1\},\{i,i+2\},\{i,i+3\},\ldots,\{i,j-1\},\{i,j\}}_{j-i},$ $\underbrace{\{i+1,j\},\{i+2,j\},\{i+3,j\},\ldots,\{j-1,j\}}_{(j-1)-i}\}$. Zatem $|I_{(i,j)}| = (j-i)+$ $+(j-1)-i = 2(j-i)-1$. Uzyskaliśmy zatem, że **każda transpozycja posiada nieparzystą liczbę wszystkich inwersji**.

Znak permutacji

Znakiem permutacji $f \in S_n$ nazywamy liczbę $sgn(f)$ określoną wzorem:

$$sgn(f) = (-1)^{|I_f|}. \tag{6.6}$$

Powiemy, że permutacja $f \in S_n$ jest *parzysta*, jeśli $sgn(f) = 1$ oraz , że f jest *nieparzysta*, jeśli $sgn(f) = -1$. Zatem z przykładu 9 mamy, że **dowolna transpozycja jest permutacją nieparzystą**. Ponieważ $sgn(e) = (-1)^0 = 1$, więc permutacja tożsamościowa jest parzysta. Zbiór wszystkich permutacji parzystych $f \in S_n$ będziemy oznaczali przez A_n.

Twierdzenie 6. *Dla dowolnych permutacji* $f, g \in S_n$ *zachodzi wzór:*

$$sgn(f \circ g) = sgn(f) \cdot sgn(g). \tag{6.7}$$

W szczególności $sgn(f^{-1}) = sgn(f)$.

Dowód. Oznaczmy przez P_n rodzinę wszystkich podzbiorów dwuelementowych zbioru X_n. Niech $h \in S_n$. Weźmy dowolne $A \in P_n$. Wtedy $A = \{i,j\}$ dla pewnych $i,j \in X_n$, $i \neq j$. Oznaczmy $sgn_h(A) = sgn\left(\frac{h(i)-h(j)}{i-j}\right)$. Określenie to jest poprawne, bo

$$\frac{h(j)-h(i)}{j-i} = \frac{-(h(i)-h(j))}{-(i-j)} = \frac{h(i)-h(j)}{i-j}.$$

Ponadto $A \in I_h \Leftrightarrow sgn_h(A) = -1$. Wynika stąd wzór:

$$sgn(h) = \prod_{A \in P_n} sgn_h(A). \tag{6.8}$$

Łatwo zauważyć, że dowolna permutacja $g \in S_n$ wyznacza bijekcję $G : P_n \longrightarrow P_n$ przy pomocy wzoru $G(A) = \{g(i), g(j)\}$ dla $A = \{i, j\}$. Wynika stąd, że dla dowolnych $f, g \in S_n$ zachodzi wzór:

$$sgn(f) = \prod_{A \in P_n} sgn_f(G(A)). \tag{6.9}$$

Ponadto dla $A \in P_n$ mamy

$$sgn_f(G(A)) \cdot sgn_g(A) = sgn_{f \circ g}(A). \tag{6.10}$$

Rzeczywiście, $A = \{i, j\}$ dla pewnych $i, j \in X_n$, $i \neq j$ oraz

$$sgn_f(G(A)) = sgn_f(\{g(i), g(j)\}) = sgn\left(\frac{f(g(i)) - f(g(j))}{g(i) - g(j)}\right)$$

oraz

$$sgn_g(A) = sgn\left(\frac{g(i) - g(j)}{i - j}\right).$$

Ale $sgn(x) \cdot sgn(y) = sgn(x \cdot y)$ dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, więc

$$sgn_f(G(A)) \cdot sgn_g(A) = sgn\left(\frac{f(g(i)) - f(g(j))}{g(i) - g(j)} \cdot \frac{g(i) - g(j)}{i - j}\right) =$$

$$= sgn\left(\frac{(f \circ g)(i) - (f \circ g)(j)}{i - j}\right) = sgn_{f \circ g}(A).$$

Zatem na mocy (6.8), (6.9) i (6.10) mamy

$$sgn(f \circ g) = \prod_{A \in P_n} sgn_{f \circ g}(A) = \prod_{A \in P_n} [sgn_f(G(A)) \cdot sgn_g(A)] =$$

$$= \prod_{A \in P_n} sgn_f(G(A)) \cdot \prod_{A \in P_n} sgn_g(A) = \prod_{A \in P_n} sgn_f(A) \cdot \prod_{A \in P_n} sgn_g(A) =$$

$$= sgn(f) \cdot sgn(g).$$

W szczególności mamy stąd, że $1 = sgn(e) = sgn(f \circ f^{-1}) = sgn(f) \cdot sgn(f^{-1})$, czyli $sgn(f^{-1}) = sgn(f)$. Kończy to dowód naszego twierdzenia. □

Wniosek 2. *Dla* $n \geqslant 2$ A_n *jest podgrupą normalną indeksu* 2 *grupy* S_n.

Dowód. Ponieważ $sgn(e) = 1$, więc $e \in A_n$. Niech $f, g \in A_n$. Wtedy $sgn(f) = sgn(g) = 1$, skąd z twierdzenia 6 mamy, że $sgn(g^{-1}) = 1$ oraz $sgn(f \circ g^{-1}) = sgn(f) \cdot sgn(g^{-1}) = 1 \cdot 1 = 1$, czyli $f \circ g^{-1} \in A_n$. Zatem A_n jest podgrupą grupy S_n. Dalej, $n \geqslant 2$, więc $(1,2) \in S_n$ oraz z przykładu 9 mamy, że $sgn((1,2)) = -1$, więc $(1,2) \notin A_n$. Weźmy dowolne $g \in S_n$. Jeśli $g \notin A_n$, to $sgn(g) = -1$, skąd na mocy twierdzenia 6 $sgn((1,2) \circ g) = (-1) \cdot (-1) = 1$, czyli $f = (1,2) \circ g \in A_n$. Ale $(1,2) \circ (1,2) = e$, więc $g = (1,2) \circ f \in (1,2)A_n$. Oznacza to, że $S_n = A_n \cup (1,2)A_n$, więc ostatecznie $(S_n : A_n) = 2$. Zatem z rozdziału 4, $A_n \lhd S_n$. □

Rozdział 7

Grupy permutacji II

7.1 Permutacje rozłączne

Definicja 1. Permutacje $f, g \in S_n$ nazywamy *rozłącznymi*, jeżeli $X_f \cap X_g = \emptyset$ (równoważnie: $f(x) = x$ lub $g(x) = x$ dla każdego $x \in X_n$).

Ponieważ dla $h \in S_n$ i dla $k \in \mathbb{N}$ mamy, że $X_{f^k} \subseteq X_f$ (bo jeśli $x \in X_{f^k}$, to $f^k(x) \neq x$, czyli $f(x) \neq x$ i $x \in X_f$), więc mamy stąd natychmiast następujące

Stwierdzenie 1. *Jeżeli permutacje $f, g \in S_n$ są rozłączne, to dla dowolnych liczb naturalnych k, l permutacje f^k i g^l też są rozłączne.* □

Stwierdzenie 2. *Jeżeli permutacje $f, g \in S_n$ są rozłączne, to*
(i) $f \circ g = g \circ f$,
(ii) jeżeli $f \circ g = e$, to $f = g = e$,
(iii) $o(f \circ g) = [o(f), o(g)]$.

Dowód. (i) Dla $x \in X_n \setminus (X_f \cup X_g)$ jest $f(x) = g(x) = x$, więc $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = x = g(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Ponadto dla $x \in X_f$ jest $f(x) \in X_f$, więc $f(x) \notin X_g$ oraz $g(f(x)) = f(x)$ i $f(g(x)) = f(x)$, bo $g(x) = x$, gdyż $x \notin X_g$. Zatem dla $x \in X_f$ mamy, że $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Podobnie pokazujemy, że $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ dla $x \in X_g$. Stąd ostatecznie $f \circ g = g \circ f$.

(ii) Załóżmy, że $g \neq e$. Wtedy istnieje $x \in X_n$ takie, że $g(x) \neq x$, skąd $x \in X_g$, więc $g(x) \in X_g$, czyli $g(x) \notin X_f$ i $f(g(x)) = g(x)$. Ale $x = e(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)$ i mamy sprzeczność. Stąd $g = e$ i w konsekwencji $f = e$.

(iii) Oznaczmy $k = o(f)$, $l = o(g)$, $m = [k, l]$, $s = o(f \circ g)$. Wtedy $e = (f \circ g)^s = f^s \circ g^s$ na mocy (i), więc z (ii) i ze stwierdzenia 1 mamy, że $f^s = e$ i $g^s = e$. Zatem $k \mid s$ i $l \mid s$, skąd $m \mid s$. Ale na mocy (i) $(f \circ g)^m = f^m \circ g^m = e \circ e = e$, bo $k \mid m$ i $l \mid m$, więc $s \mid m$. Zatem $m \mid s$ i $s \mid m$, skąd $s = m$. □

Uwaga 1. Wzór (iii) można uogólnić na większą liczbę parami rozłącznych permutacji.

7.2 Rozkład permutacji na cykle

Niech A będzie niepustym zbiorem oraz niech $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ $(r \geqslant 2)$ będą różnymi elementami zbioru A. Wówczas permutację postaci

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{r-2} & b_{r-1} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{r-1} & b_0 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

nazywamy *cyklem*, a liczbę r — jego długością. Cykl (7.1) zapisujemy prościej jako $(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})$. Zatem transpozycje są to dokładnie cykle długości 2. Z określenia cyklu mamy od razu wzór:

$$(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})(b_i) = b_{i \oplus_r 1} \tag{7.2}$$

dla każdego $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

Ze wzoru (7.2) natomiast przez prostą indukcję uzyskujemy, że

$$(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})^k(b_i) = b_{i \oplus_r k} \tag{7.3}$$

dla $k, i = 0, 1, \ldots, r-1$.

Ze wzoru (7.3) mamy w szczególności, że $(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})^k(b_0) = b_k \neq b_0$ dla naturalnych $k < r$, więc $(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})^k \neq e$ dla naturalnych $k < r$. Ponadto ze wzoru (7.3) wynika, że $(b_0, b_1, \ldots, b_{r-1})^r = e$. W ten sposób udowodniliśmy następujące

Stwierdzenie 3. *Rząd dowolnego cyklu długości r jest równy r.* □

Teraz udowodnimy, że każdy cykl długości r jest złożeniem $r-1$ transpozycji.

Stwierdzenie 4. *Dla dowolnych różnych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_r \in A$ $(r \geqslant 2)$ zachodzi wzór:*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) = (a_1, a_r) \circ (a_1, a_{r-1}) \circ \ldots \circ (a_1, a_2). \tag{7.4}$$

Dowód. Indukcja względem $r \geqslant 2$. Dla $r = 2$ teza jest oczywista. Jeżeli zaś teza zachodzi dla pewnego naturalnego $r \geqslant 2$ i $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$ są różnymi elementami zbioru A, to z założenia indukcyjnego

$$(a_1, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}) = (a_1, a_{r+1}) \circ (a_1, a_r) \circ \ldots \circ (a_1, a_3),$$

więc

$$(a_1, a_{r+1}) \circ (a_1, a_r) \circ \ldots \circ (a_1, a_3) \circ (a_1, a_2) = (a_1, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}) \circ (a_1, a_2) =$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_r & a_{r+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{r+1} & a_1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}). \square$$

Wniosek 1. *Cykl jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy jego długość jest liczbą nieparzystą.*

Dowód. Niech $f = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$ będzie cyklem długości r. Wtedy ze stwierdzenia 4 mamy, że f jest złożeniem $r-1$ transpozycji. Zatem z poprzedniego rozdziału mamy, że $sgn(f) = (-1)^{r-1}$, skąd mamy tezę. □

Stwierdzenie 5. *Dla dowolnych różnych elementów $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ zbioru A i dla dowolnej permutacji $f \in S(A)$ zachodzi wzór:*

$$f \circ (a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}) \circ f^{-1} = (f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_{r-1})). \tag{7.5}$$

Dowód. Dla $a \in A \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}\}$ mamy

$$[f \circ (a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}) \circ f^{-1}](a) = [f \circ (a_0, a_1, \ldots, a_{r-1})](a) = f(a)$$

oraz $f(a) \notin \{f(a_0, f(a_1), \ldots, f(a_{r-1})\}$, więc

$$(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_{r-1}))(f(a)) = f(a).$$

Ponadto dla $i = 0, 1, \ldots, r-1$ mamy

$$[f \circ (a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}) \circ f^{-1}](a_i) = [f \circ (a_0, a_1, \ldots, a_{r-1})](a_i) = f(a_{i \oplus_r 1})$$

oraz

$$(f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_{r-1}))(f(a_i) = f(a_{i \oplus_r 1}).$$

Stąd mamy tezę. □

Twierdzenie 1. *Każda permutacja $\neq e$ zbioru skończonego A jest złożeniem parami rozłącznych cykli. Przedstawienie permutacji w postaci złożenia parami rozłącznych cykli jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników.*

Dowód. Zastosujemy indukcję ze względu na liczbę n elementów zbioru A. Dla $n = 1$ i $n = 2$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla permutacji zbiorów o liczbie elementów mniejszej niż n. Niech $f \neq e$ będzie permutacją zbioru n-elementowego A. Istnieje wtedy $a \in A$ takie, że $f(a) \neq a$. Rozpatrzmy ciąg $a_1 = a$, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2), \ldots$ Ponieważ zbiór A jest skończony, więc wyrazy tego ciągu nie mogą być wszystkie różne. Niech a_{k+1} będzie najwcześniejszym jego wyrazem równym jednemu z wyrazów poprzednich, tzn. niech $a_{k+1} = a_s$ dla pewnego $s < k+1$. Jeżeli $s > 1$, to $f(a_k) = a_{k+1} = a_s = f(a_{s-1})$, skąd $a_k = a_{s-1}$, co przeczy minimalności $k+1$. Zatem $s = 1$ i wobec tego elementy $a_1, a_2 = f(a_1), \ldots, a_k = f(a_{k-1})$ są różne oraz $f(a_k) = a_{k+1} = a_1$. W zapisie permutacji f przestawmy kolumny tak, aby w pierwszym wierszu na początku występowały elementy $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Wtedy

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} & a_k & a'_1 & \ldots & a'_{n-k} \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_k & a_1 & f(a'_1) & \ldots & f(a'_{n-k}) \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1, a_2, \ldots, a_k) \circ \begin{pmatrix} a'_1 & \ldots & a'_{n-k} \\ f(a'_1) & \ldots & f(a'_{n-k}) \end{pmatrix}.$$

Zatem f jest złożeniem cyklu $(a_1, \ldots, a_k)$ oraz permutacji $g = \begin{pmatrix} a'_1 & \ldots & a'_{n-k} \\ f(a'_1) & \ldots & f(a'_{n-k}) \end{pmatrix}$ zbioru $A' = \{a'_1, \ldots, a'_{n-k}\}$. Na mocy założenia indukcyjnego $g = e$ lub g jest złożeniem skończonej liczby cykli rozłącznych, z których każdy jest rozłączny z cyklem $(a_1, \ldots, a_k)$, skąd f jest iloczynem parami rozłącznych cykli.

Dla dowodu drugiej części twierdzenia przypuśćmy, że permutacja $f \neq e$ ma dwa istotnie różne przedstawienia w postaci złożenia (iloczynu) cykli rozłącznych:

$$f = (a_1, \ldots, a_k) \circ \ldots = (b_1, b_2, \ldots, b_s) \circ \ldots$$

Niech np. cykl $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ będzie różny od każdego z cykli występujących w pierwszym przedstawieniu permutacji f. Ponieważ $b_1 \in A$, więc element b_1 należy do pewnego cyklu występującego w pierwszym przedstawieniu permutacji f. Ale składanie cykli rozłącznych jest przemienne, więc można zakładać, że $b_1 = a_i$ dla pewnego $i = 1, 2, \ldots, k$. Ponadto

$$(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_{i-1}),$$

więc można zakładać, że $b_1 = a_1$. Wtedy $b_2 = f(b_1) = f(a_1) = a_2$, $b_3 = f(b_2) = f(a_2) = a_3$, itd. Wynika stąd, że $s = k$ oraz $(b_1, b_2, \ldots, b_s) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód naszego twierdzenia. □

Ze stwierdzenia 2 oraz z dowodu wniosku 1 wynika od razu następujące

Twierdzenie 2. *Jeżeli permutacja f jest złożeniem s cykli parami rozłącznych o długościach $r_1, r_2, \ldots, r_s$, to*

(i) $o(f) = [r_1, r_2, \ldots, r_s]$;

(ii) $sgn(f) = (-1)^{r_1 + r_2 + \ldots + r_s - s}$. □

Z twierdzenia 1, ze stwierdzenia 4 oraz z tego, że $e = (1, 2) \circ (1, 2)$ wynika od razu następujące

Twierdzenie 3. *Każda permutacja $f \in S_n$ dla $n \geqslant 2$ jest złożeniem skończonej liczby transpozycji.* □

Ponieważ znak złożenia permutacji jest równy iloczynowi znaków tych permutacji oraz transpozycje są permutacjami nieparzystymi, więc mamy też następujące

Twierdzenie 4. *Permutacja $f \in S_n$ dla $n \geqslant 2$ jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy f jest złożeniem parzystej liczby transpozycji.* □

Stwierdzenie 6. *Jeżeli x, y, z, t są różnymi elementami zbioru A, to w grupie permutacji $S(A)$ zachodzi wzór:*

$$[(x,y,z),(x,y,t)] = (x,y) \circ (z,t). \tag{7.6}$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}[(x,y,z),(x,y,t)] &= (x,y,z)^{-1} \circ (x,y,t)^{-1} \circ (x,y,z) \circ (x,y,t) = \\ &= (x,z,y) \circ (t,y,x) \circ (x,y,z) \circ (x,y,t) = \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ y & x & t & z \end{pmatrix} = (x,y) \circ (z,t). \ \square\end{aligned}$$

Przykład 1. Niech w grupie S_4:

$$V = \{e, (1,2) \circ (3,4), (1,3) \circ (2,4), (1,4) \circ (2,3)\}. \tag{7.7}$$

Oznaczmy: $a = (1,2) \circ (3,4)$, $b = (1,3) \circ (2,4)$, $c = (1,4) \circ (2,3)$. Wtedy $a^2 = b^2 = c^2 = e$. Ponadto $a \circ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,4) \circ (2,3) = c$, $b \circ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = c$, więc V jest podgrupą rzędu 4 grupy S_4 (izomorficzną z grupą czwórkową Kleina). Dla $f \in S_4$ na mocy stwierdzenia 5 mamy, że $f \circ a \circ f^{-1} = f \circ (1,2) \circ (3,4) \circ f^{-1} = [f \circ (1,2) \circ f^{-1}] \circ [f \circ (3,4) \circ f^{-1}] = (f(1), f(2)) \circ (f(3), f(4)) \in V$ i podobnie $f \circ b \circ f^{-1}, f \circ c \circ f^{-1} \in V$. Stąd $V \lhd S_4$. Ale $V \subseteq A_4$, więc $V \lhd A_4$. Dalej, $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$ i $|A_4/V| = \frac{|A_4|}{|V|} = \frac{12}{4} = 3$, więc grupa A_4/V jest abelowa, skąd z twierdzenia 1 z rozdziału 5, $A_4' \subseteq V$. Ponadto $e = [e,e]$, więc ze stwierdzenia 6 każdy element grupy V

jest komutatorem dwóch cykli długości 3, które na mocy wniosku 1 są permutacjami parzystymi, więc $V \subseteq A_4'$ i ostatecznie $V = A_4'$. Z przykładu 1 z rozdziału 5 mamy zatem stąd, że w grupie A_4 nie istnieje podgrupa rzędu 6, chociaż 6 dzieli rząd grupy A_4. □

Twierdzenie 5. *Jeżeli A jest zbiorem o co najmniej trzech elementach, to $Z(S(A)) = \{e\}$.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje zbiór A o co najmniej trzech elementach i istnieje $f \in Z(S(A))$ takie, że $f \neq e$. Zatem istnieje $a \in A$ takie, że $f(a) \neq a$. Oznaczmy $b = f(a)$. Wtedy a i b są różnymi elementami zbioru A i zbiór A posiada co najmniej trzy elementy, więc istnieje $c \in A \setminus \{a, b\}$. Dalej, $f \in Z(S(A))$, więc na mocy stwierdzenia 5 $(b, f(c)) = f \circ (a, c) \circ f^{-1} = (a, c)$, skąd $\{b, f(c)\} = \{a, c\}$. Ale $c \neq b$, więc $c = f(c)$ oraz $a \neq b$, więc $a = f(c)$, czyli $a = c$ i mamy sprzeczność. Oznacza to, że $Z(S(A)) = \{e\}$. □

Rozdział 8

Zasadnicze twierdzenie algebry. Pojęcie pierścienia

8.1 Zasadnicze twierdzenie algebry i jego dowód

Definicja 1. Wielomianem o współczynnikach zespolonych nazywamy funkcję $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ postaci

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są ustalonymi liczbami zespolonymi oraz $n = 0, 1, \ldots$ Ponadto dla $a_n \neq 0$ mówimy, że n jest stopniem wielomianu $f(x)$.

Lemat 1. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Wówczas dla każdego $r > 0$ istnieje stała $K > 0$ taka, że*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant K \cdot |z_1 - z_2|$$

dla wszystkich $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ takich, że $|z_1|, |z_2| < r$.

Dowód. Jeżeli $f(x) = a_0$ dla $x \in \mathbb{C}$, to wystarczy wziąć $K = 1$. Załóżmy więc, że $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $n \geqslant 1$ i $a_n \neq 0$. Weźmy dowolne $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ takie, że $|z_1|, |z_2| < r$. Wtedy dla $k = 1, 2, \ldots, n$ mamy, że

$$z_1^k - z_2^k = (z_1 - z_2) \cdot (z_1^{k-1} + z_1^{k-2} z_2 + \ldots + z_1 z_2^{k-2} + z_2^{k-1})$$

oraz z nierówności trójkąta:

$$|z_1^{k-1} + z_1^{k-2} z_2 + \ldots + z_1 z_2^{k-2} + z_2^{k-1}| \leqslant$$
$$\leqslant |z_1|^{k-1} + |z_1|^{k-2}|z_2| + \ldots + |z_1||z_2|^{k-2} + |z_2|^{k-1} \leqslant k r^{k-1}.$$

Stąd

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |a_n(z_1^n - z_2^n) + a_{n-1}(z_1^{n-1} - z_2^{n-1}) + \ldots + a_1(z_1 - z_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n||z_1^n - z_2^n| + |a_{n-1}||z_1^{n-1} - z_2^{n-1}| + \ldots + |a_1||z_1 - z_2| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n||z_1 - z_2| n r^{n-1} + |a_{n-1}||z_1 - z_2|(n-1) r^{n-2} + \ldots + |a_1||z_1 - z_2| =$$
$$= |z_1 - z_2|(|a_n| n r^{n-1} + |a_{n-1}|(n-1) r^{n-2} + \ldots + |a_2| 2r + |a_1|),$$

więc wystarczy wziąć $K = |a_n| n r^{n-1} + |a_{n-1}|(n-1) r^{n-2} + \ldots + |a_2| 2r + |a_1|$. □

Definicja 2. Powiemy, że liczba zespolona z_0 jest granicą ciągu (z_n) liczb zespolonych, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant n_0} |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

Piszemy wtedy $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$.

Lemat 2. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Wówczas z $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ wynika, że $\lim\limits_{n \to \infty} |f(z_n)| = |f(z_0)|$.*

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z lematu 1 dla $r = 1 + |z_0|$ istnieje stała $K > 0$ taka, że $|f(z) - f(z_0)| \leqslant K|z - z_0|$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ takich, że $|z| < 1 + |z_0|$, gdyż $|z_0| < 1 + |z_0|$. Ale $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, więc dla $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2K}, 1\}$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ jest $|z_n - z_0| < \delta$, czyli $|z_n - z_0| < 1$, a więc $|z_n| = |(z_n - z_0) + z_0| \leqslant$ $\leqslant |z_n - z_0| + |z_0| < 1 + |z_0|$, skąd $|f(z_n) - f(z_0)| \leqslant K \frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Oznacza to, że $\lim\limits_{n \to \infty} |f(z_n)| = |f(z_0)|$. □

Definicja 3. Powiemy, że ciąg (z_n) liczb zespolonych jest *ograniczony*, jeżeli istnieje stała $A > 0$ taka, że $|z_n| \leqslant A$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Lemat 3. *Z każdego ciągu ograniczonego liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny do pewnej liczby zespolonej.*

Dowód. Niech (z_n) będzie ograniczonym ciągiem liczb zespolonych. Wtedy istnieje stała $A > 0$ taka, że $|z_n| \leqslant A$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponadto dla $n = 1, 2, \ldots$ istnieją $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ takie, że $z_n = a_n + b_n i$, więc $|a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |z_n| \leqslant A$ i podobnie $|b_n| \leqslant A$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Zatem (a_n) i (b_n) są ograniczonymi ciągami liczb rzeczywistych. Stąd z twierdzenia Weierstrassa istnieje podciąg (a_{k_n}) ciągu (a_n), który jest zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej a_0. Zatem z twierdzenia Weierstrassa istnieje podciąg $(b_{l_{k_n}})$ ciągu (b_{k_n}) zbieżny do pewnej liczby rzeczywistej b_0. Stąd także podciąg $(a_{l_{k_n}})$ jest zbieżny do a_0. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Wtedy istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ jest $|a_{l_{k_n}} - a_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ i $|b_{l_{k_n}} - b_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Zatem dla $z_0 = a_0 + b_0 i$ oraz dla $n \geqslant n_0$ mamy $|z_{l_{k_n}} - z_0| = \sqrt{|a_{l_{k_n}} - a_0|^2 + |b_{l_{k_n}} - b_0|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$. Oznacza to, że $\lim\limits_{n \to \infty} z_{l_{k_n}} = z_0$. □

ZASADNICZE TWIERDZENIE ALGEBRY. *Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych posiada pierwiastek zespolony.*

Dla wielomianów stopnia 1 nasze twierdzenie zachodzi, bo mają one postać $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$ oraz wtedy $f(-\frac{b}{a}) = 0$.

Wystarczy zatem udowodnić to twierdzenie dla wielomianów stopni $\geqslant 2$. Ale jeżeli $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ i $n \geqslant 2$, to $f(x) = a_n \cdot g(x)$, gdzie $g(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$ i wielomiany $f(x)$ i $g(x)$ mają takie same zbiory pierwiastków. Stąd wystarczy wykazać, że dla każdego $n \geqslant 2$ i dla dowolnych $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ wielomian

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{8.1}$$

posiada pierwiastek zespolony.

Lemat 4. *Dla wielomianu $f(x)$ postaci (8.1) i dla każdego $z \in \mathbb{C}$ takiego, że $|z| > 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$ mamy, że $|f(z)| > 1 + |a_0|$.*

Dowód. Załóżmy, że $z \in \mathbb{C}$ i $|z| > 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$. Wtedy $|z| > 1$, więc $|z|^k > 1$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Stąd dla takich z mamy

$$|f(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \geqslant$$
$$\geqslant |z^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \geqslant |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \ldots - |a_1||z| - |a_0|.$$

Ale $|z|^k \leqslant |z|^{n-1}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$, bo $|z| > 1$ i $n \geqslant 2$, więc

$$|f(z)| \geqslant |z|^n - |z|^{n-1} \cdot (|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|) =$$
$$= |z|^{n-1} \cdot (|z| - |a_{n-1}| - \ldots - |a_1| - |a_0|) \geqslant |z|^{n-1} \geqslant |z|,$$

bo $n \geqslant 2$ i $|z| \geqslant 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$. Stąd

$$|f(z)| > 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0| \geqslant 1 + |a_0|,$$

czyli $|f(z)| > 1 + |a_0|$ dla $|z| > 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$. □

Lemat 5. *Dla wielomianu $f(x)$ postaci* (8.1) *istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że*

$$|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$$

dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Dowód. Ponieważ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ jest $|f(z)| \geqslant 0$, więc zbiór $\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$ jest ograniczony z dołu. Posiada on zatem kres dolny q. Wtedy $|f(z)| \geqslant q$ dla każdego $z \in \mathbb{C}$ oraz dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $z_m \in \mathbb{C}$ takie, że $|f(z_m)| < q + \frac{1}{m}$. Gdyby dla pewnego m było $|z_m| > 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$, to z lematu 4,

$$|f(z_m)| > 1 + |a_0| = |f(0)| + 1 \geqslant q + 1 \geqslant q + \tfrac{1}{m},$$

skąd $|f(z_m)| > q + \frac{1}{m}$ i mamy sprzeczność. Stąd $|z_m| \leqslant 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$ dla $m \in \mathbb{N}$. Zatem z lematu 3 istnieje podciąg (z_{k_n}) ciągu (z_n) taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} z_{k_n} = z_0$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$. Wówczas dla każdego $z \in \mathbb{C}$ i dla każdego m mamy, że $|f(z_m)| < |f(z)| + \frac{1}{m}$, skąd

$$|f(z)| > |f(z_{k_n})| - \tfrac{1}{k_n},$$

więc po przejściu do granicy z wykorzystaniem lematu 2 uzyskamy, że $|f(z)| \geqslant |f(z_0)|$. □

Udowodnimy teraz lemat, który zakończy dowód zasadniczego twierdzenia algebry.

Lemat 6. *Dla wielomianu* $f(x)$ *postaci* (8.1) *i dla liczby* z_0 *z lematu* 5 *mamy, że* $f(z_0) = 0$.

Dowód. Niech $h(z) = f(z + z_0) = (z + z_0)^n + a_{n-1}(z + z_0)^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_1(z + z_0) + a_0 = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0$ dla pewnych $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$, $b_n = 1$. Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $b_k \neq 0$. Wówczas $h(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_k z^k + b_0$. Z lematu 5 mamy, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$

$$|z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_k z^k + b_0| \geqslant |f(z_0)|$$

oraz $b_0 = h(0) = f(z_0)$, więc dla $z \in \mathbb{C}$ mamy

$$|z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_k z^k + b_0| \geqslant |b_0|. \tag{8.2}$$

Dla $c \in (0,1)$ podstawmy w nierówności (8.2): $z = c \cdot \sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}$. Otrzymamy wówczas

$$|c^n \left(\sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}\right)^n + b_{n-1}c^{n-1}\left(\sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}\right)^{n-1} + \ldots + b_k c^k \left(\sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}\right)^k + b_0| \geqslant |b_0|, \tag{8.3}$$

więc z (8.3) po uproszczeniach i podstawieniu

$$d_n = \left(\sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}\right)^n, d_{n-1} = b_{n-1}\left(\sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}\right)^{n-1}, \ldots, d_{k+1} = b_{k+1}\left(\sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}\right)^{k+1}$$

uzyskamy

$$|d_n c^n + d_{n-1}c^{n-1} + \ldots + d_{k+1}c^{k+1} - b_0 c^k + b_0| \geqslant |b_0| \text{ dla } c \in (0,1). \tag{8.4}$$

Oznaczmy $g(x) = d_n x^{n-k-1} + d_{n-1}x^{n-k-2} + \ldots + d_{k+1}$. Wtedy z (8.4) mamy

$$|c^{k+1}g(c) + b_0(1 - c^k)| \geqslant |b_0| \text{ dla } c \in (0,1). \tag{8.5}$$

Ponadto $|c^{k+1}g(c) + b_0(1 - c^k)| \leqslant |c^{k+1}g(c)| + |b_0||1 - c^k| = c^{k+1}|g(c)| + |b_0|(1 - c^k)$, bo $0 < c < 1$. Zatem z (8.5):

$$c^{k+1}|g(c)| + |b_0| - |b_0|c^k \geqslant |b_0| \text{ dla } c \in (0,1),$$

a więc

$$c|g(c)| \geqslant |b_0| \text{ dla } c \in (0,1).$$

Ponadto

$$|g(c)| = |d_n c^{n-k-1} + d_{n-1}c^{n-k-2} + \ldots + d_{k+1}| \leqslant$$

$$\leqslant |d_n|c^{n-k-1} + |d_{n-1}|c^{n-k-2} + \ldots + |d_{k+1}| \leqslant$$

$$|d_n| + |d_{n-1}| + \ldots + |d_{k+1}|,$$

bo $0 < c < 1$. Zatem

$$c(|d_n| + |d_{n-1}| + \ldots + |d_{k+1}|) \geqslant |b_0| \text{ dla } c \in (0,1).$$

Stąd po przejściu do granicy względem $c \to 0$ otrzymamy, że $0 \geqslant |b_0|$, czyli $|b_0| = 0$. Ale $f(z_0) = b_0$, więc $f(z_0) = 0$. □

8.2 Pojęcie pierścienia

Definicja 4. *Pierścieniem* nazywamy system algebraiczny $(P, +, \cdot, 0, 1)$ taki, że

P1. $(P, +, 0)$ jest grupą abelową;
P2. $\forall_{a,b,c \in P}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
P3. $\forall_{a,b,c \in P}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
P4. $\forall_{a \in P}\ a \cdot 1 = a$;
P5. $\forall_{a,b \in P}\ a \cdot b = b \cdot a$.

Działanie oznaczane przez + nazywamy *dodawaniem*, zaś działanie oznaczane przez · nazywamy *mnożeniem*, natomiast element oznaczony symbolem 1 nazywamy *jedynką pierścienia* P. Grupę abelową $(P, +, 0)$ nazywamy *grupą addytywną pierścienia* P i oznaczamy przez P^+.

Własności działań w pierścieniu

Niech $(P, +, \cdot, 0, 1)$ będzie pierścieniem. Wówczas:

1. $\forall_{a\in P}\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Dowód. Ponieważ $0 = 0+0$, więc na mocy **P2**: $a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0$, czyli $a\cdot 0 + 0 = a\cdot 0 + a\cdot 0$, skąd z prawa skracania w grupach abelowych mamy, że $a\cdot 0 = 0$. Zatem na mocy **P5** także $0\cdot a = 0$. □

2. $\forall_{a,b\in P}\ -(a\cdot b) = (-a)\cdot b = a\cdot(-b)$.

Dowód. Na mocy **P2** i **1** mamy, że $a\cdot b + a\cdot(-b) = a\cdot[b+(-b)] = a\cdot 0 = 0$, skąd $a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$. Stąd na mocy **P5**: $-(a\cdot b) = -(b\cdot a) = b\cdot(-a) = (-a)\cdot b$. □

3. $\forall_{a,b,c\in P}\ (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Dowód. Na mocy **P5**, **P2** i znowu **P5** mamy, że $(a+b)\cdot c = c\cdot(a+b)c\cdot a + c\cdot b = a\cdot c + b\cdot c$. □

4. $\forall_{a\in P}\ (-1)\cdot a = a\cdot(-1) = -a$.

Dowód. Na mocy **P4** i **P5** mamy, że $a = a\cdot 1 = 1\cdot a$, więc z **2** i **P5**, $-a = -(a\cdot 1) = a\cdot(-1) = (-1)\cdot a$. □

5. $\forall_{a,a_1,\ldots,a_n\in P}\ a\cdot(a_1+\ldots+a_n) = a\cdot a_1 + \ldots + a\cdot a_n$.

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 2$ teza wynika z **P2**. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i niech $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in P$. Wtedy na mocy **P2** i założenia indukcyjnego: $a\cdot(a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}) = a\cdot[(a_1+\ldots+a_n)+a_{n+1}] = a\cdot(a_1+\ldots+a_n) + a\cdot a_{n+1} = a\cdot a_1 + \ldots + a\cdot a_n + a\cdot a_{n+1}$, czyli teza zachodzi dla liczby $n+1$. □

6. $\forall_{a,b,c\in P}\ a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c$.

Dowód. Z określenia odejmowania, z **P2**, z **2** i znowu z określenia odejmowania mamy, że $a\cdot(b-c) = a\cdot(b+(-c)) = a\cdot b + a\cdot(-c) = a\cdot b + (-(a\cdot c)) = a\cdot b - a\cdot c$. □

Ponieważ $(P,+,0)$ jest grupą abelową, więc ma sens *całkowita wielokrotność* $k\cdot a$ elementu $a \in P$ przez liczbę całkowitą k. Przypomnijmy jej określenie:

$0\cdot a = 0$, $1\cdot a = a$ oraz dla $n \in \mathbb{N}$: $n\cdot a = \underbrace{a+\ldots+a}_{n}$ i $(-n)\cdot a = \underbrace{(-a)+\ldots+(-a)}_{n}$.

Z teorii grup mamy zatem następujące własności:

7. $\forall_{a\in P}\forall_{n,m\in\mathbb{Z}}\ n\cdot(m\cdot a)=(nm)\cdot a$.

8. $\forall_{a\in P}\forall_{n,m\in\mathbb{Z}}\ n+m)\cdot a=n\cdot a+m\cdot a$.

9. $\forall_{a,b\in P}\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ n\cdot(a+b)=n\cdot a+n\cdot b$.

Można także udowodnić następującą własność:

10. $\forall_{a,b\in P}\forall_{n\in\mathbb{Z}}\ n\cdot(a\cdot b)=(n\cdot a)\cdot b=a\cdot(n\cdot b)$.

W pierścieniu P możemy też określić nieujemną całkowitą potęgę dowolnego elementu $a\in P$ przyjmując, że:

$a^0=1$, $a^1=a$ oraz dla $n\in\mathbb{N}$: $a^{n+1}=a^n\cdot a$ (czyli $a^n=\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$).

Przez prostą indukcję możemy wówczas udowodnić następujące własności:

11. $\forall_{a\in P}\forall_{n,m\in\mathbb{Z}}\ a^n\cdot a^m=a^{n+m}$.

12. $\forall_{a\in P}\forall_{n,m\in\mathbb{N}}\ (a^n)^m=a^{nm}$.

13. $\forall_{a,b\in P}\forall_{n\in\mathbb{N}}\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Rozdział 9

Podpierścienie, elementy odwracalne, dzielniki zera

9.1 Określenie podpierścienia

Definicja 1. *Podpierścieniem* pierścienia $(P, +, \cdot, 0, 1)$ nazywamy taki podzbiór $A \subseteq P$, który jest pierścieniem ze względu na wszystkie działania określone w pierścieniu P (zredukowane do A).

Stwierdzenie 1. *Podzbiór A pierścienia P jest podpierścieniem pierścienia P wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:*

(I) $1 \in A$ *oraz (II)* $\forall_{a,b \in A}\ a - b, a \cdot b \in A$.

Dowód. Załóżmy, że A jest podpierścieniem pierścienia P. Wtedy $0, 1 \in A$ (ze względu na wykonalność działań 0-argumentowych) oraz dla dowolnego $a \in A$, $-a \in A$ (ze względu na wykonalność działania 1-argumentowego) i ponadto dla $a, b \in A$, $a \cdot b \in A$ oraz $a - b = a + (-b) \in A$ (ze względu na wykonalność mnożenia i dodawania).

Na odwrót, załóżmy, że $1 \in A$ oraz $a - b, a \cdot b \in A$ dla dowolnych $a, b \in A$. Wtedy $0 = 1 - 1 \in A$, skąd dla $b \in A$, $-b = 0 - b \in A$, więc dla $a, b \in A$, $a + b = a - (-b) \in A$. Zatem w A jest wykonalne mnożenie i dodawanie. Ponieważ wszystkie aksjomaty pierścienia są spełnione nawet w P, więc $(A, +, \cdot, 0, 1)$ jest pierścieniem. $\square$

9.2 Przykłady pierścieni i podpierścieni

Przykład 1. Każde ciało jest pierścieniem. Podpierścienie ciał są pierścieniami.

Przykład 2. Podpierścienie ciała $\mathbb{C}$ nazywamy *pierścieniami liczbowymi.* Oczywiście są one pierścieniami. Przykłady pierścieni liczbowych:

a) Pierścień liczb całkowitych $\mathbb{Z}$;

b) Dla ustalonej liczby naturalnej $a > 1$ zbiór

$$\left[\frac{1}{a}\right] = \left\{\frac{n}{a^k} : n, k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 0\right\}$$

jest pierścieniem liczbowym (sprawdzenie zostawiamy Czytelnikowi);

c) Niech d będzie liczbą całkowitą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej. Wówczas z teorii liczb wiadomo, że d nie jest kwadratem liczby wymiernej. Określamy $\sqrt{d}$ jako zwykły pierwiastek arytmetyczny z liczby d dla $d > 0$, zaś dla $d < 0$ określamy $\sqrt{d} = \sqrt{|d|} \cdot i$. Zatem w obu przypadkach $(\sqrt{d})^2 = d$. Można sprawdzić, że wówczas zbiór $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ jest pierścieniem liczbowym;

d) Niech d będzie liczbą całkowitą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej taką, że $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$. Można sprawdzić, że wtedy zbiór $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] = \{x + y \cdot \frac{1+\sqrt{d}}{2} : x, y \in \mathbb{Z}\}$ jest pierścieniem liczbowym.

Przykład 3. Niech $m > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Dla $a, b \in \mathbb{Z}_m$ określamy:

$a \oplus_m b$ = reszta z dzielenia $a + b$ przez m;

$a \odot_m b$ = reszta z dzielenia $a \cdot b$ przez m.

W oparciu o własności kongruencji można sprawdzić, że wówczas $(\mathbb{Z}_m, \oplus_m, \odot_m, 0, 1)$ jest pierścieniem.

Przykład 4. Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych z dodawaniem i mnożeniem funkcji tworzy pierścień. Oznaczamy go przez $\mathbb{R}[x]$.

Przykład 5. Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych z dodawaniem i mnożeniem funkcji tworzy pierścień.

Oznaczamy go przez $\mathbb{Q}[x]$.

Przykład 6. Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych z dodawaniem i mnożeniem funkcji tworzy pierścień. Oznaczamy go przez $\mathbb{Z}[x]$.

Przykład 7. Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych z dodawaniem i mnożeniem funkcji tworzy pierścień. Oznaczamy go przez $\mathbb{C}[x]$.

Przykład 8. Niech $P_1, \ldots, P_n$ będą pierścieniami. W zbiorze $P_1 \times \ldots \times P_n$ określamy dodawanie i mnożenie następująco:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n),$$

Ponadto określamy $0 = (0, \ldots, 0)$ oraz $1 = (1, \ldots, 1)$. Można sprawdzić, że wtedy $(P_1 \times \ldots \times P_n, +, \cdot, 0, 1)$ tworzy pierścień. Nazywamy go *iloczynem kartezjańskim pierścieni* $P_1, \ldots, P_n$.

Przykład 9. Dowolny zbiór jednoelementowy $P = \{a\}$ z działaniami $+$ i $\cdot$ takimi, że $a + a = a$ i $a \cdot a = a$ oraz z wyróżnionymi elementami $0 = 1 = a$ tworzy pierścień. Nazywamy go *pierścieniem zerowym.* Zauważmy, że jeśli pierścień P jest niezerowy, to $|P| > 1$, więc istnieje niezerowe $a \in P$. Wtedy $a = a \cdot 1$ oraz $a \cdot 0 = 0 \neq a$, skąd wynika, że $0 \neq 1$ w P. Na odwrót, jeśli $0 \neq 1$ w pierścieniu P, to $|P| > 1$, więc pierścień P nie jest zerowy.

Twierdzenie 1. *Część wspólna dowolnej niepustej rodziny podpierścieni pierścienia P jest podpierścieniem tego pierścienia.*

Dowód. Niech $\{A_t\}_{t \in T}$ będzie dowolną niepustą rodziną podpierścieni pierścienia P oraz niech $A = \bigcap_{t \in T} A_t$. Ponieważ $1 \in A_t$ dla każdego $t \in T$, więc $1 \in A$. Weźmy dowolne $a, b \in A$. Wtedy $a, b \in A_t$ dla każdego $t \in T$, więc ze stwierdzenia 1, $a - b, a \cdot b \in A_t$ dla każdego $t \in T$. Zatem $a - b, a \cdot b \in A$. Stąd na mocy stwierdzenia 1, A jest podpierścieniem pierścienia P. □

Uwaga 1. Niech P będzie pierścieniem. Wówczas dla dowolnego podzbioru $X \subseteq P$ istnieje najmniejszy (w sensie inkluzji) podpierścień

pierścienia P zawierający zbiór X. Nazywamy go *podpierścieniem generowanym przez zbiór* X i oznaczamy przez $[X]$. Rzeczywiście, niech $\{A_t\}_{t\in T}$ będzie rodziną wszystkich podpierścieni pierścienia P zawierających zbiór X. Wtedy $P \in \{A_t\}_{t\in T}$, więc z twierdzenia 1 mamy, że $A = \bigcap_{t\in T} A_t$ jest podpierścieniem pierścienia P. Ale $X \subseteq A_t$ dla każdego $t \in T$, więc $X \subseteq A$, skąd A jest najmniejszym elementem w rodzinie $\{A_t\}_{t\in T}$, czyli A jest najmniejszym podpierścieniem pierścienia P zawierającym zbiór X.

Nietrudno jest zauważyć, że $[\emptyset] = \{k \cdot 1 : k \in \mathbb{Z}\}$, natomiast dla $X \neq \emptyset$ podpierścień $[X]$ składa się ze wszystkich skończonych sum elementów postaci $s \cdot 1$ oraz $k \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, gdzie $s, k \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ oraz $n = 1, 2, \ldots$ Jeśli X jest zbiorem skończonym oraz $X = \{a_1, \ldots, a_m\}$, to zamiast $[\{a_1, \ldots, a_m\}]$ będziemy pisali $[a_1, \ldots, a_m]$. Zatem w szczególności mamy stąd

$$[a] = \{k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot a + \ldots + k_n \cdot a^n : k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Przykład 10. Niech A i B będą podpierścieniami pierścienia P. Oznaczmy przez AB zbiór wszystkich skończonych sum elementów postaci $a \cdot b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$. Wtedy $1 = 1 \cdot 1 \in AB$. Ponadto z określenia AB oraz z tego, że $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$ wynika od razu, że jeśli $x, y \in AB$, to $x - y \in AB$. Ponadto z rozdzielności mnożenia względem dodawania i z tego, że dla $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ jest $(a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2) = (a_1 \cdot a_2) \cdot (b_1 \cdot b_2) \in AB$ wynika, że dla dowolnych $x, y \in AB$, $x \cdot y \in AB$. Zatem na mocy stwierdzenia 1 mamy, że AB jest podpierścieniem pierścienia P.

9.3 Elementy odwracalne

Definicja 2. Powiemy, że $a \in P$ jest *elementem odwracalnym pierścienia* P, jeżeli istnieje $x \in P$ takie, że $a \cdot x = 1$. Zbiór wszystkich elementów odwracalnych pierścienia P oznaczamy przez P^*.

Twierdzenie 2. *Dla dowolnego pierścienia* P *system algebraiczny* $(P^*, \cdot, 1)$ *jest grupą abelową.*

Dowód. Ponieważ $1 \cdot 1 = 1$, więc $1 \in P^*$. Niech $a \in P^*$. Wtedy istnieje $x \in P$ takie, że $a \cdot x = 1$, skąd $x \cdot a = 1$, czyli $x \in P^*$. Dalej, dla $a, b \in P^*$ istnieją $x, y \in P$ takie, że $a \cdot x = 1$ i $b \cdot y = 1$, więc $(a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = (a \cdot x) \cdot (b \cdot y) = 1 \cdot 1 = 1$, czyli $a \cdot b \in P^*$. Ponieważ mnożenie jest łączne w P, więc mnożenie jest łączne w P^*. Zatem z tych rozważań mamy, że $(P^*, \cdot, 1)$ jest grupą. Natomiast z **P5** wynika od razu, że grupa ta jest abelowa. □

Uwaga 2. Element odwrotny do elementu $a \in P^*$ oznaczamy przez a^{-1}. Z dowodu twierdzenia 2 wynika, że dla dowolnych $a, b \in P^*$ mamy wzór:

$$(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}.$$

Przykład 11. Z teorii liczb wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej $m > 1$:

$$\mathbb{Z}_m^* = \{a \in \mathbb{Z}_m : (a, m) = 1\}.$$

W szczególności $|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m)$. □

Przykład 12. Można pokazać, że dla dowolnych pierścieni $P_1, \ldots, P_n$ zachodzi wzór:

$$(P_1 \times \ldots \times P_n)^* = P_1^* \times \ldots \times P_n^*.$$

9.4 Dzielniki zera

Definicja 3. Mówimy, że element a pierścienia P jest *dzielnikiem zera*, jeżeli istnieje niezerowy element $b \in P$ taki, że $a \cdot b = 0$.

W każdym pierścieniu niezerowym P mamy, że $0 \neq 1$ oraz $0 \cdot 1 = 0$, więc 0 jest dzielnikiem zera w każdym pierścieniu niezerowym P. Dzielniki zera różne od 0 nazywamy *właściwymi dzielnikami zera.*

Przykład 13. Dla liczb złożonych m pierścień $\mathbb{Z}_m$ posiada właściwe dzielniki zera, gdyż istnieją liczby naturalne $a, b < m$ takie, że

$a \cdot b = m$ i wtedy a, b są niezerowymi elementami pierścienia $\mathbb{Z}_m$ oraz $a \odot_m b = 0$.

Twierdzenie 3. *W dowolnym pierścieniu P element odwracalny nie jest dzielnikiem zera.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje pierścień P oraz istnieje element odwracalny $a \in P$, który jest dzielnikiem zera. Zatem istnieje niezerowe $b \in P$ takie, że $a \cdot b = 0$ oraz istnieje $x \in P$ takie, że $a \cdot x = 1$. Zatem $b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot x) = (b \cdot a) \cdot x = (a \cdot b) \cdot x = 0 \cdot x = 0$ i mamy sprzeczność. □

Wniosek 1. *Dowolne ciało nie posiada właściwych dzielników zera.* □

Elementy pierścienia P, które nie są dzielnikami zera nazywamy *elementami regularnymi.*

Twierdzenie 4. *W dowolnym pierścieniu P:*

a) iloczyn elementów regularnych jest elementem regularnym;

b) jeśli $a \in P$ jest regularny i $a \cdot x = a \cdot y$, to $x = y$;

c) 1 jest elementem regularnym.

Dowód. a) Niech $a, b \in P$ będą elementami regularnymi. Weźmy dowolny $x \in P$ taki, że $(ab)x = 0$. Wtedy $a(bx) = 0$, więc z regularności a, $bx = 0$, skąd $x = 0$, z regularności b. Zatem ab jest elementem regularnym.

b) Niech $a \in P$ będzie elementem regularnym i niech $x, y \in P$ będą takie, że $ax = ay$. Wtedy $a(x - y) = 0$, skąd z regularności a mamy, że $x - y = 0$, czyli $x = y$.

c) Niech $x \in P$ będzie takie, że $1 \cdot x = 0$. Ponieważ $1 \cdot x = x$, więc $x = 0$ i 1 jest elementem regularnym. □

Definicja 4. Niezerowy pierścień P, który nie zawiera właściwych dzielników zera nazywamy *dziedziną całkowitości.*

Z tej definicji wynika od razu, że dziedziny całkowitości są to takie niezerowe pierścienie, w których każdy element niezerowy jest regularny. W szczególności na mocy wniosku 1, każde ciało jest dziedziną całkowitości, a nawet każdy podpierścień ciała jest dziedziną całkowi-

tości. Z twierdzenia 4 mamy natychmiast następujący

Wniosek 2. *Jeżeli a jest niezerowym elementem dziedziny całkowitości P oraz $x, y \in P$ są takie, że $ax = ay$, to $x = y$.* □

Rozdział 10

Homomorfizmy i ideały

10.1 Pojęcie ideału pierścienia

Definicja 1. Niepusty podzbiór I pierścienia P nazywamy *ideałem pierścienia* P (oznaczenie: $I \lhd P$), jeżeli

$$\text{(I) } \forall_{i,j\in I}\ i-j \in I \text{ oraz (II) } \forall_{i\in I}\forall_{a\in P}\ a\cdot i \in I.$$

Przykład 1. W dowolnym pierścieniu P zbiór $\{0\}$ jest ideałem (nazywamy go *ideałem zerowym*). Ponadto cały pierścień P jest ideałem P (nazywamy go *ideałem niewłaściwym*). Ideały I pierścienia P takie, że $I \neq P$ nazywamy *ideałami właściwymi.*

Uwaga 1. Niech I będzie ideałem pierścienia P. Wówczas I jest ideałem właściwym wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \notin I$. Rzeczywiście, jeżeli $1 \notin I$, to $I \neq P$, a jeżeli $1 \in I$, to dla każdego $a \in P$, $a = a \cdot 1 \in I$ na mocy (II), skąd $I = P$.

Twierdzenie 1. *Każde ciało K ma dokładnie dwa ideały:* $\{0\}$ *i* K.

Dowód. Niech I będzie niezerowym ideałem ciała K. Wtedy istnieje niezerowe $i \in I$, skąd $1 = i^{-1} \cdot i \in I$. Zatem z uwagi 1, $I = K$. □

Uwaga 2. Z określenia ideału wynika od razu, że każdy ideał I pierścienia P jest podgrupą grupy addytywnej P^+ tego pierścienia. W szczególności $0 \in I$ dla każdego $I \lhd P$. Ponadto jeśli $i_1, \ldots, i_n \in I \lhd P$ oraz $a_1, \ldots, a_n \in P$, to $a_1 \cdot i_1, \ldots, a_n \cdot i_n \in I$, skąd $a_1 \cdot i_1 + \ldots + a_n \cdot i_n \in I$.

Twierdzenie 2. *Część wspólna dowolnej niepustej rodziny* $\{I_t\}_{t \in T}$ *ideałów pierścienia* P *jest ideałem pierścienia* P.

Dowód. Niech $\{I_t\}_{t \in T}$ będzie niepustą rodziną ideałów pierścienia P i niech $I = \bigcap_{t \in T} I_t$. Wtedy $0 \in I_t$ dla $t \in T$, więc $0 \in I$. Dla $i, j \in I$ mamy, że $i, j \in I_t$ dla każdego $t \in T$, więc $i - j \in I_t$ dla $t \in T$, skąd $i - j \in I$. Ponadto dla $a \in P$, $i \in I$ mamy, że $i \in I_t$ dla $t \in T$, więc $ai \in I_t$ dla każdego $t \in T$, skąd $ai \in I$. Zatem $I \lhd P$. □

Uwaga 3. Z twierdzenia 2 wynika, że dla dowolnego podzbioru X pierścienia P istnieje najmniejszy w sensie inkluzji ideał pierścienia P zawierający zbiór X. Nazywamy go *ideałem generowanym* przez zbiór X i oznaczamy przez (X). Natomiast X nazywamy *zbiorem generatorów* ideału I. Np. $(\emptyset) = \{0\}$. Jeśli zbiór X jest skończony oraz $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$, to zamiast $(\{a_1, \ldots, a_n\})$ piszemy $(a_1, \ldots, a_n)$. Jeżeli istnieje $a \in P$ takie, że $I = (a)$, to mówimy, że *ideał* I *jest główny.* Jeżeli istnieją $a_1, \ldots, a_n \in P$ takie, że $I = (a_1, \ldots, a_n)$, to mówimy, że *ideał* I *jest skończenie generowany.*

Twierdzenie 3. *Dla dowolnych elementów* $a_1, \ldots, a_n$ *pierścienia* P *zachodzi wzór:*

$$(a_1, \ldots, a_n) = \{x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n : x_1, \ldots, x_n \in P\}.$$

Dowód. Oznaczmy $J = \{x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n : x_1, \ldots, x_n \in P\}$. Wtedy $x_i = 0 \cdot a_1 + \ldots + 1 \cdot x_i + \ldots + 0 \cdot a_n \in J$ dla $i = 1, \ldots, n$. Zatem $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq J$. Niech $i, j \in J$, $a \in P$. Wtedy istnieją $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in P$ takie, że $i = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$ oraz $j = y_1 a_1 + \ldots + y_n a_n$, więc $i - j = (x_1 - y_1)a_1 + \ldots + (x_n - y_n)a_n \in J$, $ai = (ax_1)a_1 + \ldots + (ax_n)a_n \in J$. Zatem $J \lhd P$ oraz $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq J$. Niech A będzie dowolnym ideałem pierścienia P zawierającym zbiór $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Wtedy z uwagi 2 mamy, że $x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n \in A$ dla dowolnych $x_1, \ldots, x_n \in P$. Zatem $J \subseteq A$, czyli J jest najmniejszym

ideałem pierścienia P zawierającym zbiór $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Zatem $J = (a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

Przykład 2. Z teorii grup wiemy, że wszystkimi podgrupami grupy $\mathbb{Z}^+$ są zbiory wielokrotności ustalonych nieujemnych liczb całkowitych. Na mocy twierdzenia 3 mamy więc stąd, że każdy ideał pierścienia $\mathbb{Z}$ jest główny i wszystkimi ideałami tego pierścienia są ideały postaci (k) dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

Podobnie jest w pierścieniu $\mathbb{Z}_m$, gdyż każda niezerowa podgrupa grupy addytywnej tego pierścienia składa się z całkowitych wielokrotności ustalonych dzielników naturalnych liczby m. Wynika stąd, że wszystkie ideały pierścienia $\mathbb{Z}_m$ są postaci: (d), gdzie $d = 0$ lub $d < m$ jest naturalnym dzielnikiem liczby m. W szczególności każdy ideał pierścienia $\mathbb{Z}_m$ jest główny i ten pierścień posiada tyle ideałów, ile dzielników naturalnych ma liczba m.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $I_1, \ldots, I_n$ są ideałami pierścienia P, to $I_1 + \ldots + I_n \lhd P$.*

Dowód. Z teorii grup mamy

$$I_1 + \ldots + I_n = \{i_1 + \ldots + i_n : i_k \in I_k \text{ dla } k = 1, \ldots, n\}$$

jest podgrupą grupy P^+ zawierającą $I_1 \cup \ldots \cup I_n$. Niech $a \in P$, $i \in I_1 + \ldots + I_n$. Wtedy istnieją $i_k \in I_k$ dla $k = 1, \ldots, n$ takie, że $i = i_1 + \ldots + i_n$, skąd $ai = ai_1 + \ldots + ai_n \in I_1 + \ldots + I_n$, bo $ai_k \in I_k$ dla $k = 1, \ldots, n$. $\square$

10.2 Konstrukcja pierścienia ilorazowego

Niech I będzie ideałem pierścienia P. Wówczas I jest podgrupą grupy P^+, więc można zbudować grupę ilorazową $P/I = \{a + I : a \in P\}$. Wówczas:

$$a + I = \{a + i : i \in I\} \text{ dla } a \in P,$$

$$a + I = b + I \Leftrightarrow a - b \in I \text{ dla } a, b \in P,$$

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I \text{ dla } a,b\in P,$$

$$(P/I,+,I) \text{ tworzy grupę abelową.}$$

W P/I można też określić naturalne mnożenie:

$$(a+I)\cdot(b+I)=ab+I \text{ dla } a,b\in P.$$

Sprawdzimy, czy mnożenie warstw nie zależy od wyboru reprezentantów. W tym celu weźmy dowolne $a_1,a_2,b_1,b_2\in P$ takie, że $a_1+I=a_2+I$ oraz $b_1+I=b_2+I$. Wtedy $i=a_1-a_2\in I$ oraz $j=b_1-b_2\in I$, więc $a_1=a_2+i$, $b_1=b_2+j$, skąd $a_1b_1-a_2b_2=(a_2+i)(b_2+j)-a_2b_2=a_2j+ib_2+ij\in I$, gdyż $I\lhd P$. Zatem $a_1b_1+I=a_2b_2+I$ i mnożenie warstw jest dobrze określone.

Dla $a,b\in P$ mamy, że $(b+I)\cdot(a+I)=ba+I=ab+I=(a+I)\cdot(b+I)$, więc mnożenie warstw jest przemienne.

Dla $a,b,c\in P$ mamy, że $(a+I)\cdot[(b+I)\cdot(c+I)]=(a+I)\cdot(bc+I)=a(bc)+I=(ab)c+I=(ab+I)\cdot(c+I)=[(a+I)\cdot(b+I)]\cdot(c+I)$, więc mnożenie warstw jest łączne. Ponadto $(a+I)\cdot[(b+I)+(c+I)]=(a+I)\cdot[(b+c)+I]=a(b+c)+I=(ab+ac)+I=(ab+I)+(ac+I)=(a+I)\cdot(b+I)+(a+I)\cdot(c+I)$, więc mnożenie warstw jest rozdzielne względem dodawania warstw. Ponadto $(a+I)\cdot(1+I)=a\cdot1+I=a+I$ dla $a\in P$, więc ostatecznie system algebraiczny $(P/I,+,\cdot,I,1+I)$ jest pierścieniem. Nazywamy go *pierścieniem ilorazowym względem ideału* I.

10.3 Ideały: pierwsze i maksymalne

Definicja 2. Właściwy ideał I pierścienia P nazywamy
(i) *ideałem pierwszym* pierścienia P, jeżeli

$$\forall_{a,b\in P}[ab\in I\Rightarrow(a\in I \text{ lub } b\in I)];$$

(ii) *ideałem maksymalnym* pierścienia P, jeżeli

$$\forall_{J\lhd P}[I\subseteq J\Rightarrow(I=J \text{ lub } J=P)].$$

Twierdzenie 5. *Niech I będzie ideałem pierścienia P. Wówczas równoważne są warunki:*

(i) I jest ideałem pierwszym pierścienia P;

(ii) pierścień ilorazowy P/I jest dziedziną całkowitości.

Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii) Z założenia $I \neq P$, więc $1 \notin I$, czyli $1+I \neq 0+I$. Zatem pierścień P/I jest niezerowy. Niech $a, b \in P$ będą takie, że $(a+I)\cdot(b+I) = I$. Wtedy $ab + I = 0 + I$, więc $ab \in I$. Zatem z pierwszości I wynika, że $a \in I$ lub $b \in I$, czyli $a + I = 0 + I = I$ lub $b + I = 0 + I = I$. Zatem P/I jest dziedziną całkowitości.

(ii)$\Rightarrow$(i) Z założenia $1 + I \neq 0 + I$, skąd $1 \notin I$, więc $I \neq P$. Weźmy dowolne $a, b \in P$ takie, że $ab \in I$. Wtedy $ab + I = 0 + I$, skąd $(a + I)\cdot(b + I) = I$. Ale P/I jest dziedziną całkowitości, więc $a + I = I = 0 + I$ lub $b + I = I = 0 + I$, czyli $a \in I$ lub $b \in I$. Zatem I jest ideałem pierwszym pierścienia P. □

Twierdzenie 6. *Niech I będzie ideałem pierścienia P. Wówczas równoważne są warunki:*

(i) I jest ideałem maksymalnym pierścienia P,

(ii) pierścień ilorazowy P/I jest ciałem.

Dowód. (i)$\Rightarrow$(ii) Z założenia $I \neq P$, więc $1 \notin I$, skąd $1 + I \neq$ $\neq 0+I = I$. Weźmy dowolne $a \in P$ takie, że $a+I \neq 0+I$. Wtedy $a \notin I$. Zatem $I \subset I + (a)$, więc z maksymalności I wynika, że $I + (a) = P$. Stąd $1 = i + xa$ dla pewnych $i \in I$ oraz $x \in P$. Zatem $1 - xa = i \in I$, więc $1 + I = xa + I = (x + I)\cdot(a + I)$, czyli $a + I$ jest elementem odwracalnym pierścienia P/I. Zatem P/I jest ciałem.

(ii)$\Rightarrow$(i) Z założenia $1 + I \neq 0 + I$, skąd $1 \notin I$, więc $I \neq P$. Niech $J \lhd P$ oraz $I \subset J$. Wystarczy wykazać, że $J = P$. Ale istnieje $a \in J \setminus I$, więc $a+I \neq 0+I$. Zatem istnieje $x \in P$ taki, że $(a+I)\cdot(x+I) = 1+I$, czyli $ax + I = 1 + I$. Zatem $i = ax - 1 \in I$. Stąd $1 = ax - i \in J$, bo $ax \in J$, $i \in I \subset J$. Zatem $1 \in J$, skąd $J = P$. □

Ponieważ każde ciało jest dziedziną całkowitości, więc z twierdzeń 5 i 6 mamy od razu następujący

Wniosek 1. *Każdy ideał maksymalny pierścienia P jest ideałem pierwszym pierścienia P.* □

Uwaga 4. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, bo np. $\{0\}$ jest ideałem pierwszym pierścienia $\mathbb{Z}$, ale $\{0\} \subset (2) \subset \mathbb{Z}$, więc $\{0\}$ nie jest ideałem maksymalnym pierścienia $\mathbb{Z}$.

Można wykazać, że w pierścieniu $P = \mathbb{Z}[x]$ ideał (x) jest pierwszy, ale $(x) \subset (x, 2) \subset P$, więc ideał (x) nie jest maksymalny w pierścieniu P.

10.4 Homomorfizmy pierścieni

Definicja 3. Niech A, B będą pierścieniami. Przekształcenie $f : A \longrightarrow B$ spełniające warunki:

(I) $f(1) = 1$,

(II) $\forall_{a,b \in A}\ f(a + b) = f(a) + f(b)$,

(III) $\forall_{a,b \in A}\ f(ab) = f(a)f(b)$

nazywamy *homomorfizmem* pierścienia A w pierścień B. Natomiast zbiór $Ker(f) = \{x \in A : f(x) = 0\}$ nazywamy *jądrem homomorfizmu* f.

Przy powyższych oznaczeniach mamy następujące własności homomorfizmu f:

1. $Ker(f) \lhd A$.

Dowód. Ponieważ f jest homomorfizmem grupy A^+ w grupę B^+, więc z teorii grup wynika, że $Ker(f)$ jest podgrupą grupy A^+. Ponadto dla $i \in Ker(f)$, $a \in A$ jest $f(i) = 0$, więc $f(ai) = f(a)f(i) = f(a) \cdot 0 = 0$, skąd $ai \in Ker(f)$ i $Ker(f) \lhd A$. □

2. *Jeżeli P jest podpierścieniem pierścienia A, to $f(P)$ jest podpierścieniem pierścienia B.*

Dowód. Ponieważ P jest podgrupą grupy A^+ i f jest homomorfizmem grup addytywnych, więc z teorii grup $f(P)$ jest podgrupą grupy B^+. Ale $1 = f(1) \in f(P)$ oraz dla $x, y \in f(P)$ istnieją $a, b \in P$ takie, że $x = f(a)$, $y = f(b)$, więc $xy = f(a)f(b) = f(ab) \in f(P)$, bo $ab \in P$. Zatem $f(P)$ jest podpierścieniem pierścienia B. □

3. *Jeżeli S jest podpierścieniem pierścienia B, to $f^{-1}(S)$ jest podpierścieniem pierścienia A.*

Dowód. Ponieważ S jest podgrupą grupy B^+ i f jest homomorfizmem grup addytywnych, więc z teorii grup mamy, że $f^{-1}(S)$ jest podgrupą grupy A^+. Dalej, $f(1) = 1 \in S$, więc $1 \in f^{-1}(S)$. Ponadto dla $a, b \in f^{-1}(S)$ mamy, że $f(a), f(b) \in S$, skąd $f(ab) = f(a)f(b) \in S$, czyli $ab \in f^{-1}(S)$. Zatem $f^{-1}(S)$ jest podpierścieniem pierścienia A. □

4. *Homomorfizm f jest różnowartościowy* $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$.

Dowód. Ponieważ f jest homomorfizmem grup addytywnych, więc teza wynika z teorii grup. □

5. $f(a_1 a_2 \ldots a_n) = f(a_1)f(a_2)\ldots f(a_n)$ *dla dowolnych* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Dowód. Prosta indukcja względem n. □

Definicja 4. Powiemy, że homomorfizm f pierścienia A w pierścień B jest *izomorfizmem pierścieni*, jeżeli f jest bijekcją. Powiemy, że pierścień A jest izomorficzny z pierścieniem B i piszemy $A \cong B$, jeżeli istnieje izomorfizm pierścieni $f : A \longrightarrow B$.

W algebrze utożsamia się pierścienie izomorficzne. Można łatwo pokazać, że jeżeli pierścienie A i B są izomorficzne, to np.

$|A| = |B|$;

A jest ciałem $\Leftrightarrow$ B jest ciałem;

A jest dziedziną całkowitości $\Leftrightarrow$ B jest dziedziną całkowitości.

Twierdzenie 7 (o izomorfizmie). *Jeżeli $f : A \longrightarrow B$ jest homomorfizmem pierścienia A na pierścień B, to*

$$B \cong A/Ker(f).$$

Dowód. Niech $F : A/Ker(f) \longrightarrow B$ będzie dane wzorem $F(a + Ker(f)) = f(a)$ dla $a \in A$. Wtedy z teorii grup wiadomo, że F jest bijekcją i dla $a, b \in A$: $F((a + Ker(f)) + (b + Ker(f))) = F(a+Ker(f))+F(b+Ker(f))$. Ponadto $F(1+Ker(f)) = f(1) = 1$ oraz dla $a, b \in A$: $F((a+Ker(f))\cdot(b+Ker(f))) = F(ab+Ker(f)) = f(ab) = f(a)f(b) = F(a + Ker(f))F(b + Ker(f))$, więc ostatecznie F jest izomorfizmem pierścieni. □

Wniosek 2. *Jeżeli $f : A \longrightarrow B$ jest homomorfizmem pierścienia A w pierścień B, to*

$$f(A) \cong A/Ker(f).$$

Wniosek 3. *Niech $f : A \longrightarrow B$ będzie homomorfizmem pierścienia A na pierścień B. Wówczas:*

(i) $Ker(f)$ jest ideałem pierwszym pierścienia $A \Leftrightarrow B$ jest dziedziną całkowitości;

(ii) $Ker(f)$ jest ideałem maksymalnym pierścienia $A \Leftrightarrow B$ jest ciałem.

Dowód. Z twierdzenia o izomorfizmie mamy, że $B \cong A/Ker(f)$. Zatem z twierdzeń 5 i 6:

(i) B jest dziedziną całkowitości $\Leftrightarrow A/Ker(f)$ jest dziedziną całkowitości $\Leftrightarrow Ker(f)$ jest ideałem pierwszym pierścienia A;

(ii) B jest ciałem $\Leftrightarrow A/Ker(f)$ jest ciałem $\Leftrightarrow Ker(f)$ jest ideałem maksymalnym pierścienia A. □

Przykład 3. Niech $f : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}$ będzie takie, że $f(w) = w(0)$ dla $w \in \mathbb{Z}[x]$. Łatwo sprawdzić, że wówczas f jest homomorfizmem pierścienia $\mathbb{Z}[x]$ na pierścień $\mathbb{Z}$. Ponieważ $\mathbb{Z}$ jest dziedziną całkowitości, ale nie jest ciałem, więc z wniosku 3 mamy, że $Ker(f)$ jest ideałem pierwszym, ale nie jest ideałem maksymalnym pierścienia $\mathbb{Z}[x]$. Z twierdzenia Bezout wynika ponadto, że $Ker(f) = (x)$.

Przykład 4. Niech $m > 1$ będzie liczbą naturalną i niech $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m$ będzie funkcją daną wzorem:

$$f(k) = [k]_m \text{ dla } k \in \mathbb{Z}.$$

Wtedy dla $a \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mamy, że $f(a) = a$, więc f jest „na" oraz $f(1) = 1$. Ponadto dla $k, l \in \mathbb{Z}$ mamy

$$f(k+l) = [k+l]_m \equiv k + l \equiv [k]_m + [l]_m \equiv [k]_m \oplus_m [l]_m \pmod{m},$$

skąd $f(k+l) = f(k) \oplus_m f(l)$ i podobnie $f(kl) = f(k) \odot_m f(l)$. Zatem f jest homomorfizmem pierścienia $\mathbb{Z}$ na pierścień $\mathbb{Z}_m$. Ponadto

$$Ker(f) = \{k \in \mathbb{Z} : [k]_m = 0\} = \{k \in \mathbb{Z} : m \mid k\} = (m).$$

Zatem z twierdzenia o izomorfizmie mamy

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}/(m).$$

Ponadto pierścień $\mathbb{Z}_m$ jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy m jest liczbą pierwszą. Zatem z wniosku 3 wynika, że (m) jest ideałem maksymalnym pierścienia $\mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy, gdy m jest liczbą pierwszą.

Rozdział 11

Pierścienie wielomianów

11.1 Konstrukcja pierścienia wielomianów

Niech P będzie dowolnym niezerowym pierścieniem. Oznaczmy przez $P[x]$ zbiór wszystkich nieskończonych ciągów

$$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \tag{11.1}$$

takich, że $f_i \in P$ dla $i = 0, 1, \ldots$ oraz istnieje k takie, że $0 = f_k = f_{k+1} = f_{k+2} = \ldots$

Elementy zbioru $P[x]$ nazywamy *wielomianami* zmiennej x o współczynnikach z pierścienia P. Przyjmujemy umowę, że jeśli wielomian nazywa się g, to $g = (g_0, g_1, \ldots)$, czyli $g_0, g_1, \ldots$ są jego kolejnymi współczynnikami. Przy tych oznaczeniach dla wielomianów $f, g \in P[x]$ mamy

$$f = g \Leftrightarrow f_i = g_i \text{ dla każdego } i = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.2}$$

Wielomian $0 = (0, 0, \ldots)$ nazywamy *zerowym*, zaś $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ nazywamy *jedynkowym*. Jeżeli $0 = f_1 = f_2 = \ldots$ to wielomian f nazywamy *stałym*. *Wyrazem wolnym* wielomianu f postaci (11.1) jest współczynnik f_0. Jeżeli $f \neq 0$, to istnieje największe n takie, że $f_n \neq 0$ i wówczas n nazywamy *stopniem wielomianu* f i piszemy $st(f) = n$, zaś f_n nazywamy *najstarszym współczynnikiem* tego wielomianu. Ponadto przyjmujemy, że $st(0) = -\infty$ oraz $-\infty < n$ dla $n = 0, 1, \ldots$ i $(-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ dla $n = 0, 1, \ldots$

Jeżeli $f, g \in P[x]$, to istnieją $k, l \in \mathbb{N}_0$ takie, że $f_j = 0$ dla wszystkich $j > k$ oraz $g_j = 0$ dla wszystkich $j > l$. Zatem dla wszystkich $j > \max\{k, l\}$ jest $f_j + g_j = 0$, skąd wynika, że $(f_0 + g_0, f_1 + g_1, \ldots) \in P[x]$. Możemy więc zdefiniować w naturalny sposób *sumę wielomianów* $f, g \in P[x]$ jako wielomian $f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, \ldots)$. Wówczas z naszych rozważań mamy, że dla dowolnych wielomianów $f, g \in P[x]$:

$$st(f + g) \leqslant \max\{st(f), st(g)\}. \tag{11.3}$$

Jeżeli zaś $st(f) < st(g)$, to oczywiście $st(f + g) = st(g)$.

Z określenia dodawania wielomianów łatwo wynika, że system algebraiczny $(P[x], +, 0)$ jest grupą abelową, przy czym *wielomianem przeciwnym* do wielomianu f jest wielomian $-f = (-f_0, -f_1, \ldots)$.

Iloczynem wielomianów $f, g \in P[x]$ nazywamy ciąg

$$f \cdot g = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0, \ldots). \tag{11.4}$$

Zatem dla każdego $n = 0, 1, \ldots$

$$(f \cdot g)_n = \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = \sum_{i+j=n} f_i g_j. \tag{11.5}$$

Zauważmy, że $f \cdot g \in P[x]$. Rzeczywiście, istnieją $k, l \in \mathbb{N}_0$ takie, że $f_i = 0$ dla wszystkich $i > k$ oraz $g_j = 0$ dla wszystkich $j > l$. Weźmy dowolne $n > k+l$ oraz $i, j \in \mathbb{N}_0$ takie, że $i+j = n$. Jeśli $i > k$, to $f_i = 0$, więc $f_i g_j = 0$; jeśli zaś $i \leqslant k$, to $j = n - i \geqslant n - k > k + l - k = l$, więc $g_j = 0$, czyli $f_i g_j = 0$. Stąd dla $n > k + l$ jest $(f \cdot g)_n = \sum_{i+j=n} f_i g_j = 0$ i $f \cdot g \in P[x]$.

Jeżeli $f_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots$ to ze wzoru (11.5) mamy

$$(f_0, 0, 0, \ldots) \cdot (g_0, g_1, \ldots) = (f_0 g_0, f_0 g_1, f_0 g_2, \ldots). \tag{11.6}$$

Jeżeli zaś $f_1 = 1$ oraz $f_i = 0$ dla $i = 0, 2, 3, \ldots$ to ze wzoru (11.5) wynika, że

$$(0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (g_0, g_1, \ldots) = (0, g_0, g_1, \ldots). \tag{11.7}$$

Niech teraz $f, g \in P[x] \setminus \{0\}$ i $n = st(f)$, $m = st(g)$. Wtedy z wcześniejszych wyliczeń mamy, że $(f \cdot g)_k = 0$ dla wszystkich $k > n + m$. Stąd i z (11.6) mamy

$$\forall_{f,g \in P[x]}\ st(f \cdot g) \leqslant st(f) + st(g). \tag{11.8}$$

Stwierdzenie 1. *Niech $f, g \in P[x] \setminus \{0\}$ będą takie, że najstarszy współczynnik wielomianu f lub najstarszy współczynnik wielomianu g jest elementem regularnym pierścienia P. Wtedy $st(f \cdot g) = st(f) + st(g)$ oraz najstarszy współczynnik wielomianu $f \cdot g$ jest iloczynem najstarszych współczynników wielomianów f i g.*

Dowód. Oznaczmy $n = st(f)$, $m = st(g)$. Weźmy dowolne $i, j \in \mathbb{N}_0$ takie, że $i + j = n + m$. Jeśli $i < n$, to $j = n + m - i > m$, skąd $g_j = 0$ oraz $f_i g_j = 0$. Jeśli $i > n$, to $f_i = 0$, więc $f_i g_j = 0$. Zatem ze wzoru (11.5) mamy, że $(f \cdot g)_{n+m} = f_n g_m \neq 0$, bo $f_n \neq 0$, $g_m \neq 0$ oraz f_n lub g_m jest elementem regularnym. Stąd ze wzoru (11.8) wynika teza naszego stwierdzenia. □

Wniosek 1. *Jeżeli P jest dziedziną całkowitości, to dla dowolnych $f, g \in P[x]$*

$$st(f \cdot g) = st(f) + st(g). \ \square$$

Ze wzorów (11.4) i (11.5) wynika od razu, że mnożenie wielomianów jest przemienne. Natomiast ze wzoru (11.6) wynika od razu, że $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ jest elementem neutralnym mnożenia wielomianów.

Teraz udowodnimy, że mnożenie wielomianów jest rozdzielne względem ich dodawania oraz mnożenie wielomianów jest łączne. W tym celu weźmy dowolne $f, g, h \in P[x]$. Wtedy dla $n \in \mathbb{N}_0$ mamy

$$(f \cdot (g + h))_n = \sum_{i+j=n} f_i (g + h)_j = \sum_{i+j=n} f_i (g_j + h_j) =$$

$$= \sum_{i+j=n} (f_i g_j + f_i h_j) = \sum_{i+j=n} f_i g_j + \sum_{i+j=n} f_i h_j = (f \cdot g)_n + (f \cdot h)_n,$$

skąd $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$.

Ponadto $((f \cdot g) \cdot h)_n = \sum_{i+j=n} (f \cdot g)_i h_j = \sum_{i+j=n} \sum_{s+t=i} (f_s g_t) h_j =$
$= \sum_{s+t+j=n} (f_s g_t) h_j = \sum_{s+t+j=n} f_s (g_t h_j)$ oraz $(f \cdot (g \cdot h))_n = \sum_{s+k=n} f_s (g \cdot h)_k =$
$= \sum_{s+k=n} \sum_{t+j=k} f_s (g_t h_j) = \sum_{s+t+j=n} f_s (g_t h_j)$, więc $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.

W ten sposób udowodniliśmy następujące

Twierdzenie 1. *System algebraiczny* $(P[x], +, \cdot, 0, 1)$ *tworzy pierścień.*

Ten pierścień nazywamy *pierścieniem wielomianów zmiennej* x o współczynnikach z pierścienia P.

Ze wzorów (11.3) i (11.6) wynika od razu, że przekształcenie $\phi : P \longrightarrow P[x]$ dane wzorem

$$\phi(a) = (a, 0, 0, \ldots) \tag{11.9}$$

jest różnowartościowym homomorfizmem pierścieni. Z tego powodu można dokonać utożsamienia

$$(a, 0, 0, \ldots) \equiv a \quad \text{dla} \quad a \in P. \tag{11.10}$$

Przy takim utożsamieniu P jest podpierścieniem pierścienia $P[x]$.

Wprowadźmy teraz oznaczenie:

$$x = (0, 1, 0, 0, \ldots). \tag{11.11}$$

Wówczas ze wzoru (11.7) przez prostą indukcję uzyskamy, że

$$x^n = (0, 0, \ldots, 0, \overset{n}{1}, 0, \ldots) \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{11.12}$$

Niech $f \in P[x]$ będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 1$. Wtedy $f_n \neq 0$ oraz $f_i = 0$ dla każdego $i \geqslant n+1$. Ponadto ze wzorów (11.6) i (11.12) mamy, że $(f_k, 0, 0, \ldots) \cdot x^k = (0, \ldots, 0, \overset{k}{f_k}, 0, \ldots)$ dla $k = 1, 2, \ldots$ więc $f = (f_0, 0, 0, \ldots) + (0, f_1, 0, \ldots) + \ldots + (0, 0, \ldots, f_n, 0, \ldots) \equiv f_0 + f_1 x +$

$+f_2x^2+\ldots+f_nx^n$. Ponieważ dla wielomianu stałego f jest $f \equiv f_0$, więc dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ stopnia $n \geqslant 0$ mamy utożsamienie:

$$f \equiv f_0 + f_1x + f_2x^2 + \ldots + f_nx^n. \tag{11.13}$$

Otrzymujemy w ten sposób naturalną notację dla wielomianów z pierścienia $P[x]$. Przy tej notacji możemy powiedzieć, że wielomiany $f, g \in \in P[x]$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $st(f) = st(g)$ oraz $f_i = g_i$ dla każdego i.

Z wniosku 1 i tego, że pierścień P jest podpierścieniem pierścienia $P[x]$ wynika od razu następujące

Twierdzenie 2. *Jeżeli pierścień P jest dziedziną całkowitości, to $P[x]$ też jest dziedziną całkowitości.*

Ponieważ podpierścień dziedziny całkowitości jest dziedziną całkowitości, więc zachodzi następujące

Twierdzenie 3. *Jeżeli pierścień $P[x]$ jest dziedziną całkowitości, to P też jest dziedziną całkowitości.*

Twierdzenie 4. *Jeżeli P jest dziedziną całkowitości, to $(P[x])^* = P^*$.*

Dowód. Niech $f \in (P[x])^*$. Wtedy istnieje $g \in P[x]$ takie, że $f \cdot g = 1$, skąd z wniosku 1 mamy, że $st(f) + st(g) = 0$, więc $st(f) = = st(g) = 0$. Zatem $f, g \in P$ i $f \cdot g = 1$, czyli $f \in P^*$. Jeżeli zaś $f \in P^*$, to istnieje $g \in P$ takie, że $f \cdot g = 1$, skąd $f \in (P[x])^*$. □

Wniosek 2. *Pierścień $P[x]$ nigdy nie jest ciałem.*

Dowód. Załóżmy, że dla pewnego pierścienia P pierścień $P[x]$ jest ciałem. Wtedy P jako podpierścień $P[x]$ jest dziedziną całkowitości, więc na mocy twierdzenia 4, $(P[x])^* \subseteq P$. Ale $P[x]$ jest ciałem, więc stąd $x \in P$ i mamy sprzeczność. □

Przykład 1. Załóżmy, że w pierścieniu P istnieje niezerowy element a taki, że $a^2 = 0$. Wtedy w pierścieniu $P[x]$ dla każdego $n = = 1, 2, \ldots$ mamy, że $(1 + ax^n) \cdot (1 - ax^n) = 1 - a^2x^{2n} = 1 - 0 \cdot x^{2n} = 1$. Zatem w pierścieniu $P[x]$ istnieją wielomiany odwracalne dowolnego

stopnia $n \geqslant 1$. Oznacza to, że dla takich pierścieni P twierdzenie 4 nie jest prawdziwe. Przykładem takiego pierścienia P jest $\mathbb{Z}_4$.

Definicja 1. *Wartością wielomianu* $f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n \in P[x]$ w punkcie $a \in P$ nazywamy $f(a) = f_0 + f_1 a + \ldots + f_n a^n$.

Definicja 2. *Pierwiastkiem wielomianu* $f \in P[x]$ nazywamy takie $a \in P$, że $f(a) = 0$.

Definicja 3. Wielomiany $f, g \in P[x]$ nazywamy *równymi funkcyjnie*, jeżeli

$$f(a) = g(a) \text{ dla każdego } a \in P.$$

Przykład 2. Niech P będzie niezerowym pierścieniem skończonym o n elementach oraz $P = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Ponieważ $0 \neq 1$ w P, więc 1 jest elementem regularnym w P i na mocy stwierdzenia 1 mamy, że wielomian $f = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \in P[x]$ ma stopień n. Ponadto $f(a) = 0$ dla każdego $a \in P$, więc wielomiany f i 0 są równe funkcyjnie, chociaż $f \neq 0$. Z tego powodu wielomiany nad dowolnym pierścieniem P nie mogą być traktowane jako funkcje wielomianowe z pierścienia P w pierścień P.

11.2 Homomorfizmy na pierścieniach wielomianów

Twierdzenie 5. *Niech* $f : P \longrightarrow A$ *będzie homomorfizmem pierścienia* P *w pierścień* A *i niech* $a \in A$. *Wtedy przekształcenie* $F : P[x] \longrightarrow A$ *dane wzorem*

$$F((w_0, w_1, \ldots)) = f(w_0) + f(w_1)a + f(w_2)a^2 + \ldots \tag{11.14}$$

jest homomorfizmem pierścienia $P[x]$ *w pierścień* A *oraz* $(Ker(f)) \subseteq Ker(F)$. *Jeżeli dodatkowo* f *jest „na", to* F *też jest „na".*

Dowód. Ponieważ istnieje n takie, że $w_i = 0$ dla wszystkich $i > n$, więc $f(w_i) = 0$ dla $i > n$ i wzór (11.14) ma sens. Ze wzoru (11.14)

mamy, że $F(1)=F((1,0,0,\ldots))=f(1)+f(0)a+f(0)a^2+\ldots=f(1)=1$ oraz $F(w+u)=F(w)+F(u)$ dla dowolnych $w,u\in P[x]$. Ponadto dla $w,u\in P[x]$ mamy, że $(w\cdot u)_n=\sum_{i+j=n} w_iu_j$ dla $n=0,1,\ldots$ oraz istnieje m takie, że dla wszystkich $k>m$ jest $(w\cdot u)_k=0$, skąd $f((w\cdot u)_k)=0$ dla $k>m$. Ponadto

$$F(w\cdot u)=f(w_0u_0)+f(w_0u_1+w_1u_0)a+\ldots+f(\sum_{i+j=n} w_iu_j)a^n+\ldots=$$
$$=f(w_0)f(u_0)+[f(w_0)f(u_1)+f(w_1)f(u_0)]a+\ldots+\sum_{i+j=n} f(w_i)f(u_j)a^n+\ldots$$

oraz

$$F(w)\cdot F(u)=[f(w_0)+f(w_1)a+\ldots]\cdot[f(u_0)+f(u_1)a+\ldots]=$$
$$=f(w_0)f(u_0)+[f(w_0)f(u_1)+f(w_1)f(u_0)]a+\ldots+$$
$$+[f(w_0)f(u_n)+f(w_1)f(u_{n-1})+\ldots+f(w_n)f(u_0)]a^n+\ldots$$

więc $F(w\cdot u)=F(w)\cdot F(u)$ dla dowolnych $w,u\in P[x]$. Zatem F jest homomorfizmem pierścieni. Jeżeli $b\in Ker(f)$, to $f(b)=0$, więc dla $w\in P[x]$ jest $F(b\cdot w)=F(b)\cdot F(w)=f(b)\cdot F(w)=0\cdot F(w)=0$, skąd $b\cdot w\in Ker(F)$. Zatem $(Ker(f))\subseteq Ker(F)$. Jeżeli f jest „na"i $y\in A$, to istnieje $b\in P$ takie, że $f(b)=y$, skąd $F(b)=F((b,0,0,\ldots))=$ $=f(b)+0\cdot a+\ldots=y$, więc F jest „na". □

Twierdzenie 6. *Niech a będzie ustalonym elementem pierścienia P. Wtedy przekształcenie $F:P[x]\longrightarrow P$ dane wzorem $F(w)=w(a)$ dla $w\in P[x]$ jest homomorfizmem pierścienia $P[x]$ na pierścień P o jądrze $(x-a)$. W szczególności*

$$P[x]/(x-a)\cong P.$$

Dowód. Przekształcenie $f: P\longrightarrow P$ dane wzorem $f(p)=p$ dla $p\in P$ jest homomorfizmem pierścienia P „na"pierścień P. Zatem na mocy twierdzenia 5 mamy, że F jest homomorfizmem pierścienia $P[x]$ „na"pierścień P. Zatem z twierdzenia o izomorfizmie $P[x]/Ker(F)\cong P$. Ponadto $F(x-a)=a-a=0$, więc $x-a\in$ $\in Ker(F)$, skąd $(x-a)\subseteq Ker(F)$. Niech teraz $w\in Ker(F)$. Wtedy $w=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ dla pewnych $a_0,a_1,\ldots,a_n\in P$ oraz $a_0+a_1a+\ldots+a_na^n=0$. Stąd

$$w = (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) - (a_0 + a_1a + \ldots + a_na^n) =$$
$$= a_1(x - a) + a_2(x^2 - a^2) + \ldots + a_n(x^n - a^n).$$

Ale $x^k - a^k = (x - a)(x^{k-1} + x^{k-2}a + \ldots + xa^{k-2} + a^{k-1})$ dla $k = 1, \ldots, n$, skąd wynika, że $w \in (x - a)$. Zatem $Ker(F) = (x - a)$ oraz $P[x]/(x - a) \cong P$. □

Twierdzenie 7. *Niech $f : A \longrightarrow B$ będzie homomorfizmem pierścienia A w pierścień B. Wówczas przekształcenie $F : A[x] \longrightarrow B[x]$ dane wzorem*

$$F(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) = f(a_0) + f(a_1)x + \ldots + f(a_n)x^n \quad (11.15)$$

dla $a_0, \ldots, a_n \in A$, $n = 0, 1, \ldots$ jest homomorfizmem pierścienia $A[x]$ w pierścień $B[x]$. Ponadto $Ker(F) = (Ker(f))$ oraz jeżeli f jest „na", to F też jest „na".

Dowód. Ponieważ B jest podpierścieniem pierścienia $B[x]$, więc f jest homomorfizmem pierścienia A w pierścień $B[x]$. Podstawiając $a = x$ w twierdzeniu 5 uzyskamy, że przekształcenie F dane wzorem (11.15) jest homomorfizmem pierścienia $A[x]$ w pierścień $B[x]$ oraz $(Ker(f)) \subseteq Ker(F)$. Niech $w \in Ker(F)$. Wtedy istnieją $a_0, \ldots, a_n \in A$ takie, że $w = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ oraz $f(a_0) + f(a_1)x + \ldots + f(a_n)x^n = 0$ oraz $f(a_i) \in B$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, skąd $f(a_i) = 0$, czyli $a_i \in Ker(f)$ dla $i = 0, \ldots, n$. Zatem $w \in (Ker(f))$. Stąd $Ker(F) = (Ker(f))$. Załóżmy, że f jest „na"i weźmy dowolne $b_0, \ldots, b_n \in B$. Wtedy istnieją $a_0, \ldots, a_n \in A$ takie, że $b_i = f(a_i)$ dla $i = 0, \ldots, n$, skąd $b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n = F(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)$, czyli F jest „na". □

Rozdział 12

Ważne pierścienie

12.1 Dzielenie wielomianów

Definicja 1. Niech P będzie pierścieniem, który może nie być dziedziną całkowitości. Powiemy, że w pierścieniu $P[x]$ jest wykonalne dzielenie z resztą przez wielomian $f \in P[x]$, jeżeli dla każdego wielomianu $g \in P[x]$ istnieje dokładnie jedna para (q, r) wielomianów $q, r \in P[x]$ taka, że $g = q \cdot f + r$ oraz $st(r) < st(f)$.

Uwaga 1. Ponieważ $st(0) = -\infty$, więc dla powyższych f jest $f \neq 0$.

Uwaga 2. Wielomian r nazywamy *resztą*, zaś q nazywamy *niepełnym ilorazem* z dzielenia wielomianu g przez wielomian f.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego pierścienia P i dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ równoważne są warunki:*

(i) w pierścieniu $P[x]$ jest wykonalne dzielenie z resztą przez wielomian f;

(ii) najstarszy współczynnik wielomianu f jest elementem odwracalnym w P.

Dowód. Niech $st(f) = n$ i niech a będzie najstarszym współczynnikiem wielomianu f.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Załóżmy, że w pierścieniu $P[x]$ jest wykonalne dzielenie

z resztą przez wielomian f. Jeżeli a jest dzielnikiem zera w pierścieniu P, to istnieje $0 \neq b \in P$ takie, że $b \cdot a = 0$. Wtedy $st(bf) < n$ oraz $bf = b \cdot f + 0 = 0 \cdot f + bf$ i $(b, 0) \neq (0, bf)$ oraz $st(0) < n$, więc mamy sprzeczność. Zatem a jest elementem regularnym w pierścieniu P. Z założenia istnieją wielomiany $q, r \in P[x]$ takie, że $x^n = q \cdot f + r$ oraz $st(r) < n$. Stąd $q \neq 0$ i ze stwierdzenia 1 z rozdziału 11 mamy, że $st(q \cdot f) = st(q) + st(f) = st(q) + n > st(r)$, więc $n = st(q) + n$, czyli $st(q) = 0$. Zatem $q \in P$ i $q \neq 0$ oraz ze stwierdzenia 1 z rozdziału 11 najstarszym współczynnikiem wielomianu $q \cdot f + r$ jest qa, więc $qa = 1$, skąd $a \in P^*$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Załóżmy, że $a \in P^*$. Wtedy istnieje $b \in P$ takie, że $ab = 1$ i a jest elementem regularnym w pierścieniu P. Niech $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \in P[x]$ będą takie, że $st(r_1), st(r_2) < n$ oraz $q_1 \cdot f + r_1 = q_2 \cdot f + r_2$. Wtedy $(q_1 - q_2) \cdot f = r_2 - r_1$. Ale ze stwierdzenia 1 z rozdziału 11 jest $st((q_1 - q_2) \cdot f) = st(q_1 - q_2) + st(f) = st(q_1 - q_2) + n$ oraz $st(r_2 - r_1) < n$, więc stąd $st(q_1 - q_2) = -\infty$, czyli $q_1 - q_2 = 0$. Zatem $r_2 - r_1 = 0$ oraz $r_2 = r_1$ i $q_2 = q_1$, a więc $(q_2, r_2) = (q_1, r_1)$. W ten sposób wykazaliśmy jednoznaczność reszty i niepełnego ilorazu.

Załóżmy teraz, że pewien wielomian z $P[x]$ nie jest podzielny z resztą przez wielomian f. Wtedy istnieje wielomian $g \in P[x]$ najniższego stopnia m niepodzielny z resztą przez wielomian f. Jeżeli $m < n$, to $g = 0 \cdot f + g$ i mamy sprzeczność. Zatem $m \geqslant n$. Niech c będzie najstarszym współczynnikiem wielomianu g i niech $h = g - cbx^{m-n} f$. Ponieważ ze stwierdzenia 1 z rozdziału 11 jest $st(cbx^{m-n} f) = m - -n + n = m$ i najstarszy współczynnik wielomianu $cbx^{m-n} f$ jest równy $cba = c \cdot 1 = c$, więc $st(h) < m$. Z minimalności m wynika, że istnieją wielomiany $q_1, r \in P[x]$ takie, że $h = q_1 \cdot f + r$ i $st(r) < n$, skąd $g = (cbx^{m-n} + q_1) \cdot f + r$. Zatem mamy sprzeczność. □

Uwaga 3. Algorytm dzielenia wielomianów z resztą znany ze szkoły średniej jest dobry dla dowolnego pierścienia wielomianów.

Uwaga 4. Wielomian $f \in P[x]$ o najstarszym współczynniku równym 1 nazywamy *wielomianem unormowanym*. Ponieważ $1 \in P^*$, więc z twierdzenia 1 w pierścieniu $P[x]$ jest wykonalne dzielenie z resztą przez wielomiany unormowane.

Twierdzenie 2. (Bezout). *Dla dowolnego wielomianu $g \in P[x]$ i dla dowolnego $a \in P$ reszta z dzielenia wielomianu g przez dwumian $x - a$ jest równa $g(a)$, tzn. istnieje wielomian $q \in P[x]$ taki, że $g = q \cdot (x - a) + g(a)$.*

Dowód. Z uwagi 4 istnieją $q, r \in P[x]$ takie, że $g = q \cdot (x - a) + r$ i $st(r) < 1 = st(x - a)$. Stąd $r \in P$ i $g(a) = q(a) \cdot (a - a) + r = r$, czyli $r = g(a)$ i $g = q \cdot (x - a) + g(a)$. □

Definicja 2. Niech $f, g \in P[x]$. Powiemy, że wielomian f dzieli wielomian g w pierścieniu $P[x]$ i piszemy $f \mid g$, jeżeli istnieje wielomian $h \in P[x]$ taki, że $g = f \cdot h$.

Wniosek 1. *Dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ i dla dowolnego $a \in P$ mamy*

$$x - a \mid g \text{ w pierścieniu } P[x] \Leftrightarrow g(a) = 0.$$

Dowód. Jeżeli $x - a \mid g$ w pierścieniu $P[x]$, to istnieje $q \in P[x]$ takie, że $g = q \cdot (x - a)$, skąd $g(a) = q(a) \cdot (a - a) = 0$. Na odwrót, niech $g(a) = 0$. Wtedy z twierdzenia Bezout istnieje $q \in P[x]$ takie, że $g = q \cdot (x - a)$, czyli $x - a \mid g$. □

Stwierdzenie 1. *Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą parami różnymi elementami dziedziny całkowitości P. Wówczas dla dowolnego wielomianu $f \in P[x]$ równoważne są warunki:*

(i) $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \mid f$ w pierścieniu $P[x]$;

(ii) $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = 0$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii) Z założenia istnieje $h \in P[x]$ taki, że

$$f = h \cdot (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n),$$

skąd $f(a_i) = h(a_i) \cdot (a_i - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_i - a_i) \cdot \ldots \cdot (a_i - a_n) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Stosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ teza wynika od razu z wniosku 1. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n i niech $a_1, \ldots, a_{n+1}$ będą parami różnymi elementami pierścienia P takimi, że $f(a_1) = \ldots = f(a_{n+1}) = 0$. Wtedy z założenia indukcyjnego istnieje $g \in P[x]$ takie, że $f = g \cdot (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$. Ale

$0 = f(a_{n+1}) = g(a_{n+1}) \cdot (a_{n+1} - a_1) \cdot \ldots \cdot (a_{n+1} - a_n)$, więc ponieważ P jest dziedziną całkowitości, to $g(a_{n+1}) = 0$ i z wniosku 1 istnieje $h \in P[x]$ taki, że $g = h \cdot (x - a_{n+1})$. Zatem $f = (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) \cdot (x - a_{n+1})$, czyli $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n+1}) \mid f$. □

Ze stwierdzenia 1 i ze stwierdzenia 1 z rozdziału 11 otrzymujemy natychmiast następujący

Wniosek 2. *Niech P będzie dziedziną całkowitości i niech $n \in \mathbb{N}$. Wówczas każdy wielomian $f \in P[x]$ stopnia n posiada co najwyżej n różnych pierwiastków w pierścieniu P.* □

Wniosek 3. *Niech P będzie nieskończoną dziedziną całkowitości. Wówczas wielomiany $f, g \in P[x]$ równe funkcyjnie są równe.*

Dowód. Z założenia $f(a) = g(a)$ dla każdego $a \in P$, więc $(f - g)(a) = 0$ dla każdego $a \in P$. Stąd wielomian $f - g$ ma nieskończenie wiele pierwiastków w pierścieniu P. Zatem z wniosku 2, $f - g = 0$, czyli $f = g$. □

Stwierdzenie 2. *Niech A będzie podciałem ciała K. Wówczas dla dowolnych wielomianów $f, g \in A[x]$ z tego, że $f \mid g$ w pierścieniu $K[x]$ wynika, że $f \mid g$ w pierścieniu $A[x]$.*

Dowód. Z założenia istnieje $h \in K[x]$ takie, że $g = h \cdot f$ i z twierdzenia 1 istnieją $q, r \in A[x]$ takie, że $g = q \cdot f + r$ i $st(r) < st(f)$. Zatem w pierścieniu $K[x]$ jest $h \cdot f + 0 = q \cdot f + r$, więc z twierdzenia 1, $r = 0$ i $h = q$. Stąd $g = q \cdot f$ i $f \mid g$ w pierścieniu $A[x]$. □

Twierdzenie 3. *Niech $f \in P[x]$ będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 1$ o najstarszym współczynniku odwracalnym w pierścieniu P. Wówczas dla ideału $I = (f) = \{f \cdot g : g \in P[x]\}$ pierścienia $P[x]$ mamy*

$$P[x]/I = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + I : a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in P\} \tag{12.1}$$

oraz dla dowolnych $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in P$:

$$a_0 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + I = b_0 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + I \Leftrightarrow \forall_{i=0,\ldots,n-1}\ a_i = b_i. \tag{12.2}$$

Dowód. Niech $g \in P[x]$. Wtedy z twierdzenia 1 istnieją $q, r \in P[x]$ takie, że $st(r) < n$ oraz $g = q \cdot f + r$, skąd $g - r = q \cdot f \in I$, więc $g + I = r + I$. Ponadto istnieją $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in P$ takie, że $r = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$, co dowodzi wzoru (12.1).

We wzorze (12.2) implikacja $\Leftarrow$ jest oczywista. Załóżmy, że $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in P$ są takie, że $a_0 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + I = b_0 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1} + I$. Wtedy $(a_0 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}) - (b_0 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}) \in I$, więc istnieje $g \in P[x]$ takie, że $r = (a_0 - b_0) + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} = g \cdot f$, skąd $0 = g \cdot f + (-r) = 0 \cdot f + 0$, więc z twierdzenia 1, $-r = 0$, czyli $a_i = b_i$ dla $i = 0, \ldots, n-1$. □

Twierdzenie 4. *Jeżeli K jest ciałem, to każdy ideał pierścienia $K[x]$ jest główny.*

Dowód. Niech $I \lhd K[x]$. Jeśli $I = \{0\}$, to $I = (0)$. Niech dalej $I \neq \{0\}$. Wtedy w zbiorze $I \setminus \{0\}$ istnieje wielomian f minimalnego stopnia n. Stąd $(f) \subseteq I$, bo $f \in I$. Jeżeli $g \in I$, to z twierdzenia 1 istnieją $q, r \in K[x]$ takie, że $g = q \cdot f + r$ i $st(r) < n$. Ale $r = g - q \cdot f \in I$, więc z minimalności n jest $r = 0$, czyli $g = q \cdot f \in (f)$. Zatem $I \subseteq (f)$ i ostatecznie $I = (f)$. □

12.2 Dziedziny ideałów głównych

Definicja 3. *Dziedziną ideałów głównych* (w skrócie: d.i.g.) nazywamy dziedzinę całkowitości, w której każdy ideał jest ideałem głównym.

Przykład 1. Pierścień liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest dziedziną ideałów głównych.

Przykład 2. Z twierdzenia 4 wynika, że dla dowolnego ciała K pierścień $K[x]$ jest dziedziną ideałów głównych.

Twierdzenie 5. *W dziedzinie ideałów głównych każdy niezerowy ideał pierwszy jest ideałem maksymalnym.*

Dowód. Niech $I \neq \{0\}$ będzie ideałem pierwszym dziedziny ideałów głównych P. Wówczas $I \neq P$ i istnieje $a \in P$ takie, że $I = (a)$. Ale $I \neq \{0\}$, więc $a \neq 0$. Niech $J \lhd P$ i $I \subset J$. Wówczas istnieje $b \in P$

takie, że $J = (b)$. Gdyby $b \in I$, to $J = (b) \subseteq I$, skąd $I = J$ i mamy sprzeczność. Zatem $b \notin I$. Dalej, $a \in (a) = I \subseteq J = (b)$, więc istnieje $t \in P$ takie, że $a = b \cdot t$. Stąd $b \cdot t \in I$ i $b \notin I$, więc z pierwszości ideału I, $t \in I$ i istnieje $x \in P$ takie, że $t = a \cdot x$. Zatem $a = b \cdot a \cdot x$ i $a \neq 0$ oraz P jest dziedziną, więc $1 = b \cdot x \in J$, skąd $J = P$. Zatem I jest ideałem maksymalnym pierścienia P. □

Z przykładu 2 i z twierdzenia 5 mamy natychmiast następujący

Wniosek 4. *Dla dowolnego ciała K każdy niezerowy ideał pierwszy pierścienia $K[x]$ jest ideałem maksymalnym pierścienia $K[x]$.* □

Twierdzenie 6. *Jeżeli $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$ są ideałami dziedziny ideałów głównych P, to istnieje n takie, że $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$*

Dowód. Niech $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Wtedy $I_k \subseteq I$ dla $k = 1, 2, \ldots$ skąd $I \neq \emptyset$. Weźmy dowolne $x, y \in I$. Wtedy istnieją $k, l \in \mathbb{N}$ takie, że $x \in I_k$, $y \in I_l$, więc dla $m = \max\{k, l\}$ mamy, że $x, y \in I_m$, skąd $x - y \in I_m$, czyli $x - y \in I$. Ponadto dla $a \in P$ jest $ax \in I_k$, więc $ax \in I$. Zatem $I \lhd P$ i P jest d.i.g., więc istnieje $c \in P$ takie, że $I = (c)$. Wtedy $c \in I$, więc istnieje naturalne n takie, że $c \in I_n$, skąd $I = (c) \subseteq I_n \subseteq I_k \subseteq I$ dla wszystkich $k \geqslant n$. Zatem $I_n = I_k$ dla wszystkich $k \geqslant n$. □

12.3 Arytmetyka dziedzin całkowitości

Od tej pory o wszystkich omawianych pierścieniach będziemy zakładali, że są one dziedzinami całkowitości.

Definicja 4. Niech a, b będą elementami pierścienia P. Powiemy, że a dzieli b w pierścieniu P, jeżeli istnieje $t \in P$ takie, że $b = a \cdot t$. Piszemy wtedy $a \mid b$.

Przykład 3. Niech $k \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{Z}[x]$. Łatwo zauważyć, że $k \mid f$ w $\mathbb{Z}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy k dzieli (w pierścieniu $\mathbb{Z}$) wszystkie współczynniki wielomianu f.

Uwaga 5. Dla dowolnych elementów a, b pierścienia P równoważne są warunki:

(i) $a \mid b$, (ii) $b \in (a)$, (iii) $(b) \subseteq (a)$.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii) Istnieje $t \in P$ takie, że $b = at$, skąd $b \in (a)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Istnieje $t \in P$ takie, że $b = at$, skąd dla $x \in P$, $bx = atx \in (a)$, czyli $(b) \subseteq (a)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ponieważ $b \in (b)$ i $(b) \subseteq (a)$, więc $b \in (a)$ i istnieje $t \in P$ takie, że $b = at$, skąd $a \mid b$. □

Definicja 5. Powiemy, że elementy a, b pierścienia P są *stowarzyszone* w P i piszemy $a \sim b$, jeżeli $a \mid b$ i $b \mid a$ w P.

Uwaga 6. Dla dowolnych elementów a, b pierścienia P równoważne są warunki:

(i) $a \sim b$, (ii) $(a) = (b)$, (iii) $\exists_{u \in P^*}\ a = bu$, (iv) $\exists_{v \in P^*}\ b = av$.

Dowód. Z uwagi 5 mamy, że $(a) = (b) \Leftrightarrow [(a) \subseteq (b)$ i $(b) \subseteq (a)] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (b \mid a$ i $a \mid b) \Leftrightarrow a \sim b$. Dalej, dla $u \in P^*$ istnieje $v \in P^*$ takie, że $uv = 1$, skąd wynika natychmiast równoważność warunków (iii) i (iv).

(i) $\Rightarrow$ (iii) Niech $a \sim b$. Wtedy $a \mid b$ i $b \mid a$, więc istnieją $x, y \in P$ takie, że $b = ax$ i $a = by$. Jeśli $b = 0$, to $a = 0 \cdot y = 0$ i wystarczy wziąć $u = 1$. Jeśli zaś $b \neq 0$, to $b = byx$, skąd $1 = yx$, więc $y \in P^*$ i wystarczy wziąć $u = y$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Niech $a = bu$ dla pewnego $u \in P^*$. Wtedy $b \mid a$ i istnieje $v \in P^*$ takie, że $b = av$, skąd $a \mid b$. Zatem $a \sim b$. □

Uwaga 7. Z uwagi 6 otrzymujemy od razu, że relacja $\sim$ jest relacją równoważności w pierścieniu P.

Definicja 6. Element a pierścienia P nazywamy *elementem rozkładalnym* w pierścieniu P, jeżeli istnieją niezerowe elementy nieodwracalne $x, y \in P$ takie, że $a = x \cdot y$.

Przykład 4. Wielomian $f \in K[x]$, gdzie K jest ciałem, jest elementem rozkładalnym w $K[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest iloczynem dwóch wielomianów $g, h \in K[x]$ dodatnich stopni, gdyż $(K[x])^* = K \setminus \{0\}$. Jeżeli $st(f) > 1$ i istnieje $a \in K$ takie, że $f(a) = 0$, to z twierdzenia Bezout istnieje $g \in K[x]$ takie, że $f = g \cdot (x - a)$. Wtedy $st(f) = st(g) + 1$, więc $st(g) > 0$ i f jest elementem rozkładalnym

w $K[x]$. Stąd i z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że w pierścieniu $\mathbb{C}[x]$ każdy wielomian stopnia co najmniej 2 jest elementem rozkładalnym w tym pierścieniu. Wielomian $x^4 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ nie posiada nawet pierwiastka rzeczywistego, ale jest rozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$, bo $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 - 2x) \cdot (x^2 + 2 + 2x)$.

Definicja 7. Niezerowy element nieodwracalny a pierścienia P nazywamy *elementem nierozkładalnym* w P, jeżeli a nie jest elementem rozkładalnym w P, tzn. dla dowolnych $x, y \in P$ z tego, że $a = x \cdot y$ wynika, że $x \in P^*$ lub $y \in P^*$.

Przykład 5. Niech K będzie ciałem i $f \in K[x]$. Jeżeli $st(f) = 1$ oraz $g, h \in K[x]$ są takie, że $f = g \cdot h$, to $1 = st(g) + st(h)$, skąd $st(g) = 0$ lub $st(h) = 0$, czyli $g \in (K[x])^*$ lub $h \in (K[x])^*$. Zatem wielomian f stopnia 1 jest nierozkładalny w $K[x]$.

Przykład 6. Niech K będzie ciałem i $f \in K[x]$ oraz $st(f) = 2$ lub $st(f) = 3$. Pokażemy, że f jest nierozkładalny w $K[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f nie ma pierwiastka w ciele K. Jeżeli f jest nierozkładalny w $K[x]$, to z przykładu 4, f nie ma pierwiastka w K. Na odwrót, załóżmy, że f nie ma pierwiastka w K. Weźmy dowolne $g, h \in K[x]$ takie, że $f = g \cdot h$ i $st(g) \leqslant st(h)$. Wtedy $st(f) = st(g) + st(h) \geqslant 2st(g)$. Ale $st(f) = 2$ lub $st(f) = 3$, więc stąd $st(g) \leqslant 1$. Jeśli $st(g) = 1$, to $g = ax + b$ dla pewnych $a, b \in P$, $a \neq 0$, czyli $g(-\frac{b}{a}) = 0$, więc też $f(-\frac{b}{a}) = 0$ i mamy sprzeczność. Zatem $st(g) = 0$, czyli $g \in (K[x])^*$ i f jest elementem nierozkładalnym w $K[x]$.

Lemat 1. *Jeżeli a jest niezerowym elementem nieodwracalnym pierścienia P takim, że a nie jest iloczynem skończonej liczby elementów nierozkładalnych, to istnieje $b \in P$, które jest niezerowym elementem nieodwracalnym w P i nie jest iloczynem skończonej liczby elementów nierozkładalnych takie, że $(a) \subset (b)$.*

Dowód. Z założenia wynika, że a jest elementem rozkładalnym w P, więc istnieją niezerowe elementy nieodwracalne $x, y \in P$ takie, że $a = xy$. Jeżeli $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, $y = y_1 \cdot \ldots \cdot y_l$, gdzie $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$ są elementami nierozkładalnymi w P, to $a = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot y_1 \cdot \ldots \cdot y_l$, wbrew założeniu. Zatem można zakładać, że x nie jest iloczynem skończonej

liczby elementów nierozkładalnych w P. Ponadto $x \mid a$, więc z uwagi 5, $(a) \subseteq (x)$. Jeśli $(a) = (x)$, to z uwagi 6 istnieje $u \in P^*$ takie, że $a = xu$, skąd $xu = xy$, czyli $y = u \in P^*$ i mamy sprzeczność. Zatem $(a) \subset (x)$ i wystarczy wziąć $b = x$. □

Twierdzenie 7. *W dziedzinie ideałów głównych P każdy niezerowy element nieodwracalny jest iloczynem skończonej liczby elementów nierozkładalnych w P.*

Dowód. Gdyby tak nie było, to przez prostą indukcję z lematu 1 znaleźlibyśmy nieskończony ciąg elementów $a_1, a_2, \ldots$ pierścienia P taki, że $(a_1) \subset (a_2) \subset (a_3) \subset \ldots$ co przeczy twierdzeniu 6. □

Wniosek 5. *Dla dowolnego ciała K każdy wielomian $f \in K[x]$ dodatniego stopnia jest iloczynem skończonej liczby wielomianów nierozkładalnych w $K[x]$.* □

Twierdzenie 8. *Jeżeli $f \in \mathbb{R}[x]$ jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$, to $st(f) = 1$ lub $st(f) = 2$.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje $f \in \mathbb{R}[x]$ nierozkładalny w $\mathbb{R}[x]$ taki, że $st(f) \geqslant 3$. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że $f(z_0) = 0$. Ponadto z przykładu 4 jest, że $z_0 \notin \mathbb{R}$, więc $z_0 \neq \overline{z_0}$. Ale $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dla pewnych liczb rzeczywistych $a_0, \ldots, a_n$, więc

$$f(\overline{z_0}) = a_n(\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z_0} + a_0 =$$

$$= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{f(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

Niech $h = (x - z_0) \cdot (x - \overline{z_0}) = x^2 - (z_0 + \overline{z_0})x + z_0\overline{z_0}$. Ponieważ $z_0 + \overline{z_0}, z_0\overline{z_0} \in \mathbb{R}$, więc $h \in \mathbb{R}[x]$. Ponadto ze stwierdzenia 1 wynika, że $h \mid f$ w pierścieniu $\mathbb{C}[x]$. Ale $h, f \in \mathbb{R}[x]$, więc ze stwierdzenia 2, $h \mid f$ w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$. Zatem istnieje $g \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $f = h \cdot g$, skąd $st(f) = st(h) + st(g) = 2 + st(g)$. Ale $st(f) \geqslant 3$, więc $st(g) > 0$, co przeczy temu, że f jest nierozkładalny w $\mathbb{R}[x]$. Zatem $st(f) = 1$ lub $st(f) = 2$. □

Z twierdzenia 8 i z wniosku 5 wynika od razu następujące

Twierdzenie 9. *Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach rzeczywistych jest iloczynem skończonej liczby wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopni* $\leqslant 2$. □

Z przykładów 4 i 5 oraz z twierdzenia 8 i wniosku 5 mamy od razu następujące

Twierdzenie 10. *Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych jest iloczynem skończonej liczby czynników liniowych.* □

Uwaga 8. Na mocy przykładu 6 wielomian $f = ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 2 jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f nie ma pierwiastka w $\mathbb{R}$, czyli gdy $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Rozdział 13

Rozkłady elementów pierścienia na czynniki

13.1 Wielomiany nierozkładalne w pierścieniach $\mathbb{Z}[x]$ i $\mathbb{Q}[x]$

Twierdzenie 1. *Niech p będzie liczbą pierwszą i niech $f, g \in \mathbb{Z}[x]$. Jeżeli w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ $p \mid f \cdot g$, to $p \mid f$ lub $p \mid g$.*

Dowód. Z założenia istnieje $h \in \mathbb{Z}[x]$ takie, że $f \cdot g = p \cdot h$. Ponadto przekształcenie $T : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[x]$ dane wzorem

$$\begin{gathered} T(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \\ = [a_n]_p x^n + [a_{n-1}]_p x^{n-1} + \ldots + [a_1]_p x + [a_0]_p \end{gathered}$$

jest homomorfizmem pierścieni o jądrze (p). Stąd $T(f) \cdot T(g) = 0$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[x]$. Ale $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem, gdyż p jest liczbą pierwszą, więc $\mathbb{Z}_p[x]$ jest dziedziną całkowitości, skąd $T(f) = 0$ lub $T(g) = 0$, czyli $f \in (p)$ lub $g \in (p)$. Zatem $p \mid f$ lub $p \mid g$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$. $\square$

Definicja 1. Powiemy, że wielomian

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

jest *wielomianem pierwotnym*, jeżeli $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 1$, tzn. jeżeli nie istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \mid f$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$.

Z twierdzenia 1 wynika od razu następujący

Lemat Gaussa. *Iloczyn wielomianów pierwotnych jest wielomianem pierwotnym.* □

Twierdzenie 2. *Niech $f \in \mathbb{Z}[x]$ będzie wielomianem pierwotnym. Wówczas równoważne są warunki:*

(i) f jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$,

(ii) f jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Q}[x]$.

Dowód. (ii) $\Rightarrow$ (i) Załóżmy, że f jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Q}[x]$. Wtedy $st(f) = n \geqslant 1$. Jeżeli $f = g \cdot h$ dla pewnych $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, to $g \in \mathbb{Q}^*$ lub $h \in \mathbb{Q}^*$, skąd $g \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ lub $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Można zakładać, że $g \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Jeśli $g \notin \mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, to $|g| > 1$, więc istnieje liczba pierwsza p taka, że $p|g$ w pierścieniu $\mathbb{Z}$, skąd $p|f$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$ i mamy sprzeczność. Zatem $g \in \mathbb{Z}^*$, skąd wynika, że f jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Załóżmy teraz, że f jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Q}[x]$. Ponieważ f jest wielomianem pierwotnym, więc stąd $st(f) \geqslant 1$. Załóżmy, że f nie jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniu $\mathbb{Q}[x]$. Istnieją wtedy wielomiany $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ dodatnich stopni takie, że $f = g \cdot h$. Wtedy istnieją liczby naturalne k, l takie, że $kg, lh \in \mathbb{Z}[x]$ oraz $(kl)f = (kg) \cdot (lh)$. Istnieje zatem najmniejsza liczba naturalna s taka, że wielomian sf jest iloczynem dwóch wielomianów $\phi, \psi \in \mathbb{Z}[x]$ dodatnich stopni. Jeżeli $s > 1$, to istnieje liczba naturalna p taka, że $p \mid s$. Wtedy z twierdzenia 1, $p \mid \phi$ lub $p \mid \psi$ w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$. Bez zmniejszania ogólności możemy zakładać, że $p \mid \phi$. Wtedy $\frac{s}{p} f = (\frac{\phi}{p}) \cdot \psi$ i mamy sprzeczność z minimalnością s. Zatem $s = 1$ oraz $f = \phi \cdot \psi$. Ale $st(\phi), st(\psi) \geqslant 1$ oraz $(\mathbb{Z}[x])^* = \mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, więc mamy sprzeczność z nierozkładalnością wielomianu f w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$. □

Twierdzenie 3. *Jeżeli wielomian unormowany $f \in P[x]$ jest elementem rozkładalnym w pierścieniu $P[x]$, to istnieją wielomiany unormowane $g, h \in P[x]$ dodatnich stopni takie, że $f = g \cdot h$.*

Dowód. Z założenia istnieją wielomiany niezerowe nieodwracalne $g_1, h_1 \in P[x]$ takie, że $f = g_1 \cdot h_1$. Niech a będzie najstarszym współczynnikiem wielomianu g_1, zaś b niech będzie najstarszym współczyn-

nikiem wielomianu h_1. Wtedy z założenia $1 = ab$, skąd $a, b \in P^* \subseteq (P[x])^*$. Zatem $st(g_1), st(h_1) \geqslant 1$ oraz bg_1, ah_1 są wielomianami unormowanymi dodatnich stopni i $(bg_1)\cdot(ah_1) = (ab)g_1 \cdot h_1 = g_1 \cdot h_1 = f$. □

Uwaga 1. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 3 jest także prawdziwe, bo $(P[x])^* = P^*$.

Twierdzenie 4 (kryterium Eisensteina). *Niech* $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ *będzie wielomianem pierwotnym stopnia* $n \geqslant 1$. *Jeżeli istnieje liczba pierwsza* p *taka, że* $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$ *dla* $i = 0, 1, \ldots, n-1$ *oraz* $p^2 \nmid a_0$, *to* f *jest wielomianem nierozkładalnym w pierścieniach* $\mathbb{Q}[x]$ *i* $\mathbb{Z}[x]$.

Dowód. Dla $n = 1$ teza jest oczywista na mocy pierwotności wielomianu f. Niech dalej $n \geqslant 2$ i załóżmy, że f jest rozkładalny w $\mathbb{Q}[x]$. Wtedy z twierdzenia 2 mamy, że f jest rozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$. Z pierwotności f wynika, że istnieją wielomiany $g, h \in \mathbb{Z}[x]$ dodatnich stopni takie, że $f = g \cdot h$. Niech $g = b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $b_s \neq 0$ oraz $h = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, $c_r \neq 0$. Wtedy $s + r = n$ i $c_r b_s = a_n$ oraz $b_0 c_0 = a_0$. Stąd z pierwszości p mamy, że $p \mid b_0$ lub $p \mid c_0$. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy zakładać, że $p \mid b_0$. Ponieważ $p^2 \nmid a_0$, więc stąd $p \nmid c_0$. Ponadto $p \nmid a_n$, więc $p \nmid b_s$ i $p \nmid c_r$. Istnieje zatem największa nieujemna liczba całkowita $k \leqslant s - 1$ taka, że $p \mid b_k$. Ponadto $k + 1 \leqslant s < n$, więc $p \mid a_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} b_i c_{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k} b_i c_{k+1-i} + b_{k+1}c_0$. Ale $p \mid b_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, k$, więc $p \mid b_{k+1}c_0$ i $p \nmid c_0$, więc $p \mid b_{k+1}$ i mamy sprzeczność z maksymalnością k. Oznacza to, że wielomian f jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Q}[x]$ i na mocy twierdzenia 2 f jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Z}[x]$. □

Wniosek 1. *W pierścieniu* $\mathbb{Q}[x]$ *istnieją wielomiany nierozkładalne dowolnego dodatniego stopnia.*

Dowód. Dla naturalnych n wielomian $f_n = x^n + 2$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{Q}[x]$ na mocy kryterium Eisensteina przy $p = 2$. □

Elementy pierwsze

Definicja 2. Powiemy, że niezerowy element nieodwracalny a pierścienia P jest *elementem pierwszym* w P, jeżeli dla dowolnych $x, y \in P$ z tego, że $a \mid xy$ wynika, że $a \mid x$ lub $a \mid y$.

Twierdzenie 5. *Każdy element pierwszy pierścienia P jest elementem nierozkładalnym w P.*

Dowód. Niech p będzie elementem pierwszym pierścienia P. Wtedy $p \neq 0$ i $p \notin P^*$. Weźmy dowolne $x, y \in P$ takie, że $p = xy$. Wtedy $p \mid xy$, więc $p \mid x$ lub $p \mid y$. Zatem $x = pt$ lub $y = pt$ dla pewnego $t \in P$. Stąd $p = pty$ lub $p = xpt$, więc $1 = ty$ lub $1 = xt$, czyli $y \in P^*$ lub $x \in P^*$. Zatem p jest elementem nierozkładalnym w pierścieniu P. □

Uwaga 2. Nie zawsze element nierozkładalny jest elementem pierwszym. Mianowicie $P = \mathbb{Z} + (x^2)$ jest podpierścieniem dziedziny całkowitości $\mathbb{Z}[x]$ i można wykazać, że $a = x^2$ jest elementem nierozkładalnym w pierścieniu P, ale nie jest elementem pierwszym w P.

Twierdzenie 6. *Dla dowolnego niezerowego elementu p pierścienia P równoważne są warunki:*

(i) p jest elementem pierwszym w P,

(ii) ideał (p) jest pierwszy w P.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii) Z założenia $p \notin P^*$, więc $1 \notin (p)$, czyli $(p) \neq P$. Niech $a, b \in P$ będą takie, że $ab \in (p)$. Wtedy $p \mid ab$, więc z pierwszości p, $p \mid a$ lub $p \mid b$, czyli $a \in (p)$ lub $b \in (p)$. Zatem (p) jest ideałem pierwszym w P.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Z założenia $(p) \neq P$, więc $1 \notin (p)$, czyli $p \notin P^*$. Ponadto z założenia $p \neq 0$. Weźmy dowolne $x, y \in P$ takie, że $p \mid xy$. Wtedy $xy \in (p)$, więc z pierwszości ideału (p), $x \in (p)$ lub $y \in (p)$, czyli $p \mid x$ lub $p \mid y$. Zatem p jest elementem pierwszym w pierścieniu P. □

Twierdzenie 7. *W dziedzinie ideałów głównych każdy element nierozkładalny jest elementem pierwszym.*

Dowód. Niech $a \in P$ będzie elementem nierozkładalnym w dziedzinie ideałów głównych P. Wtedy $a \neq 0$ i $a \notin P^*$, skąd $1 \notin (a)$, więc

$(a) \neq P$. Niech $I \lhd P$ oraz $(a) \subset I$. Wtedy istnieje $b \in I$ takie, że $I = (b)$, więc $(a) \subset (b)$. Zatem $b \mid a$ i istnieje $t \in P$ takie, że $a = bt$. Stąd z nierozkładalności a mamy, że $b \in P^*$ lub $t \in P^*$. Jeśli $t \in P^*$, to $a \sim b$, skąd $(a) = (b)$ i mamy sprzeczność. Zatem $b \in P^*$, skąd $1 \in (b)$, czyli $(b) = P$. Zatem (a) jest ideałem maksymalnym w P. Stąd (a) jest ideałem pierwszym w P i na mocy twierdzenia 6, a jest elementem pierwszym w P. □

13.2 Dziedziny z jednoznacznością rozkładu

Definicja 3. Niech a będzie niezerowym elementem nieodwracalnym dziedziny całkowitości P. Powiemy, że a ma *rozkład jednoznaczny w* P, jeżeli $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ dla pewnych nierozkładalnych elementów $p_1, \ldots, p_n$ pierścienia P oraz jeśli $q_1, \ldots, q_s$ są elementami nierozkładalnymi w P takimi, że $a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$, to $s = n$ oraz po ewentualnej permutacji indeksów uzyskamy, że $p_i \sim q_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Definicja 4. Powiemy, że dziedzina całkowitości P jest *dziedziną z jednoznacznością rozkładu*, jeżeli każdy niezerowy element nieodwracalny pierścienia P ma rozkład jednoznaczny.

Twierdzenie 8. *W dziedzinie z jednoznacznością rozkładu każdy element nierozkładalny jest elementem pierwszym.*

Dowód. Niech p będzie elementem nierozkładalnym dziedziny z jednoznacznością rozkładu P. Weźmy dowolne $x, y \in P$ takie, że $p \mid xy$. Jeśli $x = 0$, to $p \mid x$, jeśli $y = 0$, to $p \mid y$. Możemy zatem dalej zakładać, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Istnieje $t \in P$ takie, że $xy = tp$. Jeśli $x \in P^*$, to $y = x^{-1}tp$, skąd $p \mid y$. Jeśli $y \in P^*$, to analogicznie $p \mid x$. Niech dalej $x \notin P^*$ i $y \notin P^*$. Wtedy $x = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r$, $y = t_1 \cdot \ldots \cdot t_s$ dla pewnych elementów nierozkładalnych $q_1, \ldots, q_r, t_1, \ldots, t_s$ pierścienia P. Zatem $tp = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_s$. Ale w rozkładzie tp na czynniki nierozkładalne występuje p, więc z jednoznaczności rozkładu elementu tp mamy, że $p \sim q_i$ dla pewnego $i \leqslant r$, skąd $p \mid x$ lub $p \sim t_j$ dla pewnego $j \leqslant s$, skąd $p \mid y$. Zatem p jest elementem pierwszym

w pierścieniu P. □

Twierdzenie 9. *Niech P będzie dziedziną całkowitości, w której każdy element nierozkładalny jest elementem pierwszym. Wówczas równoważne są warunki:*

(i) P jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu,

(ii) każdy niezerowy element nieodwracalny pierścienia P jest iloczynem skończonej liczby elementów nierozkładalnych w pierścieniu P.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii) Oczywiste. (ii) $\Rightarrow$ (i) Niech zachodzi (ii), ale nie zachodzi (i). Wtedy istnieje niezerowy element nieodwracalny $a \in P$ rozkładający się na iloczyn najmniejszej liczby elementów nierozkładalnych $p_1, \ldots, p_n$ i nie posiadający jednoznacznego rozkładu w P. Zatem istnieją elementy nierozkładalne $q_1, \ldots, q_s$ pierścienia P takie, że $a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ oraz nie można spermutować elementów $p_1, \ldots, p_n$ tak aby $p_i \sim q_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ lub $n \neq s$. Z założenia $n \geqslant s$. Jeżeli $n = 1$, to $s = 1$, skąd $q_1 = p_1$ i mamy sprzeczność. Zatem $n > 1$. Ponadto p_n jest elementem pierwszym w P oraz $p_n \mid q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$, więc dla pewnego $i \leqslant s$, $p_n \mid q_i$. Bez zmniejszania ogólności można zakładać, że $i = s$, tzn. $p_n \mid q_s$. Stąd z nierozkładalności p_n i q_s mamy, że $p_n \sim q_s$, czyli $q_s = p_n u$ dla pewnego $u \in P^*$ oraz $q_1 \cdot \ldots \cdot q_{s-2} \cdot (q_{s-1} u) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}$. Ale $q_{s-1} u$ jest elementem nierozkładalnym w P, więc z minimalności n mamy, że $n - 1 = s - 1$, skąd $n = s$. Ponadto po ewentualnej permutacji indeksów $p_i \sim q_i$ dla $i = 1, \ldots, n-2$ i $p_{n-1} \sim q_{s-1} u \sim q_{s-1}$. Stąd $p_i \sim q_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ i mamy sprzeczność. □

Z twierdzeń 7 i 9 oraz z twierdzenia 7 z rozdziału 12 wynika od razu następujący

Wniosek 2. *Każda dziedzina ideałów głównych jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.* □

Rozdział 14

Ciała i ich własności

14.1 Charakterystyka ciała

Określenie ciała i własności działań w ciele były omówione na algebrze liniowej. Niech $(K, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem. Przypomnijmy, że iloczyn elementu $a \in K$ przez liczbę naturalną określamy następująco:

$$1 \cdot a = a \text{ oraz } (n+1) \cdot a = n \cdot a + a \text{ dla } n = 1, 2, \ldots$$

Zatem $n \cdot a = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}$.

Jeżeli istnieje liczba naturalna n taka, że $n \cdot 1 = 0$ w ciele K, to najmniejszą taką liczbę naturalną n nazywamy *charakterystyką ciała* K. Jeżeli takiej liczby naturalnej nie ma, to mówimy, że ciało K ma charakterystykę 0. Charakterystykę ciała K oznaczamy przez $ch(K)$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli n jest charakterystyką ciała K i $n \in \mathbb{N}$, to n jest liczbą pierwszą.*

Dowód. Załóżmy, że n nie jest liczbą pierwszą. Ponieważ $0 \neq 1$ w K oraz $1 \cdot 1 = 1$, więc $n > 1$ i istnieją $k, l \in \mathbb{N}$ takie, że $1 < k, l < n$ oraz $n = k \cdot l$. Wtedy $0 = n \cdot 1 = (k \cdot l) \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{kl} =$ $= (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{k}) \cdot (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{l}) = (k \cdot 1) \cdot (l \cdot 1)$ i K jest ciałem, więc

$k \cdot 1 = 0$ lub $l \cdot 1 = 0$. Ale $k, l < n$, więc mamy sprzeczność z określeniem charakterystyki n ciała K. □

Przykład 1. Dla dowolnej liczby pierwszej p ciało $\mathbb{Z}_p$ ma charakterystykę p, bo dla $k \in \mathbb{N}, k < p$ jest $k \cdot 1 = \underbrace{1 \oplus_p \ldots \oplus_p 1}_{k} = k \neq 0$ oraz

$$p \cdot 1 = \underbrace{1 \oplus_p \ldots \oplus_p 1}_{p} = [\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p}]_p = [p]_p = 0.$$

Przykład 2. Ciało $\mathbb{Q}$ ma charakterystykę 0, bo dla $n \in \mathbb{N}$ jest $n \cdot 1 = n \neq 0$.

Twierdzenie 2. *Każde ciało skończone ma dodatnią charakterystykę.*

Dowód. Niech K będzie ciałem skończonym o m elementach. Wówczas elementy $1 \cdot 1,\ 2 \cdot 1,\ 3 \cdot 1, \ldots, m \cdot 1,\ (m+1) \cdot 1$ nie mogą być parami różne. Zatem istnieją liczby naturalne $i > j$ takie, że $i \cdot 1 = j \cdot 1$. Stąd $(i - j) \cdot 1 = 0$. Ale $i - j \in \mathbb{N}$, więc $ch(K) \in \mathbb{N}$, czyli $ch(K) > 0$. □

14.2 Podciała i ciała proste

Definicja 1. Niech $(K, +, \cdot, 0, 1)$ będzie ciałem i niech $L \subseteq K$. Powiemy, że L *jest podciałem ciała* K, jeżeli L tworzy ciało ze względu na wszystkie działania określone w K, tzn. gdy $0, 1 \in L$ oraz dla dowolnych $a, b \in L$ mamy, że $-a \in L,\ a + b \in L,\ a \cdot b \in L$ i dla $a \neq 0$ jest, że $\frac{1}{a} \in L$.

Twierdzenie 3. *Zbiór $L \subseteq K$ jest podciałem ciała K wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \in L$ oraz dla dowolnych $a, b \in L$ jest $a - b \in L$ i dla dowolnych $a, b \in L$ takich, że $b \neq 0$ jest $\frac{a}{b} \in L$.*

Dowód. $\Rightarrow$ Załóżmy, że L jest podciałem ciała K. Wtedy $1 \in L$. Niech $a, b \in L$. Wtedy $-b \in L$, stąd $a - b = a + (-b) \in L$. Niech $a, b \in L,\ b \neq 0$. Wtedy $\frac{1}{b} \in L$, więc $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \in L$.

$\Leftarrow$ Na odwrót, $1 \in L$, więc $0 = 1 - 1 \in L$. Niech $a, b \in L$. Wtedy $-b = 0 - b \in L$ oraz $a + b = a - (-b) \in L$. Ponadto dla $b = 0$ jest

$a \cdot b = 0 \in L$, a dla $b \neq 0$, $\frac{1}{b} \in L$, bo $1 \in L$, więc $\frac{a}{\frac{1}{b}} = a \cdot b \in L$. Zatem L jest podciałem ciała K. □

Uwaga 1. Z określenia charakterystyki ciała wynika od razu, że jeżeli L jest podciałem ciała K, to $ch(L) = ch(K)$.

Definicja 2. Jeżeli ciało K nie posiada podciał różnych od K, to mówimy, że K jest *ciałem prostym.*

Przykład 3. Zauważmy, że $\mathbb{Q}$ jest ciałem prostym. Rzeczywiście, niech $K \subseteq \mathbb{Q}$ będzie podciałem ciała $\mathbb{Q}$. Wówczas $1 \in K$. Jeżeli dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ jest $n \in K$, to $n+1 \in K$, stąd przez indukcję mamy, że $\mathbb{N} \subseteq K$. Ale $0 \in K$ i dla $n \in \mathbb{N}$ jest, że $-n \in K$, bo $n \in K$, więc $\mathbb{Z} \subseteq K$. Weźmy dowolne $q \in \mathbb{Q}$. Wówczas istnieją $n \in \mathbb{Z}$ i $k \in \mathbb{N}$ takie, że $q = \frac{n}{k}$. Ale $n, k \in K$ i $k \neq 0$, więc $q \in K$. Stąd $\mathbb{Q} \subseteq K$, czyli $K = \mathbb{Q}$.

Przykład 4. Dla dowolnej liczby pierwszej p, $\mathbb{Z}_p$ jest ciałem prostym. Rzeczywiście, niech $K \subseteq \mathbb{Z}_p$ będzie podciałem ciała $\mathbb{Z}_p$. Wówczas $1 \in K$, stąd $1 \oplus_p 1 = 2 \in K$, więc też $3 \cdot 1 \in K$ itd. W końcu $1, 2, \ldots, p-1, 0 \in K$, czyli $K = \mathbb{Z}_p$.

Twierdzenie 4. *Jedynymi ciałami prostymi z dokładnością do izomorfizmu są $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Z}_p$ dla p będących liczbami pierwszymi.*

Dowód. Niech K będzie ciałem prostym. Jeżeli $ch(K) = 0$, to dla $n \in \mathbb{N}$ mamy, że $n \cdot 1 \neq 0$, więc dla $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ mamy, że $\frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} \in K$. Łatwo sprawdzić, że wówczas zbiór $L = \{\frac{m \cdot 1}{n \cdot 1} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ jest podciałem ciała K, skąd $L = K$. Ponadto przekształcenie $f : \mathbb{Q} \longrightarrow L$ dane wzorem $f(\frac{m}{n}) = \frac{m \cdot 1}{n \cdot 1}$ dla $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ jest izomorfizmem ciał. Stąd $K \cong \mathbb{Q}$.

Niech teraz $ch(K) = p > 0$. Z twierdzenia 1 p jest liczbą pierwszą. Łatwo zauważyć, że wtedy $M = \{0 \cdot 1, 1 \cdot 1, \ldots, (p-1) \cdot 1\}$ jest podciałem ciała K, skąd $K = M$. Ponadto przekształcenie $g : \mathbb{Z}_p \longrightarrow M$ dane wzorem $g(k) = k \cdot 1$ dla $k \in \mathbb{Z}_p$ jest izomorfizmem ciał, więc $K \cong \mathbb{Z}_p$. □

Uwaga 2. Z dowodu twierdzenia 4 wynika, że jeśli ciało K ma charakterystykę 0, to istnieje w nim podciało izomorficzne z ciałem $\mathbb{Q}$,

a jeżeli ciało K ma charakterystykę $p > 0$, to istnieje w nim podciało izomorficzne z $\mathbb{Z}_p$ i jest to najmniejsze (w sensie inkluzji) podciało ciała K.

Definicja 3. Jeżeli L jest podciałem ciała K , to mówimy, że K *jest rozszerzeniem ciała* L.

Uwaga 3. Jeżeli ciało K jest rozszerzeniem ciała L, to K jest przestrzenią liniową nad ciałem L, jeżeli dla $\alpha \in K$, $a \in L$ określimy

$$a \circ \alpha = a \cdot \alpha,$$

gdzie $\cdot$ oznacza mnożenie w ciele K. Moc dowolnej bazy K nad L oznaczamy przez $(K : L)$ i nazywamy *stopniem rozszerzenia* $L \subseteq K$. Jeżeli $(K : L)$ jest liczbą naturalną, to mówimy, że K jest *skończonym rozszerzeniem ciała* L.

Twierdzenie 5. *Jeżeli K jest ciałem skończonym, to istnieją liczba pierwsza p oraz liczba naturalna n takie, że $ch(K) = p$ i $|K| = p^n$. Jeżeli L jest podciałem ciała K, to istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $m \mid n$ oraz $|L| = p^m$.*

Dowód. Z twierdzeń 1 i 2 wynika, że istnieje liczba pierwsza p taka, że $ch(K) = p$. Niech L będzie podciałem ciała K. Wtedy K jest przestrzenią liniową nad ciałem L. Ale K jest skończone, więc istnieje baza $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ K nad L. Każdy element należący do K może być zapisany jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej elementów tej bazy. Zatem $|K| = |L^s| = |L|^s$.

Z uwagi 2 istnieje podciało F takie, że $|F| = p$. Stąd $|K| = p^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli L jest dowolnym podciałem ciała K, to z uwagi 2 $F \subseteq L$, więc $|L| = p^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Ale $p^n = |K| = |L|^s = p^{ms}$ dla pewnego $s \in \mathbb{N}$, więc $n = ms$ i $m \mid n$. □

Twierdzenie 6. *Niech K będzie ciałem dodatniej charakterystyki p. Wówczas dla dowolnych $a, b \in K$:*

$$a^p + b^p = (a + b)^p.$$

Dowód. Ze wzoru Newtona mamy

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \cdot a^k \cdot b^{p-k}.$$

Ale z elementarnej teorii liczb dla $k = 1, \ldots, p-1$ mamy, że $p \mid \binom{p}{k}$, więc $\binom{p}{k} = p \cdot l_k$, $l_k \in \mathbb{N}$. Zatem $\binom{p}{k} \cdot 1 = (p \cdot l_k) \cdot 1 = l_k \cdot (p \cdot 1) = l_k \cdot 0 = 0$, stąd wynika teza. □

Uwaga 4. Z twierdzenia 6 przez prostą indukcję uzyskujemy, że jeżeli K jest ciałem dodatniej charakterystyki p, to dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in K$ zachodzi wzór:

$$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$

Przykład 5. $(\mathbb{C} : \mathbb{R}) = 2$, to $\{1, i\}$ jest bazą $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Natomiast $(\mathbb{R} : \mathbb{Q}) = \infty$, bo $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalne, a $\mathbb{Q}$ jest przeliczalne.

14.3 Ciało ułamków

Każdy podpierścień ciała jest dziedziną całkowitości. Okazuje się, że także każda dziedzina całkowitości jest podpierścieniem pewnego ciała.

Definicja 4. Powiemy, że ciało K jest *ciałem ułamków* dziedziny całkowitości P, jeżeli

(i) P jest podpierścieniem K oraz

(ii) każdy element ciała K można zapisać w postaci $\frac{a}{b}$ dla pewnych $a, b \in P$, $b \neq 0$.

Przedstawimy teraz konstrukcję ciała ułamków dowolnej dziedziny całkowitości P. Niech $S = P \times (P \setminus \{0\})$. W zbiorze S określamy relację $\sim$ przyjmując, że dla dowolnych $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in S$:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1.$$

Sprawdzimy, że $\sim$ jest relacją równoważności w S:

1° Jeżeli $(a, b) \in S$, to $a \cdot b = a \cdot b$ więc $(a, b) \sim (a, b)$.

2° Jeżeli (a, b), $(c, d) \in S$ oraz $(a, b) \sim (c, d)$ to $a \cdot d = c \cdot b$. Stąd $c \cdot b = a \cdot d$, czyli $(c, d) \sim (a, b)$.

3° Jeżeli (a_1, b_1), (a_2, b_2), $(a_3, b_3) \in S$ są takie, że $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ oraz $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$, to $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$ i $a_2 \cdot b_3 = a_3 \cdot b_2$, stąd $a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = a_2 \cdot b_1 \cdot b_3$ i $a_2 \cdot b_3 \cdot b_1 = a_3 \cdot b_2 \cdot b_1$, więc $a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = a_3 \cdot b_2 \cdot b_1$. Ale $b_2 \neq 0$ i P jest dziedziną całkowitości, więc $a_1 \cdot b_3 = a_3 \cdot b_1$, stąd $(a_1, b_1) \sim (a_3, b_3)$.

Klasę abstrakcji o reprezentancie $(a, b) \in S$ będziemy oznaczali przez $\frac{a}{b}$. Zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji $\sim$ będziemy oznaczali przez P_0.

Zauważmy najpierw, że dla $(a, b) \in S$ i $0 \neq d \in P$ jest $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$. Rzeczywiście, $a \cdot (b \cdot d) = (a \cdot d) \cdot b$ stąd $(a, b) \sim (a \cdot d, b \cdot d)$, więc $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$.

Dla $(a, b) \in S$ mamy też, że $\frac{a}{b} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow a = 0$. Rzeczywiście, dla $a = 0$ jest $a \cdot 1 = 0 = 0 \cdot b$, więc $(a, b) \sim (0, 1)$, stąd $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}$. Jeżeli zaś $\frac{a}{b} = \frac{0}{1}$, to $(a, b) \sim (0, 1)$, skąd $a \cdot 1 = 0 \cdot b$, czyli $a = 0$.

Niech $1 = \frac{1}{1}$ i $0 = \frac{0}{1}$. Ponieważ $0 \neq 1$ w P, więc z naszych rozważań wynika, że $0 \neq 1$ w K.

Określamy teraz w P_0 dodawanie i mnożenie przy pomocy wzorów:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2}, \tag{14.1}$$

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}. \tag{14.2}$$

Sprawdzimy, że te określenia nie zależą od wyboru reprezentantów klas. Niech $(a_1, b_1), (x_1, y_1), (a_2, b_2), (x_2, y_2) \in S$ oraz $(a_1, b_1) \sim (x_1, y_1)$, $(a_2, b_2) \sim (x_2, y_2)$. Wtedy $a_1 \cdot y_1 = x_1 \cdot b_1$ i $a_2 \cdot y_2 = x_2 \cdot b_2$. Musimy udowodnić, że wówczas $(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1, b_1 \cdot b_2) \sim (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1, y_1 \cdot y_2)$ i $(a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2) \sim (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$, czyli że $(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot y_1 y_2 = (x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot b_1 \cdot b_2$ i $a_1 \cdot a_2 \cdot y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot b_1 \cdot b_2$. Ale $a_1 \cdot a_2 \cdot y_1 \cdot y_2 = (a_1 \cdot y_1) \cdot (a_2 \cdot y_2) = x_1 \cdot b_1 \cdot x_2 \cdot b_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot b_1 \cdot b_2$ oraz $(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot y_1 y_2 = (a_1 y_1) \cdot b_2 y_2 + (a_2 y_2) \cdot b_1 y_1 = x_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot y_2 + x_2 \cdot b_2 \cdot b_1 \cdot y_1 = (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot b_1 \cdot b_2$, więc wzory (14.1) i (14.2) są dobrze określone.

Teraz udowodnimy, że $(K, +, \cdot, 0, 1)$ jest ciałem. W tym celu sprawdzamy spełnienie aksjomatów ciała:

1. Niech $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in S$. Wtedy

$$(\tfrac{a_1}{b_1} + \tfrac{a_2}{b_2}) + \tfrac{a_3}{b_3} = \tfrac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2} + \tfrac{a_3}{b_3} = \tfrac{a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_1 \cdot b_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} + \tfrac{a_3 \cdot b_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} =$$

$$= \tfrac{a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3},$$

bo $\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} = \frac{a_1 + a_2}{b}$, gdyż $\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} = \frac{a_1 \cdot b + a_2 \cdot b}{b^2} = \frac{(a_1 + a_2) \cdot b}{b \cdot b} = \frac{a_1 + a_2}{b}$. Ponadto

$$\tfrac{a_1}{b_1} + (\tfrac{a_2}{b_2} + \tfrac{a_3}{b_3}) = \tfrac{a_1}{b_1} + \tfrac{a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_3} = \tfrac{a_1 \cdot b_2 \cdot b_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} + \tfrac{a_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} =$$

$$= \tfrac{a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + a_3 \cdot b_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3},$$

więc dodawanie jest łączne.

2. Niech $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in S$. Wtedy

$$\tfrac{a_2}{b_2} + \tfrac{a_1}{b_1} = \tfrac{a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_1} = \tfrac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2} = \tfrac{a_1}{b_1} + \tfrac{a_2}{b_2},$$

więc dodawanie jest przemienne.

3. Niech $(a, b) \in S$. Wtedy $0 = \frac{0}{b}$ oraz $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a+0}{b} = \frac{a}{b}$, więc 0 jest elementem neutralnym dodawania.

4. Niech $(a, b) \in S$. Wtedy $(-a, b) \in S$ oraz $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a+(-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0$. Zatem $-(\frac{a}{b}) = \frac{(-a)}{b}$.

5. Niech $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in S$. Wtedy

$$(\tfrac{a_1}{b_1} \cdot \tfrac{a_2}{b_2}) \cdot \tfrac{a_3}{b_3} = \tfrac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} \cdot \tfrac{a_3}{b_3} = \tfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$$

i

$$\tfrac{a_1}{b_1} \cdot (\tfrac{a_2}{b_2} \cdot \tfrac{a_3}{b_3}) = \tfrac{a_1}{b_1} \tfrac{a_2 \cdot a_3}{b_2 \cdot b_3} = \tfrac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3},$$

więc mnożenie jest łączne.

6. Niech $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in S$. Wtedy $\frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2 \cdot a_1}{b_2 \cdot b_1} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2}$, więc mnożenie jest przemienne.

7. Niech $(a, b) \in S$. Wtedy $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$, czyli 1 jest elementem neutralnym mnożenia.

8. Niech $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in S$. Wtedy

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \left(\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3}\right) = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_2}{b_2 \cdot b_3} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 + a_1 \cdot a_3 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$$

oraz

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} + \frac{a_1 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_3} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot b_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} + \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 + a_1 \cdot a_3 \cdot b_2}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3},$$

więc mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

9. Niech $(a, b) \in S$ będzie takie, że $\frac{a}{b} \neq 0$. Wtedy, jak wiemy $a \neq 0$, więc $(b, a) \in S$ oraz $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{1}{1} = 1$, bo $a, b \neq 0$. Stąd $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

Z 1–9 wynika zatem, że $(P_0, +, \cdot, 0, 1)$ jest ciałem.

Niech $f : P \longrightarrow P_0$ będzie funkcją daną wzorem $f(a) = \frac{a}{1}$ dla $a \in P$. Dla $a, b \in P$: $f(a) = f(b) \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow (a, 1) \sim (b, 1) \Leftrightarrow a \cdot 1 = b \cdot 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a = b$. Zatem f jest różnowartościowe. Ponadto $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ oraz dla $a, b \in P$:

$$f(a + b) = \frac{a + b}{1} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1} = f(a) + f(b)$$

i

$$f(a \cdot b) = \frac{a \cdot b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = f(a) \cdot f(b).$$

Zatem f jest zanurzeniem pierścieni. Stąd dla $a \in P$ można dokonać utożsamienia:

$$a \equiv \frac{a}{1}.$$

Przy tym utożsamieniu P jest podpierścieniem ciała P_0. Dla $0 \neq b \in P$ mamy, że $\frac{1}{b} = (\frac{b}{1})^{-1} = b^{-1}$, więc dla $a \in P$ jest $\frac{a}{b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$, stąd $P_0 = \{a \cdot b^{-1} : a, b \in P, b \neq 0\}$, czyli P_0 jest ciałem ułamków dla P. Ponadto dla $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in S$ mamy, że $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$, bo $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$.

Jeżeli L jest ciałem, to ciało ułamków pierścienia $L[x]$ oznaczamy przez $L(x)$ i nazywamy *ciałem funkcji wymiernych zmiennej x nad ciałem L*. Wówczas L jest podciałem $L(x)$, skąd $ch(L(x)) = ch(L)$. Ponieważ $1, x, x^2, \ldots$ są liniowo niezależne nad L i należą do $L(x)$, więc $(L(x) : L) = \infty$. Podstawiając $L = \mathbb{Z}_p$ uzyskamy stąd, że **istnieją ciała nieskończone dowolnej dodatniej charakterystyki**.

Rozdział 15

Rozszerzenia algebraiczne ciał

Twierdzenie 1. *Gdy $K \subseteq L \subseteq M$ są ciałami oraz $(L:K) = r \in \mathbb{N}$ i $(M:L) = s \in \mathbb{N}$, to $(M:K) = r \cdot s$.*

Dowód. Niech $a_1, \ldots, a_r \in L$ będzie bazą L nad K oraz niech $b_1, \ldots, b_s \in M$ będzie bazą M nad L. Udowodnimy, że

$$\{a_i \cdot b_j : 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant s\}$$

jest bazą M nad K. W tym celu weźmy dowolne $c_{ij} \in K, i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r$ takie, że $\sum_{i,j} c_{ij} a_i b_j = 0$. Wówczas $\sum_{j=1}^{s} \Big(\sum_{i=1}^{r} c_{ij} a_i \Big) b_j = 0$. Elementy stojące w nawiasach należą do ciała L, więc dla $j = 1, \ldots, s$ mamy, że $\sum_{i=1}^{r} c_{ij} a_i = 0$. Stąd z liniowej niezależności elementów $a_1, \ldots, a_r$ wynika, że $c_{ij} = 0$ dla $i = 1, \ldots, r$. Zatem $c_{ij} = 0$ dla wszystkich i, j, czyli elementy $a_i \cdot b_j$ dla $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$ są liniowo niezależne nad K. Weźmy teraz dowolne $a \in M$. Wówczas istnieją $t_1, \ldots, t_s \in L$ takie, że $a = \sum_{i=1}^{s} t_j \cdot b_j$ oraz dla $j = 1, \ldots, s$ istnieją $c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{rj} \in K$ takie, że $t_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij} \cdot a_i$. Stąd $a = \sum_{i,j} c_{ij}(a_i \cdot b_j)$. Zatem elementy $a_i \cdot b_j$

dla $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$ generują M nad K. Stąd mamy tezę. □

Definicja 1. Niech K będzie podciałem ciała L. Powiemy, że element $a \in L$ jest *algebraiczny* względem ciała K, jeżeli istnieje niezerowy wielomian $f \in K[x]$ taki, że $f(a) = 0$. W przeciwnym przypadku element $a \in L$ nazywamy *przestępnym* względem ciała K. Ciało L nazywamy *rozszerzeniem algebraicznym* ciała K, gdy każdy element $a \in L$ jest algebraiczny względem K.

Uwaga 1. Zauważmy, że $x \in K(x)$ jest elementem przestępnym nad K.

Uwaga 2. Liczby zespolone a, które są elementami algebraicznymi względem ciała $\mathbb{Q}$ nazywamy krótko *liczbami algebraicznymi.* Liczbę $a \in \mathbb{C}$ nazywamy *przestępną*, jeżeli a nie jest liczbą algebraiczną. Np. $a = e$ i $a = \pi$ są przestępne.

Twierdzenie 2. *Niech K będzie podciałem ciała L i $a \in L$. Wówczas a jest algebraiczny względem ciała K wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian nierozkładalny $f \in K[x]$ taki, że $f(a) = 0$. Ponadto, gdy $g \in K[x]$ i $g(a) = 0$, to $f \mid g$ w $K[x]$.*

Dowód. $\Rightarrow$ Oczywiste. $\Leftarrow$ Załóżmy, że $a \in L$ jest algebraiczny względem K. Wtedy istnieje niezerowy wielomian $f \in K[x]$ najniższego stopnia taki, że $f(a) = 0$. Stąd $f \notin K$ i jeżeli $w, u \in K[x]$ są takie, że $f = w \cdot u$, to $0 = w(a) \cdot u(a)$, skąd $w(a) = 0$ lub $u(a) = 0$. Bez zmniejszania ogólności można zakładać, że $w(a) = 0$. Wówczas $st(f) = st(w) + st(u)$, więc z minimalności $st(f)$ mamy, że $st(w) = st(f)$. Stąd $st(u) = 0$ i $u \in K^*$. Zatem wielomian f jest nierozkładalny w $K[x]$. Niech teraz $g \in K[x]$ będzie takie, że $g(a) = 0$. Wówczas istnieją $q, r \in K[x]$ takie, że $g = f \cdot q + r$ i $st(r) < st(f)$. Stąd $0 = g(a) = f(a) \cdot q(a) + r(a) = r(a)$, bo $f(a) = 0$, więc z minimalności $st(f)$ wynika, że $r = 0$ i $g = f \cdot q$, czyli $f \mid g$. □

Wniosek 1. *Gdy element $a \in L \supseteq K$ jest algebraiczny względem ciała K, to wielomian nierozkładalny $f \in K[x]$, którego a jest pierwiastkiem, jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do stałego czynnika.*

Dowód. Jeżeli $f_1, f_2 \in K[x]$ są wielomianami nierozkładalnymi w $K[x]$ takimi, że $f_1(a) = f_2(a) = 0$, to z twierdzenia 2 mamy, że $f_1 \mid f_2$ i $f_2 \mid f_1$, więc $f_1 \sim f_2$. Stąd istnieje $0 \neq c \in K$ takie, że $f_2 = c \cdot f_1$. □

Gdy element $a \in L$ jest algebraiczny względem podciała $K \subseteq L$, to stopień wielomianu nierozkładalnego $f \in K[x]$ takiego, że $f(a) = 0$ nazywamy *stopniem elementu a względem ciała K*, zaś f nazywamy *wielomianem minimalnym dla a względem ciała K*.

Niech K będzie podciałem ciała L i $a \in L$. Wówczas istnieje najmniejsze w sensie inkluzji podciało ciała L zawierające a oraz K. Oznaczmy je przez $K(a)$. Oczywiście $K(a)$ jest częścią wspólną wszystkich podciał ciała L zawierających $K \cup \{a\}$.

Twierdzenie 3. *Gdy $a \in L$ jest elementem algebraicznym stopnia n względem podciała $K \subseteq L$, to:*

(i) $K(a) = \{b_0 + b_1 \cdot a + \ldots + b_{n-1} \cdot a^{n-1} : b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K\}$;

(ii) Bazą $K(a)$ nad K jest układ: $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$;

(iii) $(K(a) : K) = n$.

Dowód. Jeżeli $n = 1$, to $a \in K$ i $K(a) = K$, więc teza jest oczywista. Niech dalej $n > 1$ i niech $f \in K[x]$ będzie wielomianem minimalnym a względem K. Wtedy $st(f) = n$. Niech

$$M = \{b_0 + b_1 \cdot a + \ldots + b_{n-1} \cdot a^{n-1} : b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K\}.$$

Wówczas $K \subseteq M$ i $a \in M$. Jeżeli $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$ są takie, że $b_0 + b_1 \cdot a + \ldots + b_{n-1} \cdot a^{n-1} = 0$, to $g(a) = 0$ dla $g = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_{n-1} \cdot x^{n-1} \in K[x]$, więc z minimalności $st(f)$ mamy, że $b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$. Zatem elementy $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ są liniowo niezależne nad K. Jeśli $h \in K[x]$, to istnieją $q, r \in K[x]$ takie, że $h = q \cdot f + r$ i $st(r) < n$, więc $h(a) = q(a)f(a) + r(a) = r(a) \in M$. Zatem $M = \{h(a) : h \in K[x]\}$. Stąd od razu mamy, że M jest podpierścieniem ciała L. Weźmy dowolne $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$ takie, że $b_0 + b_1 \cdot a + \ldots + b_{n-1} \cdot a^{n-1} \neq 0$. Wtedy, jak wiemy $g = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_{n-1} \cdot x^{n-1} \neq 0$ i f jest nierozkładalny w $K[x]$. Zatem istnieją wielomiany $u, v \in K[x]$ takie, że $g \cdot u + f \cdot v = 1$, stąd $g(a) \cdot u(a) + f(a) \cdot v(a) = 1$, czyli $\frac{1}{g(a)} = u(a) \in M$. Zatem M jest

podciałem ciała L zawierającym $K \cup \{a\}$. Niech N będzie dowolnym podciałem ciała L zawierającym $K \cup \{a\}$. Wtedy $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \in N$ oraz dla dowolnych $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in K$, $b_0 + b_1 \cdot a + \ldots + b_{n-1} \cdot a^{n-1} \in N$. Stąd $M \subseteq N$. Zatem $M = K(a)$ i wobec powyższego $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ jest bazą $K(a)$ nad K, czyli $(K(a) : K) = n$. □

Twierdzenie 4. *Element $a \in L$ jest algebraiczny względem podciała K wtedy i tylko wtedy, gdy $(K(a) : K) < \infty$.*

Dowód. $\Rightarrow$ Wynika z twierdzenia 2. $\Leftarrow$ Załóżmy, że $(K(a) : K) = n < \infty$, wówczas elementy $1, a, a^2, \ldots, a^n$ są liniowo zależne nad K oraz należą do $K(a)$, więc istnieją $b_0, b_1, \ldots, b_n \in K$ nie wszystkie równe 0 i takie, że $b_0 + b_1 \cdot a + \ldots + b_n \cdot a^n = 0$, stąd $g(a) = 0$ dla $0 \neq b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_n \cdot x^n \in K[x]$. Zatem a jest elementem algebraicznym względem ciała K. □

Wniosek 2. *Każde rozszerzenie skończone jest algebraiczne.*

Dowód. Niech $(L : K) = n < \infty$ i $a \in L$. Wtedy $K(a) \subseteq L$, więc $(K(a) : K) \leqslant n$, stąd wobec twierdzenia 4 a jest elementem algebraicznym względem ciała K. □

Jeżeli $a_1, \ldots, a_n \in L \supseteq K$, gdzie K jest podciałem ciała L, to istnieje najmniejsze podciało ciała L zawierające $K \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$. Oznaczmy je przez $K(a_1, \ldots, a_n)$. Łatwo zauważyć, że dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in L$ i dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $K(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = (K(a_1, \ldots, a_n))(a_{n+1})$.

Wniosek 3. *Gdy $a_1, \ldots, a_n \in L$ są elementami algebraicznymi względem $K \subseteq L$, to $K(a_1, \ldots, a_n)$ jest rozszerzeniem algebraicznym i skończonym ciała K.*

Dowód. Indukcja względem n. Dla $n = 1$ teza wynika z twierdzenia 4. Załóżmy, że teza zachodzi dla pewnego naturalnego n i niech $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in L$ będą elementami algebraicznymi względem K. Jeśli $f \in K[x]$ jest wielomianem minimalnym dla a_{n+1} względem K, to $f \in K(a_1, \ldots, a_n)[x]$, więc $(K(a_1, \ldots, a_n)(a_{n+1}) : K(a_1, \ldots, a_n)) \leqslant (K(a_{n+1}) : K) < \infty$, czyli $(K(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) : K(a_1, \ldots, a_n)) < \infty$. Ponadto z założenia indukcyjnego $(K(a_1, \ldots, a_n) : K) < \infty$, więc z twierdzenia 1, $(K(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) : K) < \infty$. Stąd z wniosku 2

rozszerzenie $K \subseteq K(a_1, \ldots, a_{n+1})$ jest algebraiczne. □

Wniosek 4. *Niech K będzie podciałem ciała L. Wówczas zbiór $M \subseteq L$ wszystkich elementów algebraicznych względem K jest podciałem ciała L zawierającym K.*

Dowód. Ponieważ każde $a \in K$ jest pierwiastkiem wielomianu $x - a \in K[x]$, więc $K \subseteq M$. Niech $a, b \in M$. Wtedy z wniosku 3 $K(a, b)$ jest rozszerzeniem algebraicznym ciała K, czyli $K(a, b) \subseteq M$. Zatem $a-b \in M$ i $\frac{a}{b} \in M$ dla $b \neq 0$. Stąd z twierdzenia 3 z rozdziału 14, M jest podciałem ciała L. □

Twierdzenie 5. *Jeżeli ciało L jest algebraicznym rozszerzeniem ciała K i ciało M jest algebraicznym rozszerzeniem ciała L, to ciało M jest algebraicznym rozszerzeniem ciała K.*

Dowód. Weźmy dowolne $a \in M$. Wówczas istnieje $0 \neq f \in L[x]$ takie, że $f(a) = 0$. Ale $f = l_1 + l_1 x + \ldots + l_n x^n$ dla pewnych $l_0, \ldots, l_n \in L$ oraz z wniosku 3 mamy, że $(K(l_0, \ldots, l_n) : K) < \infty$. Ponadto a jest algebraiczny nad $K(l_0, \ldots, l_n)$, więc z twierdzenia 4 mamy, że $\Big((K(l_0, \ldots, l_n))(a) : K(l_0, \ldots, l_n)\Big) < \infty$. Zatem z twierdzenia 1 i z wniosku 2, a jest algebraiczny nad ciałem K. □

Literatura

[1] Cz. Bagiński, *Wstęp do teorii grup*, SCRIPT, Warszawa 2002.
[2] A. Białynicki-Birula, *Algebra*, PWN, Warszawa 1971.
[3] J. Browkin, *Teoria ciał*, PWN, Warszawa 1977.
[4] M. Bryński i J. Jurkiewicz, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1978.
[5] A. I. Kostrykin, *Wstęp do algebry*, PWN, Warszawa 1984.
[6] A. I. Kostrykin, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1995.